Chapitre 5. Fonctions exponentielles, logarithme décimal

Le programme

Contenus	Modalités	Commentaires
Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$	Savoir quel est le lien entre les valeurs de a et le sens de variation de la fonction $x \mapsto a^x$ doit être connu.	L'étude des suites géométriques fournit une ouverture pour introduire ce type de fonction. Certains phénomènes économiques ou biologiques, l'étude expérimentale de la touche x^y d'une calculatrice, permettent d'introduire les fonctions exponentielles. On remarquera que les propriétés algébriques des puissances entières s'étendent aux puissances non entières. Les démonstrations d'existence et de dérivation ne sont pas au programme. On constatera le sens de variation de la fonction $x \mapsto a^x$ à partir d'études expérimentales. L'étude du cas $a = \mathrm{e}$ n'est pas au programme.
Fonctions logarithme décimal	Utiliser la fonction logarithme décimal pour résoudre des équations ou des inéquations du type $a^x = b$, $a^x > b$, $a^x < b$.	Le lien à partir des suites arithmétiques et des suites géométriques peut constituer une bonne introduction. On pourra signaler que la fonction log transforme des produits en sommes. Toute technicité sur cette notion est exclue. Il s'agit au travers d'exemples concrets de montrer les apports de cette notion. Le lien avec le pH entrevu en sciences physiques, en classe de première, pourra servir de première approche.

Nos objectifs

Conformément aux instructions du programme, nous présentons les notions à partir d'études expérimentales, évitant ainsi toute difficulté théorique. Nous proposons des exercices et activités permettant aux élèves de s'approprier les formules et méthodes utilisées en biologie, sciences physiques et chimiques, économie, etc. Nous présentons d'ailleurs quelques problèmes relatifs à ces disciplines.

Activités et applications

1. Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$

Activité

1. $1{,}6^3 \approx 4{,}1$; $1{,}6^{-3} \approx 0{,}24$; $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0{,}13$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \approx 7{,}59$; $1{,}2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}10$; $1{,}2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}06$; $2^{0{,}6} \approx 1{,}52$; $1{,}4^{-3{,}2} \approx 0{,}34$; $0{,}2^{\sqrt{5}} \approx 0{,}03$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{5}{11}} \approx 0{,}88$.

2. a) On peut conjecturer que les six fonctions sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.
b) On peut conjecturer que les six fonctions sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
c) Pour $a = 1$, la courbe obtenue est la droite d'équation $y = 1$. La fonction est alors la fonction constante qui, à tout nombre x, associe 1.

Application 1

En appliquant les mêmes propriétés que celles utilisées pour des exposants entiers :
a) $12{,}6^{\frac{1}{2}} \times 12{,}6^{-\frac{1}{3}} = 12{,}6^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 12{,}6^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = 12{,}6^{\frac{1}{6}}$.
b) $0{,}75^{0{,}3} \times 1{,}01^{0{,}3} = (0{,}75 \times 1{,}01)^{0{,}3} = (0{,}757\,5)^{0{,}3}$.
c) $(2^{-3{,}4})^{-5{,}1} = 2^{-3{,}4\times(-5{,}1)} = 2^{17{,}34}$.
d) $\dfrac{1{,}7^{\frac{2}{3}}}{1{,}7^{\frac{1}{5}}} = 1{,}7^{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}} = 1{,}7^{\frac{10}{15}-\frac{3}{15}} = 1{,}7^{\frac{7}{15}}$.
e) $\dfrac{3{,}6^{-0{,}1}}{0{,}9^{-0{,}1}} = \left(\dfrac{3{,}6}{0{,}9}\right)^{-0{,}1} = 4^{-0{,}1}$.

Application 2

a) L'ensemble des solutions est $]-\infty\,; 12{,}63[$.
b) L'ensemble des solutions est $]3\,; +\infty[$.

2. Fonction logarithme décimal $x \mapsto \log(x)$

Activité

2. La fonction log semble ne pas être définie pour $x \leqslant 0$ et semble être strictement croissante.
3.

x	$10^{-9{,}42}$	10^{-2}	10^{-1}	1	10	$10^{30{,}14}$
$\log(x)$	$-9{,}42$	-2	-1	0	1	30,14

Pour les valeurs de a proposées, on constate que $\log(10^a) = a$.
4. et **5.** Utiliser $\boxed{\text{TRACE}}$ et les flèches verticales.

On en déduit que :
$\log(2{,}4x) = \log(2{,}4) + \log(x)$, $\log(1{,}8^x) = x \log(1{,}8)$.

Application 1

a) $\log(10^{-5{,}43}) = -5{,}43$.
b) $\log(1\,000\,000) = 6$.
c) $\log(0{,}001) = -3$.

Application 2

1. $\log(80) + \log(12{,}5) = \log(1000) = 3$.
2. $\log(300) = \log(100) + \log(3) = 2 + \log(3)$.
3. $\log(88) = \log(8) + \log(11) = 3\log(2) + \log(11)$.

3. Équation $a^x = b$, inéquation $a^x < b$ et inéquation $a^x > b$

Activité

1. a) On sait que pour a et b appartenant à $]0\,; +\infty[$, $a = b$ équivaut à $\log(a) = \log(b)$.
D'où $2^x = 6$ équivaut à $\log(2^x) = \log(6)$.
De plus, $\log(2^x) = x\log(2)$.
On en déduit que $2^x = 6$ équivaut à $x\log(2) = \log(6)$.
b) $\log(2)$ étant non nul, l'équation $2^x = 6$ admet pour solution $\dfrac{\log(6)}{\log(2)}$.

2. a) La fonction log étant strictement croissante sur $]0\,; +\infty[$, $2^x > 6$ équivaut à $\log(2^x) > \log(6)$.
On en déduit que $2^x > 6$ équivaut à $x\log(2) > \log(6)$.
b) On sait que, pour $a > 1$,
$\log(a) > 0$, pour $a > 1$, d'où $\log(2) > 0$.
On en déduit que $x\log(2) > \log(6)$ équivaut à $x > \dfrac{\log(6)}{\log(2)}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $2^x > 6$ est l'intervalle $\left]\dfrac{\log(6)}{\log(2)}\,; +\infty\right[$.

3. a) La fonction log étant strictement croissante sur $]0\,; +\infty[$, $0{,}2^x > 6$ équivaut à $\log(0{,}2^x) > \log(6)$.
On en déduit que $0{,}2^x > 6$ équivaut à $x\log(0{,}2) > \log(6)$.
b) On sait que pour $0 < a < 1$,
$\log(a) < 0$, d'où $\log(0{,}2) < 0$.
On en déduit que $x\log(0{,}2) > \log(6)$ équivaut à $x < \dfrac{\log(6)}{\log(0{,}2)}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $0{,}2^x > 6$ est l'intervalle $\left]-\infty\,; \dfrac{\log(6)}{\log(0{,}2)}\right[$.

Application 1

a) $5^x = 4$ équivaut à $\log(5^x) = \log(4)$, c'est-à-dire à $x\log(5) = \log(4)$.

$\log(5)$ étant non nul, $x\log(5) = \log(4)$ équivaut à $x = \dfrac{\log(4)}{\log(5)}$.

Conclusion : l'équation $5^x = 4$ a une solution dans $\mathbb{R}$, le nombre $\dfrac{\log(4)}{\log(5)}$.

La calculatrice donne $\dfrac{\log(4)}{\log(5)} \approx 0{,}861\,3\ldots$, dont la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près est 0,861.

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 3$ équivaut à $\log\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \log(3)$, c'est-à-dire à $x\log\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log(3)$.

$\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$ étant non nul, $x\log\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log(3)$ équivaut à $x = \dfrac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$, c'est-à-dire à $x = -\dfrac{\log(3)}{\log(2)}$, car $\log\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log(2^{-1}) = -\log(2)$.

Conclusion : l'équation $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 3$ a une solution dans $\mathbb{R}$, le nombre $-\dfrac{\log(3)}{\log(2)}$.

La calculatrice donne $-\dfrac{\log(3)}{\log(2)} \approx -1{,}584\,9\ldots$, dont la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près est $-1{,}585$.

c) $1{,}3^x = 0{,}1$ équivaut à $\log(1{,}3^x) = \log(0{,}1)$, c'est-à-dire à $x\log(1{,}3) = \log(0{,}1)$.

$\log(1{,}3)$ étant non nul, $x\log(1{,}3) = \log(0{,}1)$ équivaut à $x = \dfrac{\log(0{,}1)}{\log(1{,}3)}$.

Conclusion : l'équation $1{,}3^x = 0{,}1$ a une solution dans $\mathbb{R}$, le nombre $\dfrac{\log(0{,}1)}{\log(1{,}3)}$.

La calculatrice donne $\dfrac{\log(0{,}1)}{\log(1{,}3)} \approx -8{,}776\,3\ldots$, dont la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près est 8,776.

Application 2

a) $4^x > 3$ équivaut à $\log(4^x) > \log(3)$, c'est-à-dire à $x\log(4) > \log(3)$.

Or $\log(4) > 0$ (car $4 > 1$), donc $x\log(4) > \log(3)$ équivaut à $x > \dfrac{\log(3)}{\log(4)}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $4^x > 3$ est $\left]\dfrac{\log(3)}{\log(4)}\,;+\infty\right[$.

b) $0{,}7^x < 0{,}2$ équivaut à $\log(0{,}7^x) < \log(0{,}2)$, c'est-à-dire à $x\log(0{,}7) < \log(0{,}2)$.

Or $\log(0{,}7) < 0$ (car $0 < 0{,}7 < 1$), donc $x\log(0{,}7) < \log(0{,}2)$ équivaut à $x > \dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}7)}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $0{,}7^x < 0{,}2$ est $\left]\dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}7)}\,;+\infty\right[$.

c) $0{,}9^x > 3{,}2$ équivaut à $\log(0{,}9^x) > \log(3{,}2)$, c'est-à-dire à $x\log(0{,}9) > \log(3{,}2)$.

Or $\log(0{,}9) < 0$ (car $0 < 0{,}9 < 1$), donc $x\log(0{,}9) > \log(3{,}2)$ équivaut à $x < \dfrac{\log(3{,}2)}{\log(0{,}9)}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $0{,}9^x > 3{,}2$ est $\left]-\infty\,;\dfrac{\log(3{,}2)}{\log(0{,}9)}\right[$.

d) $1{,}01^x < 0{,}8$ équivaut à $\log(1{,}01^x) < \log(0{,}8)$, c'est-à-dire à $x\log(1{,}01) < \log(0{,}8)$.

Or $\log(1{,}01) > 0$ (car $1{,}01 > 1$), donc $x\log(1{,}01) < \log(0{,}8)$ équivaut à $x < \dfrac{\log(0{,}8)}{\log(1{,}01)}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $1{,}01^x < 0{,}8$ est $\left]-\infty\,;\dfrac{\log(0{,}8)}{\log(1{,}01)}\right[$.

Exercices d'entraînement

C *indique que l'exercice est corrigé dans le livre élève.*

1 **C**

2 **a)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0{,}65} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{0{,}35} = \dfrac{2}{3}$;

b) $2^{0{,}6} \times 0{,}75^{0{,}6} = 1{,}5^{0{,}6}$;

c) $\left(3^{-\frac{5}{8}}\right)^4 = 3^{-\frac{20}{8}} = 3^{-\frac{5}{2}}$;

d) $\dfrac{\left(\frac{11}{6}\right)^{0{,}2}}{\left(\frac{11}{6}\right)^{0{,}3}} = \left(\dfrac{11}{6}\right)^{0{,}2-0{,}3} = \left(\dfrac{11}{6}\right)^{-0{,}1} = \left(\dfrac{6}{11}\right)^{0{,}1}$;

e) $\dfrac{10^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

3 **a)** $a^{0,3}a^{-1,2} = a^{-0,9}$;
b) $(a^{-6})^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{6}{3}} = a^{-2}$;
c) $\dfrac{a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{10}}} = a^{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}} = a^{\frac{1}{10}}$;
d) $(\sqrt{a})^4 = a^2$;
e) $a^{-0,6}a^{0,6} = a^0 = 1$.

4 **C**

5 **a)** $7 \times 10^{-5,5} \times 2 \times 10^{2,2} \times 10^{0,3} = 1,4 \times 10^{-4}$.
b) $(5^4 \times 10^{-2})^{\frac{1}{2}} = 5^2 \times 10^{-1} = 2,5$.
c) $(11^{\frac{1}{2}} \times 10^{1,25})^4 \times (10^{-8})^{0,625} = 11^2 \times 10^5 \times 10^{-5}$
$= 1,21 \times 10^2$.

6 **a)** $5,4 \times 10^{-\frac{2}{3}} \times 6 \times 10^{\frac{8}{3}} \times 0,25 \times 10^5 = 8,1 \times 10^7$.
b) $\left(\dfrac{2 \times 10^{-3,3}}{5 \times 10^{2,7}}\right)^2 = (2 \times 5^{-1} \times 10^{-6})^2 = (0,4 \times 10^{-6})^2$
$= 0,16 \times 10^{-12} = 1,6 \times 10^{-13}$.
c) $\left(0,5 \times 10^{\frac{1}{5}}\right)^{10} \times (8 \times 10^{-1})^4 = 0,5^{10} \times 10^2 \times 8^4 \times 10^{-4}$
$= 4 \times 10^{-2}$.

7 **C**

8 **a)** $\frac{9}{8} > 1$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) $0 < 0,98 < 1$, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

9 **a)** $0 < \frac{5}{6} < 1$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
b) $1,01 > 1$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

10 **C**

11 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(\frac{29}{7}\right)^x < \left(\frac{29}{7}\right)^{10,6}$ est $]-\infty\,;10,6[$.
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $0,7^x < 0,7^{3,1}$ est $]3,1\,;+\infty[$.

12 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(\frac{16}{27}\right)^x > \left(\frac{16}{27}\right)^4$ est $]-\infty\,;4[$.
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\pi^x > \pi^3$ est $]3\,;+\infty[$.

13 **C**

14 **a)** $\log(10^{-0,78}) = -0,78$. **b)** $\log\left(10^{\frac{3}{7}}\right) = \frac{3}{7}$.

15 **a)** $\log(10^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$. **b)** $\log(10^{-4}) = -4$.

16 **a)** $\log(10^{\pi}) = \pi$. **b)** $\log(10^{0,78}) = 0,78$.

17 **a)** $\log(10^{-\frac{3}{7}}) = -\frac{3}{7}$. **b)** $\log(10^{-\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$.

18 **C**

19 **a)** $\log(1\,000) = 3$. **b)** $\log(0,001) = -3$.
c) $\log(0,000\,1) = -4$.

20 **a)** $\log(0,2) + \log(0,5) = \log(0,2 \times 0,5)$
$= \log(0,1)$
$= -1$.
b) $\log(8) + \log(125) = \log(8 \times 125) = \log(1\,000) = 3$.

21 **a)** $\log(25) + \log(0,04) = \log(25 \times 0,04)$
$= \log(1)$
$= 0$.
b) $\log(0,02) + \log(500) = \log(0,02 \times 500) = \log(10) = 1$.

22 **C**

23 **a)** $\log(0,2) = -1 + \log(2)$.
b) $\log(0,02) = -2 + \log(2)$.
c) $\log(0,002) = -3 + \log(2)$.
d) $\log(0,000\,2) = -4 + \log(2)$.

24 **a)** $\log(30) = 1 + \log(3)$.
b) $\log(300) = 2 + \log(3)$.
c) $\log(3\,000) = 3 + \log(3)$.
d) $\log(300\,000) = 5 + \log(3)$.

25 **a)** $\log(0,3) = -1 + \log(3)$.
b) $\log(0,003) = -3 + \log(3)$.
c) $\log(0,000\,3) = -4 + \log(3)$.

26 **C**

27 **a)** $2\log(8) = 2\log(2^3) = 6\log(2)$.
b) $3,5\log(16) = 3,5\log(2^4) = 14\log(2)$.
c) $-2\log(32) = -2\log(2^5) = -10\log(2)$.
d) $4\log(2^{0,5}) = 2\log(2)$.
e) $6\log(2^{-5}) = -30\log(2)$.
f) $-4\log(2^{-1}) = 4\log(2)$.

28 **a)** $4\log(9) = 4\log(3^2) = 8\log(3)$.
b) $0,5\log(27) = 0,5\log(3^3) = 1,5\log(3)$.

c) $-5\log(81) = -5\log(3^4) = -20\log(3)$.
d) $4{,}2\log(3^{0{,}5}) = 2{,}1\log(3)$.
e) $7\log(3^{-2}) = -14\log(3)$.
f) $-0{,}6\log(3^{-4}) = 2{,}4\log(3)$.

$\boxed{\mathbf{29}}$ **a)** $-\log(25) = -\log(5^2) = -2\log(5)$.
b) $-6\log(125) = -6\log(5^3) = -18\log(5)$.
c) $5\log(5^{0{,}4}) = 2\log(5)$.
d) $0{,}18\log(5^{-0{,}45}) = -0{,}081\log(5)$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ $\boxed{\mathbf{C}}$

$\boxed{\mathbf{31}}$ **a)** $\log(0{,}4) = \log(10^{-1} \times 2^2) = -1 + 2\log(2)$.
b) $\log(0{,}08) = \log(10^{-2} \times 2^3) = -2 + 3\log(2)$.
c) $\log(0{,}001\,6) = \log(10^{-4} \times 2^4) = -4 + 4\log(2)$.
d) $\log(3{,}2) = \log(10^{-1} \times 2^5) = -1 + 5\log(2)$.

$\boxed{\mathbf{32}}$ **a)** $\log(16) + 3\log(0{,}16) = \log(2^4) + 3\log(10^{-2} \times 2^4)$
$= 4\log(2) + 3(\log(10^{-2}) + \log(2^4)) = -6 + 16\log(2)$.
b) $2\log(2^{0{,}5}) - \log(2) = \log(2) - \log(2) = 0$.
c) $2\log(8) + \log(40) = 2\log(2^3) + \log(10 \times 2^2)$
$= 6\log(2) + \log(10) + 2\log(2) = 1 + 8\log(2)$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ **a)** $\log(270) = \log(10 \times 3^3) = 1 + 3\log(3)$.
b) $\log(900) = \log(10^2 \times 3^2) = 2 + 2\log(3)$.
c) $\log(8{,}1) = \log(10^{-1} \times 3^4) = -1 + 4\log(3)$.
d) $\log(0{,}27) = \log(10^{-2} \times 3^3) = -2 + 3\log(3)$.

$\boxed{\mathbf{34}}$ **a)** $4\log(9) - 3\log(27) = 4\log(3^2) - 3\log(3^3)$
$= -\log(3)$.
b) $\log(3^{4{,}2}) + 0{,}4\log(9) = 4{,}2\log(3) + 0{,}4\log(3^2)$
$= 5\log(3)$.
c) $2\log(9) + \log(300) = 2\log(3^2) + 3\log(10^2 \times 3)$
$= 6 + 7\log(3)$.
d) $2\log(81) + 5\log(0{,}3) = 2\log(3^4) + 5\log(10^{-1} \times 3)$
$= -5 + 13\log(3)$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ $\boxed{\mathbf{C}}$

$\boxed{\mathbf{36}}$ **a)** $\log(60) = \log(10 \times 2 \times 3) = 1 + \log(2) + \log(3)$.
b) $\log(0{,}12) = \log(10^{-2} \times 3 \times 2^2)$
$= -2 + \log(3) + 2\log(2)$.
c) $\log(4\,800) = \log(10^2 \times 3 \times 2^4) = 2 + \log(3) + 4\log(2)$.
d) $\log(7{,}2) = \log(10^{-1} \times 3^2 \times 2^3)$
$= -1 + 2\log(3) + 3\log(2)$.

$\boxed{\mathbf{37}}$ **a)** $\log(45) = \log(3^2 \times 5) = 2\log(3) + \log(5)$.
b) $\log(7{,}5) = \log(10^{-1} \times 3 \times 5^2)$
$= -1 + \log(3) + 2\log(5)$.
c) $\log(1\,500) = \log(10^2 \times 3 \times 5) = 2 + \log(3) + \log(5)$.
d) $\log(225) = \log(3^2 \times 5^2) = 2\log(3) + 2\log(5)$.

$\boxed{\mathbf{38}}$ La magnitude du séisme du 22 mai 1960 au Chili est :
$M = \log(A) - \log(A_0) = \log(3{,}16 \times 10^8\, A_0) - \log(A_0)$
$= \log(3{,}16 \times 10^8) + \log(A_0) - \log(A_0) \approx 8{,}5$.

$\boxed{\mathbf{39}}$ $\boxed{\mathbf{C}}$

$\boxed{\mathbf{40}}$ Les solutions sont :
a) $\dfrac{\log(0{,}1)}{\log(3{,}5)} \approx -1{,}838$.
b) $\dfrac{\log(0{,}25)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 4{,}819$.
c) $\dfrac{\log(4)}{\log(0{,}96)} \approx -33{,}959$.
d) $\dfrac{\log\left(\frac{2}{3}\right)}{\log\left(\frac{8}{7}\right)} \approx -3{,}036$.

$\boxed{\mathbf{41}}$ Les solutions sont :
a) $\dfrac{\log(15)}{\log(5{,}26)} \approx 1{,}631$.
b) $\dfrac{2}{\log(0{,}345)} \approx -4{,}327$.
c) $\dfrac{\log(0{,}005)}{\log(\sqrt{3})} \approx -9{,}645$.
d) $\dfrac{-3}{\log(0{,}03)} \approx 1{,}970$.

$\boxed{\mathbf{42}}$ $\boxed{\mathbf{C}}$

$\boxed{\mathbf{43}}$ **a)** $3 \times 5{,}1^x = 30$ équivaut à $5{,}1^x = 10$; la solution est $\dfrac{1}{\log(5{,}1)} \approx 1{,}413$.
b) $0{,}8 \times 1{,}8^x = 3{,}4$ équivaut à $1{,}8^x = 4{,}25$; la solution est $\dfrac{\log(4{,}25)}{\log(1{,}8)} \approx 2{,}462$.
c) $1{,}4 \times 0{,}2^x = 11{,}1$ équivaut à $0{,}2^x = \dfrac{11{,}1}{1{,}4}$;
la solution est $\dfrac{\log\left(\frac{11{,}1}{1{,}4}\right)}{\log(0{,}2)} \approx -1{,}286$.
d) $0{,}01 \times 6{,}3^x = 3$ équivaut à $6{,}3^x = 300$; la solution est $\dfrac{\log(300)}{\log(6{,}3)} \approx 3{,}099$.

44 **C**

45 **a)** $\left(\frac{12}{11}\right)^x > 3$ équivaut à $x > \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{12}{11}\right)}$;

ensemble des solutions : $\left]\frac{\log(3)}{\log\left(\frac{12}{11}\right)} ; +\infty\right[$.

b) $0{,}76^x < 10^{-3}$ équivaut à $x > \frac{\log(10^{-3})}{\log(0{,}76)}$;

ensemble des solutions : $\left]\frac{-3}{\log(0{,}76)} ; +\infty\right[$.

c) $0{,}99^x > 10$ équivaut à $x < \frac{\log(10)}{\log(0{,}99)}$;

ensemble des solutions : $\left]-\infty ; \frac{1}{\log(0{,}99)}\right[$.

d) $2{,}65^x < 0{,}02$ équivaut à $x < \frac{\log(0{,}02)}{\log(2{,}65)}$;

ensemble des solutions : $\left]-\infty ; \frac{\log(0{,}02)}{\log(2{,}65)}\right[$.

46 **a)** $2^x < 7$ équivaut à $x < \frac{\log(7)}{\log(2)}$;

ensemble des solutions : $\left]-\infty ; \frac{\log(7)}{\log(2)}\right[$.

b) $\left(\frac{5}{6}\right)^x < 3$ équivaut à $x > \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$;

ensemble des solutions : $\left]\frac{\log(3)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} ; +\infty\right[$.

c) $1{,}2^x > 500\,000$ équivaut à $x > \frac{\log(500\,000)}{\log(1{,}2)}$;

ensemble des solutions : $\left]\frac{\log(500\,000)}{\log(1{,}2)} ; +\infty\right[$.

d) $0{,}65^x > 321$ équivaut à $x < \frac{\log(321)}{\log(0{,}65)}$;

ensemble des solutions : $\left]-\infty ; \frac{\log(321)}{\log(0{,}65)}\right[$.

47 **1.** Réponse **c)**.
2. Réponse **c)**.

48 **C**

49 **a)** $2{,}1^n > 750$ équivaut à $n > \frac{\log(750)}{\log(2{,}1)}$; on trouve $n = 9$.

b) $0{,}8^n < 0{,}11$ équivaut à $n > \frac{\log(0{,}11)}{\log(0{,}8)}$; on trouve $n = 10$.

c) $1{,}12^n > 11$ équivaut à $n > \frac{\log(11)}{\log(1{,}12)}$; on trouve $n = 22$.

d) $0{,}45^n < 0{,}008$ équivaut à $n > \frac{\log(0{,}008)}{\log(0{,}45)}$; on trouve $n = 7$.

50 **C**

51 **a)** $\left(\frac{8}{7}\right)^{n-1} > 30$ équivaut à $n - 1 > \frac{\log(30)}{\log\left(\frac{8}{7}\right)}$; on trouve $n - 1 = 26$ et $n = 27$.

b) $1{,}06^{n-1} > 14$ équivaut à $n - 1 > \frac{\log(14)}{\log(1{,}06)}$; on trouve $n - 1 = 46$ et $n = 47$.

c) $\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} < 0{,}05$ équivaut à $n - 1 > \frac{\log(0{,}05)}{\log\left(\frac{8}{9}\right)}$; on trouve $n - 1 = 26$ et $n = 27$.

d) $0{,}23^{n-1} < 3 \times 10^{-5}$ équivaut à $n - 1 > \frac{\log(3 \times 10^{-5})}{\log(0{,}23)}$; on trouve $n - 1 = 8$ et $n = 9$.

52 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation

$3 \times 4^x < 5$ est $\left]-\infty ; \frac{\log\left(\frac{5}{3}\right)}{\log(4)}\right[$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation

$0{,}6 \times 2{,}3^x > 1$ est $\left]\frac{\log\left(\frac{1}{0{,}6}\right)}{\log(2{,}3)} ; +\infty\right[$.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation

$8 \times 0{,}2^x < 24$ est $\left]\frac{\log(3)}{\log(0{,}2)} ; +\infty\right[$.

d) L'ensemble des solutions de l'inéquation

$7{,}1 \times 0{,}23^x > 4{,}6$ est $\left]-\infty ; \frac{\log\left(\frac{4{,}6}{7{,}1}\right)}{\log(0{,}23)}\right[$.

53 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation

$3 \times 1{,}21^x < 3{,}9$ est $\left]-\infty ; \frac{\log(1{,}3)}{\log(1{,}21)}\right[$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation

$1{,}6 \times 0{,}3^x < 3$ est $\left]\frac{\log\left(\frac{3}{1{,}6}\right)}{\log(0{,}3)} ; +\infty\right[$.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation

$9 \times 0{,}25^x < 6{,}4$ est $\left]\dfrac{\log\left(\frac{6{,}4}{9}\right)}{\log(0{,}25)}\,;+\infty\right[$.

d) L'ensemble des solutions de l'inéquation

$4{,}2 \times 7{,}22^x > 6$ est $\left]\dfrac{\log\left(\frac{6}{4{,}2}\right)}{\log(7{,}22)}\,;+\infty\right[$.

54 **C**

55 $u_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \times 200$.

$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \times 200 < 4$ équivaut à $n > \dfrac{\log\left(\frac{4}{200}\right)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}$.

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 22$.
Le premier terme de la suite qui est strictement inférieur à 4 est u_{22}.

56 $t_n = 1{,}01^n \times 1\,000$.

$1{,}01^n \times 1\,000 > 1\,300$ équivaut à $n > \dfrac{\log\left(\frac{1\,300}{1\,000}\right)}{\log(1{,}01)}$.

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 27$.
Le premier terme de la suite qui est strictement supérieur à 1 300 est u_{27}.

57 $v_n = 0{,}92^n \times 5$.

$0{,}92^n \times 5 < 0{,}5$ équivaut à $n > \dfrac{\log\left(\frac{0{,}5}{5}\right)}{\log(0{,}92)}$.

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 28$.
Le premier terme de la suite qui est strictement inférieur à 0,5 est u_{28}.

58 **C**

59 $v_n = 0{,}45^{n-1} \times 8$.

$0{,}45^{n-1} \times 8 < 0{,}001$ équivaut à $n - 1 > \dfrac{\log\left(\frac{0{,}001}{8}\right)}{\log(0{,}45)}$.

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 13$.
Le premier terme de la suite qui est strictement inférieur à 0,001 est u_{13}.

60 $p_n = 1{,}15^{n-1}$.

$1{,}15^{n-1} > 1\,080$ équivaut à $n - 1 > \dfrac{\log(1\,080)}{\log(1{,}15)}$.

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 51$.
Le premier terme de la suite qui est strictement supérieur à 1 080 est u_{51}.

61 $u_n = 0{,}7^{n-1} \times 300$.

$0{,}7^{n-1} \times 300 < \dfrac{1}{4}$ équivaut à $n - 1 > \dfrac{\log\left(\frac{\frac{1}{4}}{300}\right)}{\log(0{,}7)}$.

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 21$.
Le premier terme de la suite qui est strictement inférieur à $\dfrac{1}{4}$ est u_{21}.

Je fais le point

Savez-vous simplifier l'écriture d'un nombre avec exposants réels ?

Énoncé 1

a) $3{,}4^{\frac{1}{3}} \times 3{,}4^{-\frac{7}{3}} = 3{,}4^{-\frac{6}{3}} = 3{,}4^{-2}$;

b) $1{,}5^{0{,}6} \times 6^{0{,}6} = (1{,}5 \times 6)^{0{,}6} = 9^{0{,}6}$;

c) $(4{,}57^{0{,}65})^6 = 4{,}57^{0{,}65\times 6} = 4{,}57^{3{,}9}$;

d) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}2}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{0{,}2}} = \left(\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}\right)^{0{,}2} = \left(\dfrac{1}{3} \times \dfrac{6}{5}\right)^{0{,}2} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{0{,}2}$;

e) $\dfrac{0{,}25^{2{,}45}}{0{,}25^{5{,}45}} = 0{,}25^{2{,}45-5{,}45} = 0{,}25^{-3}$.

Énoncé 2

a) $2{,}1^{\frac{1}{2}} \times 2{,}1^{-\frac{3}{2}} = 2{,}1^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = 2{,}1^{-\frac{2}{2}} = 2{,}1^{-1}$;

b) $3{,}2^{-0{,}4} \times 2^{-0{,}4} = (3{,}2 \times 2)^{-0{,}4} = 6{,}4^{-0{,}4}$;

c) $(0{,}9^{0{,}2})^8 = 0{,}9^{0{,}2\times 8} = 0{,}9^{1{,}6}$;

d) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\left(\frac{7}{2}\right)^3} = \left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{7}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{7}\right)^3$;

e) $\dfrac{1{,}4^{1{,}5}}{1{,}4^{0{,}5}} = 1{,}4^{1{,}5-0{,}5} = 1{,}4$.

Savez-vous résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $a^x < a^b$ (ou $a^x > a^b$), où $a > 0$?

Énoncé 1

a) Puisque $0 < 0{,}725 < 1$, la fonction $x \mapsto 0{,}725^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc $0{,}725^x < 0{,}725^{27{,}3}$ équivaut à $x > 27{,}3$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]27{,}3\,;+\infty[$.

b) Puisque 19,3 > 1, la fonction $x \mapsto 19{,}3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $19{,}3^x < 19{,}3^{0{,}3}$ équivaut à $x < 0{,}3$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $19{,}3^x < 19{,}3^{0{,}3}$ est $]-\infty\,;0{,}3[$.

Énoncé 2

a) L'ensemble des solutions de l'inéquation $4{,}72^x < 4{,}72^{7{,}1}$ est $]-\infty\,;7{,}1[$.
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $0{,}64^x < 0{,}64^{-3{,}18}$ est $]-3{,}18\,;+\infty[$.

Savez-vous simplifier l'écriture d'un nombre du type log(10^x) ?

Énoncé 1

a) $\log(10^{0{,}41}) = 0{,}41$.
b) $\log(0{,}1) = \log(10^{-1}) = -1$.

Énoncé 2

a) $\log(10^{-5{,}2}) = -5{,}2$.
b) $\log(1\,000) = 3$.

Savez-vous transformer l'écriture d'un nombre où figure le logarithme décimal ?

Énoncé 1

a) $\log(49) = \log(7^2) = 2\log(7)$.
b) $\log(350) = \log(10 \times 35) = \log(10) + \log(35) = 1 + \log(5 \times 7) = 1 + \log(5) + \log(7)$.

Énoncé 2

a) $\log(700) = 2 + \log(7)$.
b) $\log(121) = 2\log(11)$.

Savez-vous résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $a^x = b$, où $a > 0$ et $b > 0$, $a \neq 1$?

Énoncé 1

a) $1{,}35^x = 5{,}2$ a pour solution $\dfrac{\log(5{,}2)}{\log(1{,}35)} \approx 5{,}49$.

b) $0{,}7^x = 2{,}5$ a pour solution $\dfrac{\log(2{,}5)}{\log(0{,}7)} \approx -2{,}57$.

Énoncé 2

a) $5{,}32^x = 14$ a pour solution $\dfrac{\log(14)}{\log(5{,}32)} \approx 1{,}58$.

b) $0{,}38^x = 7{,}3$ a pour solution $\dfrac{\log(7{,}3)}{\log(0{,}38)} \approx -2{,}05$.

Savez-vous résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $a^x < b$ (ou $a^x > b$), où $a > 0$ et $b > 0$, $a \neq 1$?

Énoncé 1

a) $0{,}55^x < 0{,}000\,3$ équivaut successivement à $\log(0{,}55^x) < \log(0{,}000\,3)$; $x\log(0{,}55) < \log(0{,}000\,3)$; $x > \dfrac{\log(0{,}000\,3)}{\log(0{,}55)}$ (on change le sens de l'inégalité, car $\log(0{,}55) < 0$).
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]\dfrac{\log(0{,}000\,3)}{\log(0{,}55)}\,;+\infty\right[$.

b) $2{,}46^x > 8\,200$ équivaut successivement à $\log(2{,}46^x) > \log(8\,200)$; $x\log(2{,}46) > \log(8\,200)$; $x > \dfrac{\log(8\,200)}{\log(2{,}46)}$ (on ne change pas le sens de l'inégalité, car $\log(2{,}46) > 0$).
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]\dfrac{\log(8\,200)}{\log(2{,}46)}\,;+\infty\right[$.

Énoncé 2

a) L'ensemble des solutions de l'inéquation $1{,}7^x < 0{,}1$ est $\left]-\infty\,;\dfrac{-1}{\log(1{,}7)}\right[$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $0{,}4^x > 100$ est $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{\log(0{,}4)}\right[$.

Activités guidées

62 **AG1** **1. a)** Les ordonnées des points de la courbe, d'abscisses 0, 1, 2, …, sont respectivement $1{,}3^0 = 1 = u_0$, $1{,}3^1 = 1 \times 1{,}3^1 = u_1$, $1{,}3^2 = 1 \times 1{,}3^2 = u_2$, …
b) On a vu page 12 du manuel élève : **2. Cas des suites géométriques**, que lorsque la raison d'une suite géométrique est strictement supérieure à 1, la suite croît de façon exponentielle. Cette expression s'explique par le fait que les termes de la suite sont des images des réels 0, 1, 2, … par la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$, avec $a = 1{,}3$, et que lorsque $a > 1$, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Les ordonnées des points de la courbe, d'abscisses 0, 1, 2, …, sont respectivement $0{,}9^0 = 1 = u_0$, $0{,}9^1 = 1 \times 10{,}9^1 = u_1$, $0{,}9^2 = 1 \times 0{,}9^2 = u_2$, …

b) Lorsque la raison d'une suite géométrique est strictement inférieure à 1, la suite décroît de façon exponentielle. Cette expression s'explique par le fait que les termes de la suite sont des images des réels 0, 1, 2, … par la fonction exponentielle $x \mapsto a^x$, avec $a = 0{,}9$, et que lorsque $a < 1$, la fonction exponentielle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

63 **AG2** **2. b)** Entrer la formule `=B1^(–D1)` dans la cellule B4, la formule `=1/B1^D1` dans la cellule D4 et la formule `=B4–D4` dans la cellule F4.

64 **AG3** **1.** $p_{n+1} = 1{,}04p_n$; la suite (p_n) est géométrique, de raison 1,04 et de terme initial $p_0 = 12\,000$.
$q_{n+1} = 1{,}03q_n$; la suite (q_n) est géométrique, de raison 1,03 et de terme initial $q_0 = 15\,000$.

2. $p_n = (1{,}04)^n \times 12\,000$; $q_n = (1{,}03)^n \times 15\,000$.

3. $p_n > q_n$ équivaut à $(1{,}04)^n \times 12\,000 > (1{,}03)^n \times 15\,000$.

$p_n > q_n$ équivaut à $\dfrac{(1{,}04)^n}{(1{,}03)^n} > \dfrac{15\,000}{12\,000}$.

D'où : $p_n > q_n$ équivaut à $\left(\dfrac{1{,}04}{1{,}03}\right)^n > \dfrac{5}{4}$.

4. $\left(\dfrac{1{,}04}{1{,}03}\right)^n > \dfrac{5}{4}$ équivaut à $n > \dfrac{\log\left(\frac{5}{4}\right)}{\log\left(\frac{1{,}04}{1{,}03}\right)}$

(car $\dfrac{1{,}04}{1{,}03} > 1$).

Le plus petit entier qui vérifie l'inégalité est $n = 24$, qui correspond à l'année 2027.

65 **AG4** **3. a)** On constate que les valeurs des colonnes E et F sont égales, donc on conjecture que la suite (v_n) est arithmétique, de raison $\log(b)$.

b) La suite (u_n) est géométrique, de terme initial u_0 et de raison b, donc $u_{n+1} = bu_n$.
Par définition de la suite (v_n), $v_{n+1} = \log(u_{n+1})$, donc $v_{n+1} = \log(bu_n) = \log(b) + \log(u_n) = \log(b) + v_n$.
On a bien démontré que la suite (v_n) est arithmétique, de raison $\log(b)$.

66 **AG5** **1. a)** Le pH de l'eau pure est 7. La concentration en ions H_3O^+ de l'eau pure est 10^{-7} mol·L^{-1}.

b) Notons p le pH de la limonade. On a $p < 7$, donc $-p > -7$.
Puisque $10 > 1$, la fonction $x \mapsto 10^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $10^{-p} > 10^{-7}$.
La concentration en ions H_3O^+ de la limonade est donc supérieure à celle de l'eau.

2. a) Par définition, $[H_3O^+] = 10^{-\text{pH}}$, donc $\log([H_3O^+]) = \log(10^{-\text{pH}}) = -\text{pH}$.

b) On en déduit que le pH de l'eau de mer est $-\log(3{,}1 \times 10^{-9}) \approx 8{,}5$.

67 **AG6** **1.** Le niveau sonore atteint par la voix humaine est :
$d(I) = 10(\log(10^6 I_0) - \log(I_0)) = 10(\log(10^6) + \log(I_0) - \log(I_0)) = 10 \times 6 = 60$.

2.

	$I =$	Niveau sonore, en dB
Fusée	$10^{17}\ I_0$	170
Avion	$10^{12}\ I_0$	120
F1	$10^{13}\ I_0$	130
Concert	$10^{11}\ I_0$	110
Balladeur max	$10^{10}\ I_0$	100
Moto	$10^{9}\ I_0$	90
Auto	$10^{8}\ I_0$	80
Aspirateur	$10^{7}\ I_0$	70
Rue calme	$10^{4}\ I_0$	40
Vent	$10\ I_0$	10

3. a) $d(I_2) - d(I_1) = 10(\log(I_2) - \log(I_0)) - 10(\log(I_1) - \log(I_0)) = 10(\log(I_2) - \log(I_1))$.

b) $d(I_2) - d(I_1) = 10(\log(I_2) - \log(I_1)) = 10(\log(10I_1) - \log(I_1)) = 10(\log(10) + \log(I_1) - \log(I_1)) = 10 \times 1 = 10$.

c) Le niveau sonore, en décibels, obtenu par le candidat A est $d(I_1) = 95$.
Le niveau sonore, en décibels, obtenu par le candidat B est $d(I_2)$ tel que $I_2 = 10 \times I_1$.
D'après le résultat précédent, $d(I_2) = d(I_1) + 10 = 95 + 10 = 105$.

68 **AG7** **1. a)** $\dfrac{N(1) - N(0)}{N(0)} = \dfrac{N_0 \times 0{,}886 - N_0}{N_0}$

$= -0{,}114 = -11{,}4\,\%$.
Le nombre de noyaux a diminué de 11,4 % au cours des mille premières années.

b) $N(t) \leqslant 0{,}5N_0$ équivaut à $0{,}886^t \leqslant 0{,}5$, c'est-à-dire à $t \geqslant \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}886)}$ (car $\log(0{,}886) < 0$).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log(0,5)}{\log(0,886)}\,;+\infty\right[$.

Or, $\dfrac{\log(0,5)}{\log(0,886)} = 5,726\ldots$, donc la demi-vie du carbone 14 est environ 5 730 ans.

2. a) $\dfrac{N(1)-N(0)}{N(0)} = \dfrac{N_0 \times 0,891 - N_0}{N_0}$

$= -0,109$

$= -10,9\,\%$.

Le nombre de noyaux a diminué de 10,9 % au cours de la première heure.

b) $N(t) \leqslant 0,5N_0$ équivaut à $0,891^t \leqslant 0,5$, c'est-à-dire à $t \geqslant \dfrac{\log(0,5)}{\log(0,891)}$ (car $\log(0,891) < 0$).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log(0,5)}{\log(0,891)}\,;+\infty\right[$.

Or, $\dfrac{\log(0,5)}{\log(0,891)} = 6,005\ldots$, donc la demi-vie du carbone 14 est environ 6 heures.

Problèmes

69 **1. a)** $x \approx -2,2$.

b) $f(x) = 1$ équivaut à $1,2^x \times 1,5 = 1$, c'est-à-dire $1,2^x = \dfrac{2}{3}$.

La solution est $\dfrac{\log\left(\frac{2}{3}\right)}{\log(1,2)} \approx -2,2$.

2. a) $x \approx 1,8$.

b) $1,2^x \times 1,5 = 1,5^x$ équivaut successivement à

$1,2^x = \dfrac{1,5^x}{1,5}$;

$1,2^x = 1,5^{x-1}$;

$x \log(1,2) = (x-1)\log(1,5)$.

La solution est $\dfrac{-\log(1,5)}{\log(1,2)-\log(1,5)} \approx 1,8$.

c) $f(x) > g(x)$ équivaut successivement à $1,2^x > 1,5^{x-1}$;

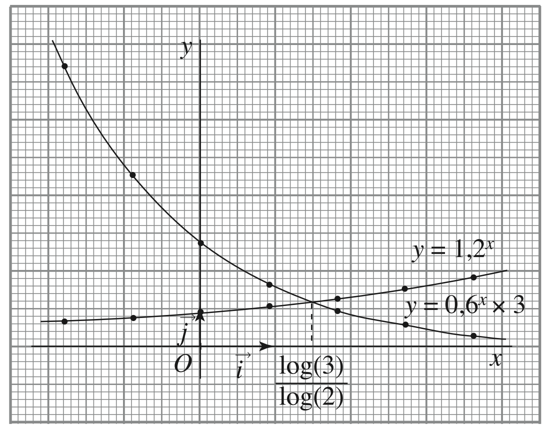
$x\log(1,2) > (x-1)\log(1,5)$;

$x[\log(1,2) - \log(1,5)] > -\log(1,5)$;

$x < \dfrac{-\log(1,5)}{\log(1,2)-\log(1,5)}$ (car $\log(1,2) - \log(1,5) < 0$).

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[-3\,;\dfrac{-\log(1,5)}{\log(1,2)-\log(1,5)}\right[$.

70 **1.**



2. a) $x \approx 0,8$.

b) $0,6^x \times 3 = 2$ équivaut à $0,6^x = \dfrac{2}{3}$;

La solution est $\dfrac{\log\left(\frac{2}{3}\right)}{\log(0,6)} \approx 0,79$.

3. a) $x \approx 1,6$.

b) $0,6^x \times 3 = 1,2^x$ équivaut à $\left(\dfrac{1,2}{0,6}\right)^x = 3$, c'est-à-dire à $2^x = 3$.

La solution est $\dfrac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,58$.

c) $0,6^x \times 3 < 1,2^x$ équivaut successivement à $\left(\dfrac{1,2}{0,6}\right)^x > 3$ (car, pour tout réel x, $0,6^x > 0$) ;

$2^x > 3$; $x > \dfrac{\log(3)}{\log(2)}$.

L'ensemble des solutions est $\left]\dfrac{\log(3)}{\log(2)}\,;+\infty\right[$.

71 **1.** Le premier terme de la suite (u_n) qui est inférieur à 2 000 est u_9.

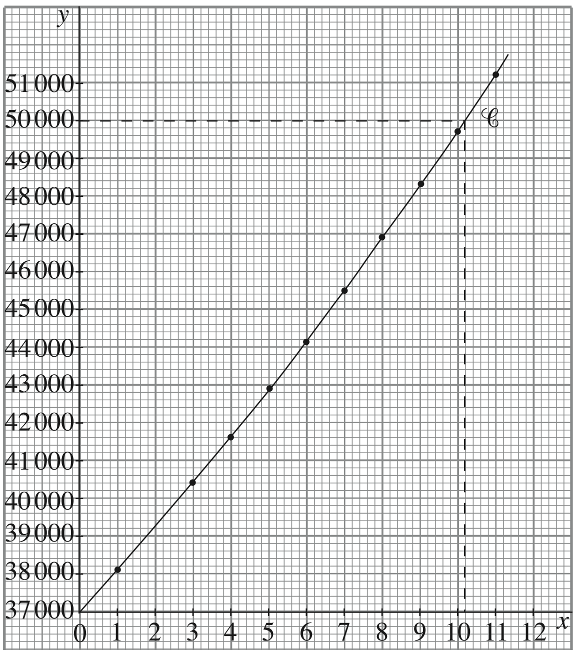
2. Le premier terme de la suite (u_n) qui est supérieur à 10 000 est u_5.

72 **1. a)** $p_1 = 38\,110$; $p_2 \approx 39\,253$; $p_3 \approx 40\,431$.

b) La population s'accroît de 3 % par an, elle est donc multipliée par 1,03 chaque année. On en déduit que la suite (p_n) est géométrique, de raison 1,03 et de terme initial $p_0 = 37\,000$.

c) $p_n = 1,03^n \times 37\,000$.

2.



3. Il faut 11 ans pour que la population dépasse 50 000 habitants.

4. $1{,}03^n \times 37\,000 > 50\,000$ équivaut à $1{,}03^n > \frac{50}{37}$,

c'est-à-dire à $n > \frac{\log\left(\frac{50}{37}\right)}{\log(1{,}03)}$. Or $\frac{\log\left(\frac{50}{37}\right)}{\log(1{,}03)} \approx 10{,}19$;

on retrouve donc le résultat du **3.**.

$\boxed{73}$ **1. a)** $v_1 = 40\,000$; $v_2 = 32\,000$; $v_3 = 25\,600$.

b) Le prix de la machine diminue de 20 % par an, il est donc multiplié par 0,8 chaque année. La suite (v_n) est géométrique, de raison 0,8 et de terme initial $v_0 = 50\,000$.

c) $v_n = 0{,}8^n \times 50\,000$.

2. Il faut onze années pour que la valeur de la machine devienne inférieure à 5 000.

3. $0{,}8^n \times 50\,000 < 5\,000$ équivaut à $0{,}8^n < 0{,}1$,

c'est-à-dire à $n > \frac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}8)}$. Or $\frac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}8)} \approx 10{,}32$;

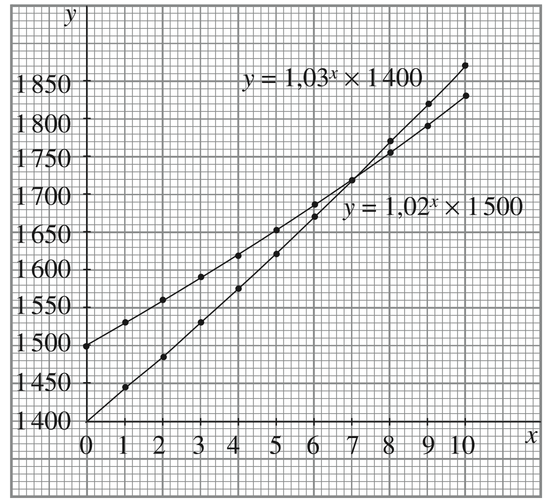
on retrouve donc le résultat du **2.**.

$\boxed{74}$ **1. a)** Pour le contrat A, le salaire mensuel augmente de 2 % chaque année, il est donc multiplié par 1,02. On en déduit que la suite (u_n) est géométrique, de raison 1,02 et de terme initial $u_0 = 1\,500$.

Pour le contrat B, le salaire mensuel augmente de 3 % chaque année, il est donc multiplié par 1,03. On en déduit que la suite (v_n) est géométrique, de raison 1,03 et de terme initial $v_0 = 1\,400$.

b) $u_n = 1{,}02^n \times 1\,500$; $v_n = 1{,}03^n \times 1\,400$.

2.



3. Le salaire mensuel du contrat B devient supérieur au salaire mensuel du contrat A à partir de l'année (2005 + 8), soit 2013.

4. $1{,}02^n \times 1\,500 < 1{,}03^n \times 1\,400$ équivaut à $\left(\frac{1{,}02}{1{,}03}\right)^n < \frac{14}{15}$,

c'est-à-dire à $n > \frac{\log\left(\frac{14}{15}\right)}{\log\left(\frac{1{,}02}{1{,}03}\right)}$. Or $\frac{\log\left(\frac{14}{15}\right)}{\log\left(\frac{1{,}02}{1{,}03}\right)} \approx 7{,}07$;

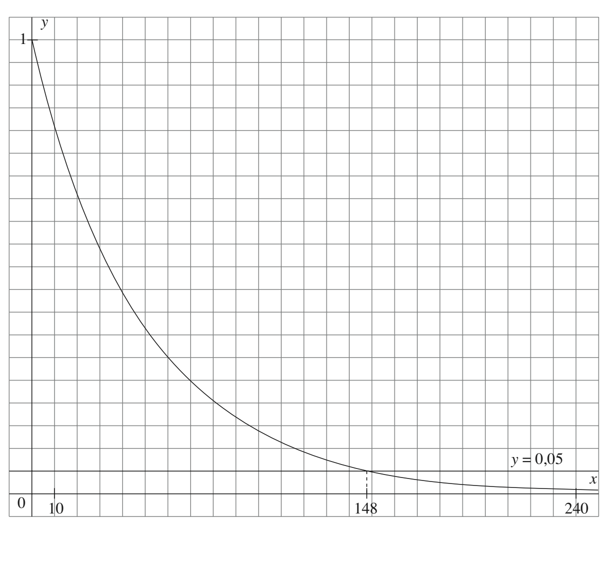
on retrouve donc le résultat du **3.**.

$\boxed{75}$ **1.** $N(0) = 0{,}98^0 = 1$, donc il y a un million de germes au début de la pasteurisation.

2. a) $0{,}98 < 1$, donc la fonction exponentielle N est strictement décroissante sur [0 ; 240].

On en déduit que le nombre de germes diminue pendant la pasteurisation.

b)



3. a) $N(t) \leqslant 0{,}05$ équivaut à $0{,}98^t \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire à $t \geqslant \dfrac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}98)}$ (car $\log(0{,}98) < 0$).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}98)}\,;\,240\right]$, avec $\dfrac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}98)} \approx 148$.

On constate graphiquement que la courbe représentative de la fonction N est au-dessous de la droite d'équation $y = 0{,}05$ lorsque x est supérieur à environ 148.

b) On en déduit que le nombre de germes devient inférieur à 50 000 au bout d'environ 148 secondes.

76 **1.** L'aire du cercle est $A = \pi r^2$, donc $r^2 = \dfrac{A}{\pi}$.

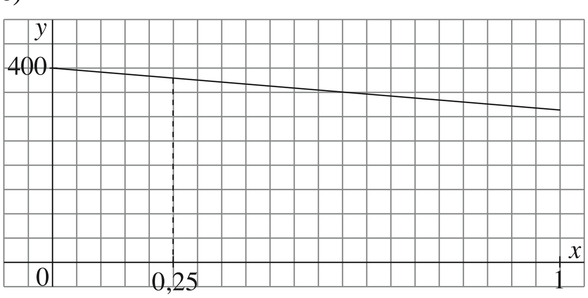
2. a) $r^2 = \dfrac{8 \times 10}{\pi}$, donc la diminution, en décibels, du niveau sonore est $D = 20\log\left(1 + \dfrac{\frac{80}{\pi}}{5}\right) \approx 15{,}7$.

b) Pour $L = 10$, on obtient $D \approx 11{,}0$.

77 **1. a)** $0{,}82 < 1$, donc la fonction exponentielle g est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.

b) $f = kg$, avec $k = 400 > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.

c)



2. a) L'intensité du faisceau émergent, exprimée en candelas, est $I = 400 \times 0{,}82^{0{,}25} \approx 381$.

On constate graphiquement que le point de la courbe d'abscisse 0,25 a une ordonnée qui peut être à peu près égale à 381.

b) L'équation $400 \times 0{,}82^x = 350$ a une seule solution : $\dfrac{\log(0{,}875)}{\log(0{,}82)} \approx 0{,}67$.

c) D'après le résultat précédent, l'épaisseur du filtre à placer pour que l'intensité du faisceau émergent soit 350 candelas est, à 0,01 cm près, 0,67 cm.

78 **1. a)** La concentration initiale, exprimée en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, est $C(0) = 0{,}1 \times 0{,}99^0 = 0{,}1$.

b) L'équation $C(t) = 0{,}05$ équivaut à $0{,}1 \times 0{,}99^t = 0{,}05$.

Elle a pour solution $\dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}99)} \approx 69$.

c) La moitié de la concentration initiale est $\dfrac{1}{2} \times 0{,}1 = 0{,}05$, donc, d'après le résultat précédent, le temps de demi-réaction est environ 69 minutes.

2. a) $C(t) \leqslant 0{,}01$ équivaut à $0{,}1 \times 0{,}99^t \leqslant 0{,}01$, c'est-à-dire à $t \geqslant \dfrac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}99)}$ (car $\log(0{,}99) < 0$).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}99)}\,;\,1\,000\right]$, avec $\dfrac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}99)} \approx 229$.

b) $10\,\% \times 0{,}1 = 0{,}01$, donc, d'après le résultat précédent, l'instant (en minutes) à partir duquel la concentration devient inférieure à 10 % de la concentration initiale est environ 229.

79 **Partie A**

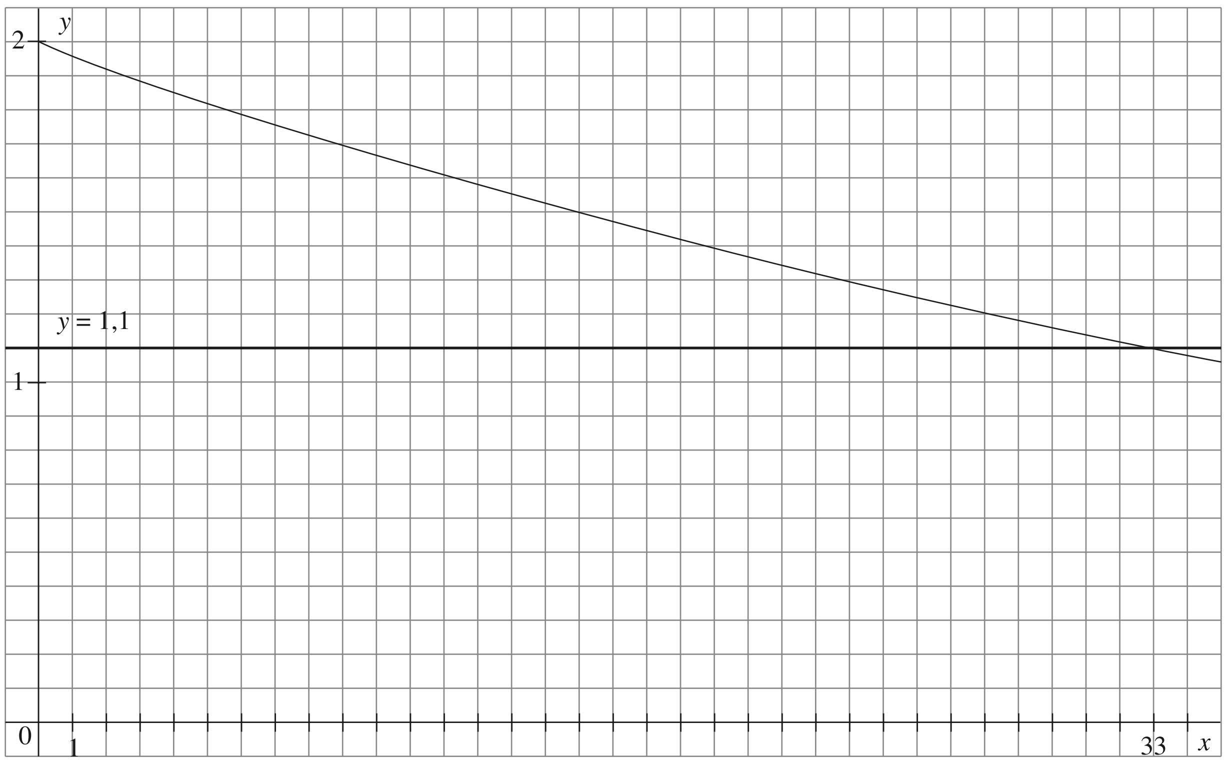
1. a) $0{,}982 < 1$, donc, la fonction exponentielle g est strictement décroissante sur $[0\,;\,50]$.

b) $f = kg$ avec $k = 2 > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,50]$.

2. a)

t	0	2	5	8	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(t)$	2	1,93	1,83	1,73	1,67	1,52	1,39	1,27	1,16	1,06	0,97	0,88	0,81

b)



3. a) L'équation $f(t) = 1{,}1$ équivaut à $2 \times 0{,}982^t = 1{,}1$.

Elle a pour solution $\dfrac{\log(0{,}55)}{\log(0{,}982)} \approx 33$.

b) $f(t) \leqslant 1{,}1$ équivaut à $2 \times 0{,}982^t \leqslant 1{,}1$, c'est-à-dire à $t > \dfrac{\log(0{,}55)}{\log(0{,}982)}$ (car $\log(0{,}982) < 0$).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[\dfrac{\log(0{,}55)}{\log(0{,}982)}\,;\,50\right]$.

Partie B

D'après les résultats précédents, le taux de glycémie du patient devient normal au bout de 33 minutes environ.

80 **2. a)** La température est égale à 10 °C au bout d'environ 3 heures.

b) Le temps nécessaire pour que la température baisse de 10 °C à 5 °C est environ 6,3 – 3 = 3,3 heures.

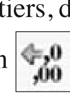
81 **1.** $\dfrac{Q(1) - Q(0)}{Q(0)} = -30\,\%$, donc $\dfrac{1{,}8a - 1{,}8}{1{,}8} = -0{,}3$ d'où $a - 1 = -0{,}3$, soit $a = 0{,}7$.

2. Le temps au bout duquel la quantité de médicament a été réduite de moitié est solution de l'équation $1{,}8 \times 0{,}7^t = 0{,}9$, c'est-à-dire de l'équation $t = \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}7)}$.

Or, $\dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}7)} = 1{,}94\ldots$, donc c'est au bout de 2 heures environ que la quantité de médicament a été réduite de moitié.

Tableur sur papier

1. a) Les valeurs de $g(t)$ affichées dans la colonne C sont des nombres entiers, donc les décimales sont 00.

b) Utiliser le bouton  ou le bouton 

2. a) On entre 0 dans la cellule A2, $\boxed{\text{=A2+1}}$ dans la cellule A3 et on recopie vers le bas jusqu'à la cellule A14.

b) On a entré les formules $\boxed{\text{=3*1,5\^{}A2}}$ dans B2 et $\boxed{\text{=5*A2+35}}$ dans C2.

On obtient $\boxed{\text{=3*1,5\^{}A10}}$ dans B10 et $\boxed{\text{=5*A10+35}}$ dans C10.

c) On a entré $\boxed{\text{=B2–C2}}$ dans D2. On obtient $\boxed{\text{=B14–C14}}$ dans D14.

3. a) 8 heures.

b) Lignes 9 et 10.

4. a) 10 heures.

b) $t = \dfrac{\log\left(\dfrac{173}{3}\right)}{\log(1{,}5)} \approx 10{,}00$.