LES ARCS-EN-CIEL

Les arcs-en-ciel sont à la fois familiers et mystérieux. Nous savons qu'ils viennent de la réflexion et de la réfraction des rayons du Soleil par les gouttes de pluie. Nous avons tous vu en classe comment la lumière blanche, réfractée par un prisme, se scinde en différentes couleurs, qui émergent dans différentes directions. Et voilà, nous disait-on, cela explique l'arc-en-ciel. Faux ! Cela explique les *couleurs*, pas la forme. D'ailleurs, cela n'explique même pas les couleurs. Si des millions de gouttes de pluie émettent de la lumière de toutes les couleurs, pourquoi celles-ci ne se mélangent-elles pas ? Pourquoi le résultat n'est-il pas un méli-mélo terne et flou ?

Un arc-en-ciel est constitué d'un ensemble d'arcs colorés. Il nous faut comprendre pourquoi chaque couleur n'apparaît que sur un seul arc. Et il nous faut aussi comprendre la forme de ces arcs. En fait, ce sont des morceaux de cercles. Depuis un avion ou un ballon, s'ils sont assez haut et si le Soleil et la pluie sont bien placés, on peut voir un arc-en-ciel complet : un cercle parfait.

Pour comprendre l'arc-en-ciel, il faut faire un peu de géométrie. Des rayons de lumière traversent une gouttelette d'eau. Comme le Soleil est très loin et la goutte très petite, ces rayons sont pratiquement parallèles. Concentrons-nous sur une couleur en particulier. Chaque rayon atteint l'avant de la goutte, où il est réfracté. Puis il est réfléchi par le fond de la goutte. Enfin, il est à nouveau réfracté et ressort par l'avant, repartant peu ou prou dans la direction du Soleil. La géométrie nous apprend que chaque rayon dans le groupe de rayons parallèles ressort à un angle différent, mais qu'ils se trouvent tous à proximité d'un angle critique. En fait, cet angle donne lieu à une singularité mathématique – un « pli », en théorie des catastrophes. Cela signifie que les rayons qui émergent à proximité de cet angle sont beaucoup plus colorés que les autres, car très resserrés.

L'ensemble goutte + rayons incidents possède une symétrie rotationnelle autour de la droite qui relie le centre de la goutte au Soleil. La goutte émet une lumière vive à un certain angle de cette droite, et cette lumière émergente se concentre sur un cône, dont le sommet est au centre de la goutte. Un observateur au sol ne peut voir la lumière émise par une goutte donnée que si celle-ci se trouve sur un deuxième cône, dont le sommet est dans l'œil de l'observateur. Ainsi, ce dernier voit un arc circulaire – la base du cône – de la couleur en question.

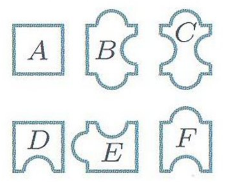
Le phénomène se répète pour chaque couleur, selon un angle différent. De ce fait, les arcs correspondants ne se superposent pas : ils forment des cercles concentriques.

Voilà pourquoi les arcs-en-ciel nous présentent leurs couleurs bien séparées les unes des autres.

LUNDI	MARDI	MERCREDI	JEUDI	VENDREDI

1 Depuis le 1er janvier 2015, Louis calcule chaque jour la somme des chiffres de la date du jour. Par exemple, le 1/1/2015, Louis a trouvé $1+1+2+0+1+5=10$. Quel est le plus grand nombre qu'il va obtenir durant l'année 2015 ?

2 Si le côté du carré est 1 cm et que le rayon des demi-cercles mesure 0,3 cm, quelle est l'aire maximale pouvant être recouverte avec toutes ces pièces ?



5 Un carré et un triangle vérifient les propriétés suivantes : lorsqu'on place le carré sur le triangle on peut recouvrir les deux tiers de la surface du triangle ; si l'on place le triangle sur le carré on peut recouvrir les trois quarts de la surface du carré. Déterminer le rapport entre l'aire du carré et celle du triangle.

6 Si n est un entier positif, S_n désigne la somme des dix premiers multiples de n. Par exemple, $S_2 = 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$. Combien vaut $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}$?

7 Le nombre de bonbons qu'Anna a dans son sac est un nombre à deux chiffres. Anna calcule la somme de ces deux chiffres et retire autant de bonbons de son sac. Elle recommence l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un nombre à un seul chiffre de bonbons. Combien en reste-t-il ?

8 Dans un triangle ABC, soit D un point du côté $[BC]$ tel que $BD = 14$ cm, $DA = 13$ cm et $DC = 4$ cm. On sait que le rayon du cercle circonscrit au triangle ABD est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle ADC. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

9 Trouver les couples de chiffres (a, b) avec a et b non nuls tels que

$$\begin{array}{rcccc} & a & 8 & 9 & b \\ - & & 5 & 9 & 0 & 4 \\ \hline & & b & 9 & 8 & a \end{array}$$

12 Une suite de nombres est écrite au tableau. Les deux premiers nombres inscrits sont 1 et 2, puis on écrit $1+2+(1\times 2)=5$, puis $2+5+(2\times 5)=17$. Si m et n sont deux nombres incrits consécutivement, le suivant est $m+n+mn$. Donner une expression de tous les nombres qui seront inscrits.

13 Jean, Louis et Ana ont respectivement 99, 100 et 101 jetons. À chaque tour, le joueur ayant le plus de jetons en donne un à chacun des deux autres et en pose un sur la table. Le jeu se termine quand l'un des joueurs n'a plus de jetons. Combien vont-ils jouer de tours ?

14 Quelle est la plus petite valeur possible de la somme de 18 entiers positifs consécutifs qui soit un carré parfait ?

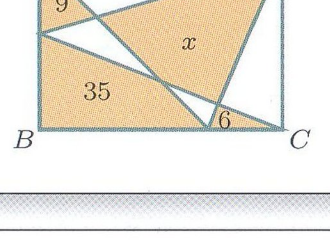
15 Combien de nombres distincts peuvent être exprimés comme somme de trois nombres différents de l'ensemble $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$?

16 Un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ est dit *superpair* si le produit de deux nombres quelconques de cet ensemble est pair. Quel est le plus grand nombre d'éléments d'un sous-ensemble superpair ?

19 Trouver le plus petit nombre divisible par 15 qui s'écrit uniquement avec des 0 et des 1.

20 Sophie possède 20 billets dont certains valent 5 € et les autres 10 €. Si ses billets de 5 € étaient des billets de 10 €et ceux de 10 € des billets de 5 €, elle aurait 70 € de plus. Combien d'argent a Sophie ?

21 Les nombres indiquent les aires des zones coloriées exprimées en cm^2. Combien vaut x ?

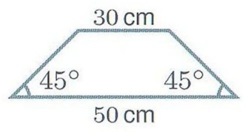


22 Soient a, b, c et d quatre entiers positifs tels que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ et $d < 40$. Quelle est la plus grande valeur possible de a ?

23 Hugo, Paco et Luis sont trois colocataires. L'un est médecin, l'autre ingénieur et le troisième mathématicien. Le médecin est le plus jeune et il est fils unique. Luis est plus âgé que l'ingénieur et il est l'époux de la sœur d'Hugo. Qui est le médecin, l'ingénieur, le mathématicien ? (Donner la réponse dans cet ordre.)

26 Si n est un entier positif, le n-ième nombre triangulaire est défini comme la somme $T_n = 1+2+3+\cdots+n$. Trouver tous les couples de nombres triangulaires dont la différence est 2011.

27 Quelle est l'aire du trapèze ?



28 Une classe compte 25 garçons et 20 filles. Pendant les vacances, 60% sont partis faire des travaux d'intérêt général. Quel nombre minimal de filles y a participé ?

29 Combien de nombres qui sont des cubes divisent $3!\times 5!\times 7!$? $(n! = 1\times 2\times\cdots\times n.)$

30 Diviser un rectangle de côtés 9 cm et 3 cm en 8 carrés.