Chapitre 1.
Suites

Le programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites arithmétiques, **Suites géométriques** Croissance et décroissance Somme de *n* termes consécutifs	Dans le cadre de résolution de problèmes, comparer deux suites géométriques, une suite géométrique et une suite arithmétique.	La démonstration de la formule donnant la somme de *n* termes consécutifs d'une suite arithmétique est l'occasion de la mise en place d'un raisonnement déductif. Pour les suites géométriques, on se limite aux suites à termes positifs. Les formules, pour les sommes de termes de suite arithmétique ou géométrique, ne sont pas exigibles et devront être rappelées dans tout exercice d'évaluation.

Nos objectifs

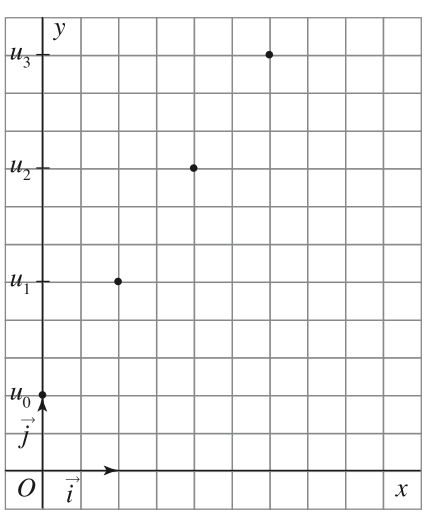
Comme il est préconisé dans le programme, nous avons traité la comparaison des suites dans le cadre d'activités guidées et de problèmes pour lesquels l'utilisation de la calculatrice ou du tableur est indispensable.

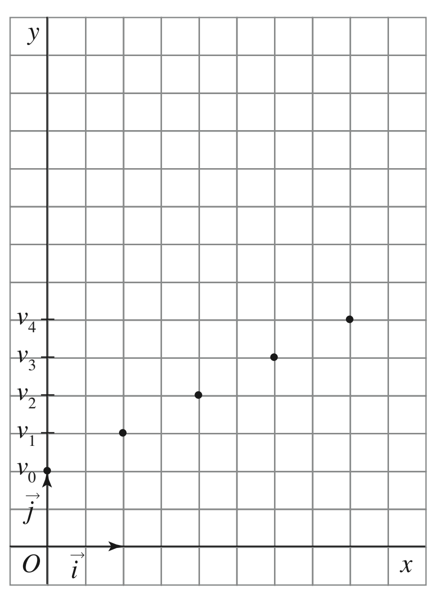
Activités et applications

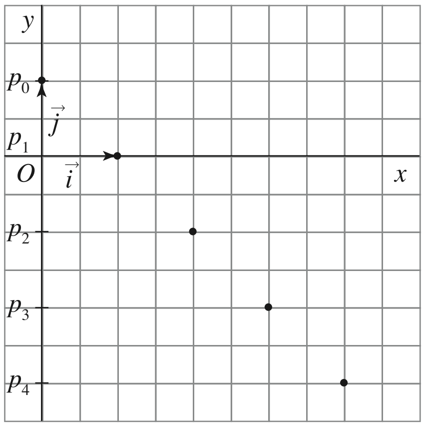
1. Sens de variation des suites arithmétiques ou géométriques

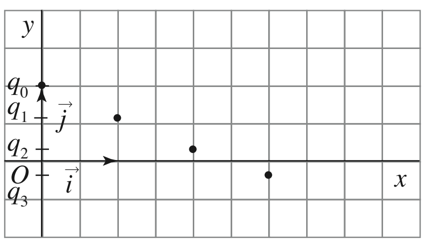
Activité

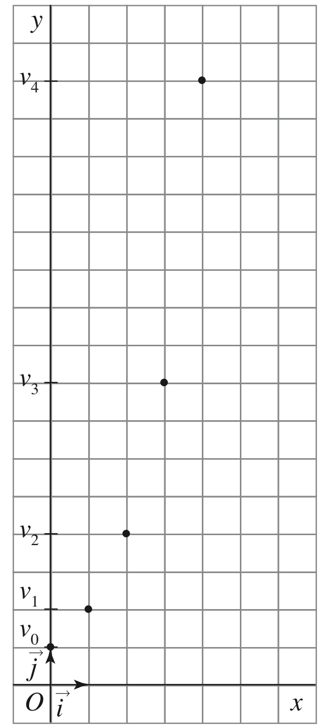
1.





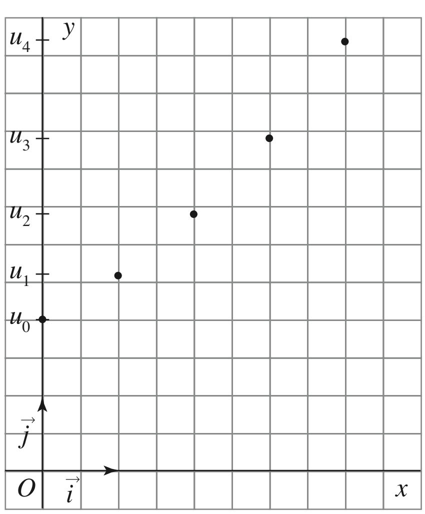


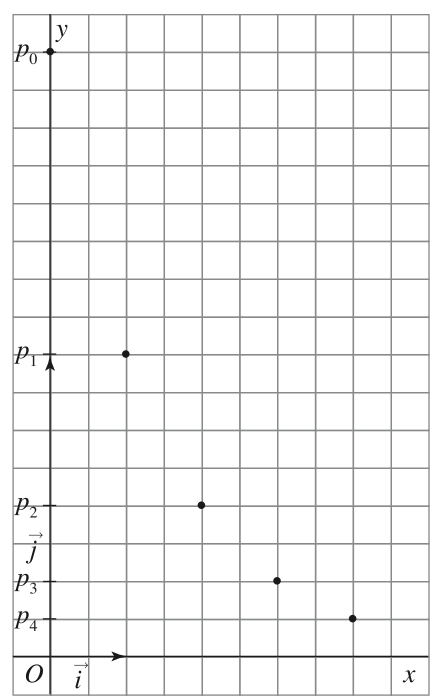


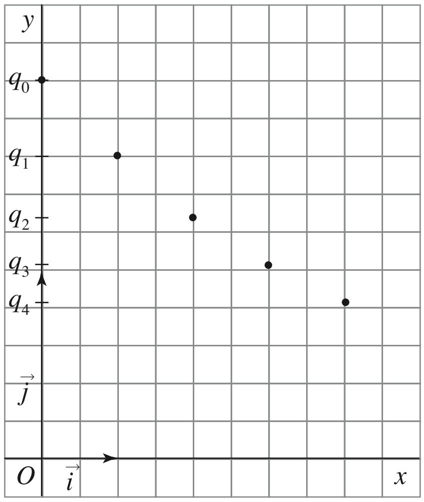


Lorsque la raison est positive, les points sont situés sur une droite qui « monte » et la suite est strictement croissante.
Lorsque la raison est négative, les points sont situés sur une droite qui « descend » et la suite est strictement décroissante.

2.







Lorsque la raison est strictement supérieure à 1, les points sont situés sur une courbe qui « monte » et la suite est strictement croissante.
Lorsque la raison est strictement comprise entre 0 et 1, les points sont situés sur une courbe qui « descend » et la suite est strictement décroissante.

Application 1

a) Puisque la droite Δ « monte », la suite (u_n) est strictement croissante.
b) Puisque $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Application 2

a) Puisque la courbe exponentielle Γ « descend », la suite (u_n) est strictement décroissante.
b) Puisque $0 < b < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Activité

1. Le coureur cycliste augmente son parcours de 10 km chaque jour, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 10. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_1 + 10\,(n - 1)$, soit $u_n = 50 + 10n$.
2. a) $u_2 = 70$; $u_3 = 80$; $u_4 = 90$; $u_5 = 100$; $u_6 = 110$; $u_7 = 120$.
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110 + 120 = 630$.
Le cycliste a donc parcouru 630 km pendant la première semaine.

$$S_1 = 7 \times \frac{u_1 + u_7}{2} = 7 \times \frac{60 + 120}{2} = 7 \times \frac{180}{2} = 630.$$

On constate que $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$.

b) $u_8 = 130$; $u_9 = 140$; $u_{10} = 150$; $u_{11} = 160$; $u_{12} = 170$; $u_{13} = 180$; $u_{14} = 190$.
$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}$
$= 130 + 140 + 150 + 160 + 170 + 180 + 190 = 1\,120$.
Le cycliste a donc parcouru 1 120 km pendant la deuxième semaine.

$$S_2 = 7 \times \frac{u_8 + u_{14}}{2} = 7 \times \frac{130 + 190}{2} = 7 \times \frac{320}{2} = 1\,120.$$

On constate que $S_2 = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14}$.

Application 1

Le nombre d'objets fabriqués en dix ans correspond à la somme des dix premiers termes de la suite, soit $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$.
On calcule $u_{10} = 200 + (10 - 1) \times 25 = 425$.
En appliquant le résultat du cours :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$

$$= 10 \times \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 10 \times \frac{200 + 425}{2} = 3\,125.$$

Le nombre d'objets fabriqués en dix ans est 3 125.

Application 2

La somme totale versée la première année correspond à la somme des douze premiers termes de la suite, soit
$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11}$.
On calcule $u_{11} = 40 + 11 \times 5 = 95$.
En appliquant le résultat du cours :
$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11}$

$$= (11 + 1) \times \frac{u_0 + u_{11}}{2} = 12 \times \frac{40 + 95}{2} = 810.$$

La somme totale versée la première année est 810 €.

3. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Activité

1. La vente des boîtes double chaque jour, donc la suite est géométrique, de raison 2.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 20 \times 2^{\,n-1}$.
2. a) $u_2 = 40$; $u_3 = 80$; $u_4 = 160$; $u_5 = 320$; $u_6 = 640$.
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$
$= 20 + 40 + 80 + 160 + 320 + 640 = 1\,260$.
Il a été vendu 1 260 boîtes de ce médicament au cours de cette période.

$$S_1 = 20 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 20 \times \frac{-63}{-1} = 1\,260.$$

On constate que $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$.

b) Le nombre de boîtes vendues durant les trois derniers jours de cette période correspond à la somme $u_4 + u_5 + u_6 = 160 + 320 + 640 = 1\,120$.

$S_2 = 160 \times \dfrac{1 - 2^3}{1 - 2} = 160 \times \dfrac{-7}{-1} = 1\,120.$

On constate que $S_2 = u_4 + u_5 + u_6$.

Application 1

Le montant total des salaires perçus sur les deux ans correspond à la somme des vingt-quatre premiers termes de la suite, soit $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{24}$.

En appliquant le résultat du cours :

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{24} = u_1 \dfrac{1 - b^{24}}{1 - b}$$
$$= 1\,500 \times \dfrac{1 - 1{,}004^{24}}{1 - 1{,}004}$$
$$\approx 37\,705{,}61.$$

Le montant total des salaires perçus sur les deux ans est à peu près 37 706 €.

Application 2

Le montant total de sa dépense pour les six années de 2002 à 2007 correspond à la somme des six premiers termes de la suite, soit $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.

En appliquant le résultat du cours :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = u_0 \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$
$$= 1\,200 \times \dfrac{1 - 1{,}03^6}{1 - 1{,}03}$$
$$\approx 7\,762 \text{ €}.$$

Le montant total de la dépense pour les six années est à peu près 7 762 €.

Exercices d'entraînement

C *indique que l'exercice est corrigé dans le livre élève.*

1 **C**

2 $u_9 = 7 + 9 \times 0{,}2 = 8{,}8$; $u_{17} = 7 + 17 \times 0{,}2 = 10{,}4$.

3 **C**

4 Soit a la raison de la suite arithmétique (u_n).
$u_8 = u_0 + 8a$, donc $8a = u_8 - u_0 = -9{,}40$, d'où $a = \dfrac{-9{,}4}{8} = -1{,}175$.

5 $w_4 = w_0 + 5 \times (-3)$, donc $w_0 = 5 + 15 = 20$.

6 **C**

7 $v_6 = v_1 + (6 - 1) \times 4 = -1{,}5 + 5 \times 4 = 18{,}5$;
$v_{11} = v_1 + (11 - 1) \times 4 = -1{,}5 + 10 \times 4 = 38{,}5$.

8 **C**

9 Soit a la raison de la suite arithmétique (v_n).
$v_{11} = v_1 + (11 - 1)a = v_1 + 10a$, donc
$10a = v_{11} - v_1 = 22$, d'où $a = 2{,}2$.

10 $u_{11} = u_1 + (11 - 1) \times 1{,}2$, donc $u_{11} = u_1 + 12$, d'où $u_1 = u_{11} - 12 = 14 - 12 = 2$.

11 *Exercice résolu dans le livre élève.*

12 **C**

13 Le montant de la location d'un vélo augmente d'un euro chaque heure après la première heure, donc la suite (u_n) est la suite arithmétique de raison 1 et de terme initial $u_1 = 0{,}5$.

14 **C**

15 $v_6 = 0{,}6^6 v_0 = 0{,}6^6 \times 10 \approx 0{,}47$;
$v_{10} = 0{,}6^{10} \times v_0 = 0{,}6^{10} \times 10 \approx 0{,}06$.

16 **C**

17 Soit b la raison de la suite géométrique (u_n).
$u_{11} = b\, u_{10}$, soit $0{,}15 = b \times 15$, d'où $b = 0{,}01$.

18 $w_8 = 2^8 w_0$, donc $768 = 256 w_0$, d'où $w_0 = 3$.

19 **C**

20 $v_7 = 1{,}02^{7-1} \times 100 \approx 112{,}62$;
$v_{16} = 1{,}02^{16-1} \times 100 \approx 134{,}59$.

21 $v_6 = 0{,}5^{6-1} v_1$, soit $0{,}187\,5 = 0{,}5^5 v_1$, d'où $v_1 = \dfrac{0{,}187\,5}{0{,}031\,25} = 6$.

22 *Exercice résolu dans le livre élève.*

23 **C**

24 La population baisse de 5 % par an, son effectif est donc multiplié par 0,95.

On en déduit que la suite (p_n) est géométrique, de raison 0,95 et de terme initial $p_0 = 30\,000$.

25 La pression atmosphérique diminue régulièrement de 1 % lorsqu'on s'élève de 100 mètres, elle est donc multipliée par 0,99 tous les 100 mètres. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison 0,99 et de terme initial $u_0 = 1\,000$.

26 **C**

27 La droite « descend », donc la suite (w_n) est strictement décroissante.
Le point de Δ d'abscisse 0 a pour ordonnée 2, donc $w_0 = 2$.
Le coefficient directeur de Δ est -3, donc la raison de la suite est $a = -3$.
La raison est strictement négative, ce qui confirme la stricte décroissance de la suite.

28 La droite « monte », donc la suite (v_n) est strictement croissante.
Le point de la droite Δ d'abscisse 0 a pour ordonnée -2, donc $v_0 = -2$.
Le coefficient directeur de Δ est 1, donc la raison de la suite est $a = 1$.
La raison est strictement positive, ce qui confirme la stricte croissance de la suite.

29 La droite « descend », donc la suite (w_n) est strictement décroissante.
Le point de Δ d'abscisse 0 a pour ordonnée 0, donc $w_0 = 0$.
Le coefficient directeur de Δ est -2, donc la raison de la suite est $a = -2$.
La raison est strictement négative, ce qui confirme la stricte décroissance de la suite.

30 La droite est « horizontale », donc la suite (u_n) est constante.
Le point de Δ d'abscisse 0 a pour ordonnée -3, donc $u_0 = -3$.
Le coefficient directeur de Δ est 0, donc la raison de la suite est $a = 0$.
La raison est nulle, ce qui confirme le fait que la suite est constante.

31 **C**

32 Pour $a = -13$, la suite arithmétique de raison a est strictement décroissante, car $a < 0$.
Pour $a = 3{,}1$, la suite arithmétique de raison a est strictement croissante, car $a > 0$.
Pour $a = -0{,}7$, la suite arithmétique de raison a est strictement décroissante, car $a < 0$.
Pour $a = -0{,}1$, la suite arithmétique de raison a est strictement décroissante, car $a < 0$.
Pour $a = 0{,}005$, la suite arithmétique de raison a est strictement croissante, car $a > 0$.

33 **C**

34 La courbe « monte », donc la suite (w_n) est strictement croissante.
Le point de Γ d'abscisse 0 a pour ordonnée 1, donc $w_0 = 1$. Le point de Γ d'abscisse 1 a pour ordonnée 2, donc $w_1 = 2$.
La raison de la suite (w_n) est $b = \dfrac{w_1}{w_0} = 2$.

La raison est strictement supérieure à 1, ce qui confirme la stricte croissance de la suite.

35 La droite est « horizontale », donc la suite (u_n) est constante.
Le point de Δ d'abscisse 0 a pour ordonnée 3, donc $u_0 = 3$. La suite géométrique (u_n) étant constante, sa raison est $b = 1$.

36 **C**

37 Pour $b = 3$, la suite géométrique de raison b est strictement croissante, car $b > 1$.
Pour $b = 0{,}2$, la suite géométrique de raison b est strictement décroissante, car $0 < b < 1$.
Pour $b = 0{,}99$, la suite géométrique de raison b est strictement décroissante, car $0 < b < 1$.
Pour $b = 0{,}003$, la suite géométrique de raison b est strictement décroissante, car $0 < b < 1$.
Pour $b = 1{,}000\,1$, la suite géométrique de raison b est strictement croissante, car $b > 1$.

38 **1.** Réponse **c)**.
2. Réponse **a)**.
3. Réponse **b)**.
4. Réponse **c)**.
5. Réponse **c)**.

39 $u_1 + u_2 + \ldots + u_8 = 8\ \dfrac{u_1 + u_8}{2}$;

$u_8 = 2 + (8 - 1) \times 1{,}5 = 12{,}5$.

$u_1 + u_2 + \ldots + u_8 = 8 \times \dfrac{2 + 12{,}5}{2} = 58$.

40 $v_1 + v_2 + \ldots + v_6 = 6\,\dfrac{v_1 + v_6}{2}$;
$v_6 = 2{,}5 + (6 - 1) \times (-1) = -2{,}5$.
$v_1 + v_2 + \ldots + v_6 = 6 \times \dfrac{2{,}5 - 2{,}5}{2} = 0$.

41 **C**

42 La somme des vingt premiers termes de la suite est $v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}$.
$v_1 + v_2 + \ldots + v_{20} = 20\,\dfrac{v_1 + v_{20}}{2}$;
$v_{20} = 1 + (20 - 1) \times 0{,}4 = 8{,}6$.
$v_1 + v_2 + \ldots + v_{20} = 20\,\dfrac{1 + 8{,}6}{2} = 96$.

43 $u_0 + u_1 + \ldots + u_7 = (7 + 1)\,\dfrac{u_0 + u_7}{2} = 8\,\dfrac{u_0 + u_7}{2}$;
$u_7 = 2 + 7 \times 4 = 30$.
$u_0 + u_1 + \ldots + u_7 = 8 \times \dfrac{2 + 30}{2} = 128$.

44 $v_0 + v_1 + \ldots + v_{11} = (11 + 1)\,\dfrac{v_0 + v_{11}}{2}$
$= 12\,\dfrac{v_0 + v_{11}}{2}$;
$v_{11} = 4{,}2 + 11 \times (-7) = -72{,}8$.
$v_0 + v_1 + \ldots + v_{11} = 12 \times \dfrac{4{,}2 - 72{,}8}{2} = -411{,}6$.

45 **C**

46 La somme des treize premiers termes de la suite est $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{12}$.
$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{12} = 13\,\dfrac{v_0 + v_{12}}{2}$;
$v_{12} = 3 + 12 \times (-20) = -237$.
$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{12} = 13 \times \dfrac{3 - 237}{2} = -1\,521$.

47 *Exercice résolu dans le livre élève.*

48 $u_6 + u_7 + \ldots + u_{13} = 8\,\dfrac{u_6 + u_{13}}{2}$;
$u_6 = -1 + (6 - 1) \times 0{,}1 = -0{,}5$;
$u_{13} = -1 + (13 - 1) \times 0{,}1 = 0{,}2$.
$u_6 + u_7 + \ldots + u_{13} = 8 \times \dfrac{-0{,}5 + 0{,}2}{2} = -1{,}2$.

49 $v_9 + v_{10} + \ldots + v_{24} = 16\,\dfrac{v_9 - v_{24}}{2}$;
$v_9 = -3{,}4 + 9 \times (-0{,}8) = -10{,}6$;
$v_{24} = -3{,}4 + 24 \times (-0{,}8) = -22{,}6$.
$v_9 + v_{10} + \ldots + v_{24} = 16 \times \dfrac{-10{,}6 - 22{,}6}{2} = -265{,}6$.

50 La longueur de la corde correspond à la somme $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6$.
$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 = 6\,\dfrac{\ell_1 + \ell_6}{2}$;
$\ell_6 = 20 + (6 - 1) \times 15 = 95$.
$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 = 6 \times \dfrac{20 + 95}{2} = 345$.
La longueur de la corde est 345 cm.

51 **1.** Après un stationnement d'une heure, le tarif diminue de 0,15 € chaque heure suivante, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison – 0,15 et de terme initial $u_1 = 1$.
2. Le montant payé par un automobiliste pour un stationnement d'une durée de 5 heures correspond à la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$.
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 5\,\dfrac{u_1 + u_5}{2}$;
$u_5 = 1 + (5 - 1) \times (-0{,}15) = 0{,}4$.
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 5\,\dfrac{1 + 0{,}4}{2} = 3{,}5$.
Le montant payé est 3,50 €.

52 **1.** Lors de l'épidémie, le nombre de patients du cabinet médical augmente chaque jour de 10, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 10 et de terme initial $u_1 = 50$.
2. Le nombre total de patients sur cette période correspond à la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$.
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u + u_6 = 6\,\dfrac{u_1 + u_6}{2}$;
$u_6 = 50 + (6 - 1) \times 10 = 100$.
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 6 \times \dfrac{50 + 100}{2} = 450$.
Le nombre total de patients sur cette période est 450.

53 **1.** Pour arroser le premier arbuste, le jardinier parcourt 1 m, puis revient au point d'eau. Il parcourt donc au total 2 m, d'où $d_1 = 2$.
Pour arroser le deuxième arbuste, le jardinier parcourt (1 + 0,70) m, puis revient au point d'eau. Il parcourt donc au total 3,4 m, d'où $d_2 = 3{,}4$.

Pour arroser le $(n + 1)$-ième arbuste, le jardinier parcourt 0,7 + 0,7 = 1,4 mètre de plus que pour arroser le n-ième arbuste, donc $d_{n+1} = d_n + 1{,}4$, d'où la suite (d_n) est arithmétique, de raison 1,4 et de terme initial $d_1 = 2$.
2. La distance parcourue par le jardinier pour arroser les arbustes et revenir au point d'eau correspond à la somme $d_1 + d_2 + \dots + d_{20}$.

$d_1 + d_2 + \dots + d_{20} = 20\,\dfrac{d_1 + d_{20}}{2}$;

$d_{20} = 2 + (20 - 1) \times 1{,}4 = 28{,}6$.

$d_1 + d_2 + \dots + d_{20} = 20 \times \dfrac{2 + 28{,}6}{2} = 306$.

La distance parcourue par le jardinier pour arroser les 20 arbustes et revenir au point d'eau est 306 m.

54 **1.** Le terme initial est 1 et le terme de rang n est n, donc la somme des n premiers de la suite arithmétique de raison 1 et de terme initial 1 est $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

2. C'est la suite des n premiers entiers naturels non nuls.

55 Le montant des salaires perçus par David au bout des 9 ans correspond à la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_8$.

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_8 = 9\,\dfrac{u_0 + u_8}{2}$;

$u_8 = 1\,000 + 8 \times 50 = 1\,400$.

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_8 = 9 \times \dfrac{1\,000 + 1\,400}{2} = 10\,800$.

Le montant des salaires est 10 800 €.

56 **1.** Le premier mètre foré est facturé 30 € de plus que la mise en place du matériel.
Chaque mètre supplémentaire est facturé 30 € de plus que le précédent. D'où la suite (p_n) est arithmétique, de raison 30 et de terme initial $p_0 = 100$.
2. Le prix du forage d'un puits de 8 mètres de profondeur correspond à la somme $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_8$.

$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_8 = 9\,\dfrac{p_0 + p_8}{2}$;

$p_8 = 100 + 8 \times 30 = 340$.

$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_8 = 9 \times \dfrac{100 + 340}{2} = 1\,980$.

Le prix du forage est 1 980 €.

57 **1.** La somme versée est diminuée de 5 € par rapport à celle versée le mois précédent ; on en déduit que la suite (v_n) est arithmétique, de raison – 5 et de terme initial $v_0 = 200$.
2. Pour tout entier naturel n, $v_n = 200 - 5n$.
$v_n > 0$ équivaut à $200 - 5n > 0$, soit $n < 40$.
Il y aura 39 versements.
3. Le montant de l'épargne correspond à la somme $v_0 + v_1 + \dots + v_{39}$.

$v_0 + v_1 + \dots + v_{39} = 40\,\dfrac{v_0 + v_{39}}{2}$;

$v_{39} = 200 + 39 \times (-5) = 5$.

$v_0 + v_1 + \dots + v_{39} = 40 \times \dfrac{200 + 5}{2} = 4\,100$.

Le montant de son épargne sera 4 100 €.

58 **1.** 10 – 5 = 5 et 15 – 10 = 5, donc les nombres 5, 10 et 15 sont, dans cet ordre, les trois premiers de la suite arithmétique (u_n) de raison 5 et de terme initial $u_1 = 5$.
2. On résout l'équation $u_n = 55$.
Or $u_n = 5 + (n - 1)5$.
D'où $5 + (n - 1)5 = 55$, soit $5n = 55$, soit $n = 11$.
3. $S = 5 + 10 + 15 + \dots + 55 = u_1 + u_2 + \dots + u_{11}$
$= 11\,\dfrac{u_1 + u_{11}}{2}$.

$S = 11 \times \dfrac{5 + 55}{2} = 330$.

59 $u_1 + u_2 + \dots + u_8 = \dfrac{1 - 1{,}5^8}{1 - 1{,}5} \approx 49{,}26$.

60 $v_1 + v_2 + \dots + v_6 = 2{,}5 \times \dfrac{1 - 0{,}5^6}{1 - 0{,}5} \approx 4{,}92$.

61 **C**

62 La somme des seize premiers termes est $v_1 + v_2 + \dots + v_{16}$.

$v_1 + v_2 + \dots + v_{16} = 3 \times \dfrac{1 - 1{,}1^{16}}{1 - 1{,}1} \approx 107{,}849$.

63 La somme des six premiers termes est $w_1 + w_2 + \dots + w_6$.

$w_1 + w_2 + \dots + w_6 = \dfrac{1 - 10^6}{1 - 10} = \dfrac{1 - 10^6}{-9} = 111\,111$.

64 $u_0 + u_1 + \dots + u_4 = 2 \times \dfrac{1 - 0{,}75^5}{1 - 0{,}75} \approx 6{,}102$.

65 $v_0 + v_1 + \ldots + v_8 = 0{,}5 \times \dfrac{1-4^9}{1-4} = 0{,}5 \times \dfrac{1-4^9}{-3}$

$= 43\,690{,}5.$

66 **C**

67 La somme des trente premiers termes est $v_0 + v_1 + \ldots + v_{29}$.

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{29} = 150 \times \frac{1-0{,}98^{30}}{1-0{,}98} \approx 3\,408{,}87.$$

68 La somme des cinq premiers termes est $w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4$.

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 10\,000 \times \frac{1-0{,}5^5}{1-0{,}5} = 19\,375.$$

69 *Exercice résolu dans le livre élève.*

70 $v_7 + v_8 + \ldots + v_{12} = v_7 \times \dfrac{1-1{,}05^6}{1-1{,}05}$.

Or $v_7 = v_1 \times 1{,}05^6 = 1{,}05^6$.

Donc $v_7 + v_8 + \ldots + v_{12} = 1{,}05^6 \times \dfrac{1-1{,}05^6}{1-1{,}05} \approx 9{,}12.$

71 $v_9 + v_{10} + \ldots + v_{24} = v_9 \times \dfrac{1-0{,}9^{16}}{1-0{,}9}$.

Or $v_9 = v_0 \times 0{,}9^9 = 20 \times 0{,}9^9$.

Donc $v_9 + v_{10} + \ldots + v_{24} = 20 \times 0{,}9^9 \times \dfrac{1-0{,}9^{16}}{1-0{,}9} \approx 63{,}13.$

72 Le nombre total d'entrées sur l'année correspond à la somme $s_1 + s_2 + \ldots + s_{12}$.

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{12} = 15\,000 \times \frac{1-1{,}02^{12}}{1-1{,}02} \approx 201\,200.$$

Le nombre total d'entrées est environ 201 200.

73 Le montant total du remboursement correspond à la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{59}$.

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{59} = 80 \times \frac{1-1{,}03^{60}}{1-1{,}03} \approx 13\,044.$$

Le montant total du remboursement est environ 13 044 €.

74 **1.** On propose à Myriam de payer 7 euros pour le premier jour, puis de diminuer de 10 %, c'est-à-dire de multiplier par 0,9, le montant chaque jour suivant. On en déduit que la suite (u_n) est géométrique, de raison 0,9 et de terme initial $u_1 = 7$.

2. Le montant total payé par Myriam correspond à la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = 7 \times \frac{1-0{,}9^7}{1-0{,}9} \approx 36{,}5.$$

Le montant total payé est environ 36,50 €.

75 **1.** Le nombre de naissances a augmenté environ de 3 % par mois, donc il a été multiplié par 1,03. La suite (v_n) est donc géométrique, de raison 1,03 et de terme initial $v_1 = 250$.

2. Le nombre total de naissances en 2007 dans cette maternité correspond à la somme $v_1 + v_2 + \ldots + v_{12}$.

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_{12} = 250 \times \frac{1-1{,}03^{12}}{1-1{,}03} \approx 3\,548.$$

76

1. Le fabricant augmente sa production de 10 % par an, c'est-à-dire qu'il la multiplie par 1,1 chaque année. La suite (u_n) est donc géométrique, de raison 1,1 et de terme initial $u_0 = 60$.

2. Le nombre total de meubles fabriqués de début 2000 à fin 2006 correspond à la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_6$.

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_6 = 60 \times \frac{1-1{,}1^7}{1-1{,}1} \approx 570.$$

Le nombre total de meubles fabriqués est environ 570.

77 **1.** $\dfrac{9}{3} = 3$ et $\dfrac{27}{9} = 3$, donc les nombres 3, 9 et 27 sont, dans cet ordre, les trois premiers termes de la suite géométrique (u_n) de raison 3 et de terme initial $u_1 = 3$.

2. On résout l'équation $u_n = 729$.
Or $u_n = 3^{n-1} \times 3 = 3^n$.
D'où $3^n = 729$; or $729 = 3^6$, donc $n = 6$.

3. $S = 3 + 9 + 27 + \ldots + 729 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_6$

$$= 3 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 3 \times \frac{1-3^6}{-2} = 1\,092.$$

78 **1.** $u_1 = 5$; $u_2 = 5 \times 5 = 5^2$; $u_{n+1} = 5\,u_n$.
La suite (u_n) est géométrique, de raison 5 et de terme initial $u_1 = 5$.

2. Le nombre total des destinataires correspond à la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = 5 \times \frac{1-5^7}{1-5} = 5 \times \frac{1-5^7}{-4} = 97\,655.$$

Chaque destinataire envoie effectivement 1 euro, donc la somme perçue est 97 655 €.

Je fais le point

Savez-vous déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique à partir d'une représentation graphique ou de sa raison ?

Énoncé 1

a) La droite « descend », donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
b) La raison est strictement négative, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Énoncé 2

a) La droite « descend », donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
b) La raison est strictement positive, donc la suite (v_n) est strictement croissante.

Savez-vous déterminer le sens de variation d'une suite géométrique à partir d'une représentation graphique ou de sa raison ?

Énoncé 1

a) La courbe « monte », donc la suite (u_n) est strictement croissante.
b) La raison est strictement supérieure à 1, donc la suite (v_n) est strictement croissante.

Énoncé 2

a) La courbe « descend », donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
b) $0 < b < 1$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Savez-vous calculer une somme $u_1 + u_2 + ... + u_n$ ou $u_0 + u_1 + ... + u_n$ pour une suite arithmétique ?

Énoncé 1

Le montant total des salaires perçus la première année correspond à la somme des douze premiers termes de la suite, soit
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}$.
$u_{12} = 1\,700 + (12 - 1) \times 12 = 1\,832$.
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = 12 \times \frac{1\,700 + 1\,832}{2} = 21\,192.$$
Le montant total perçu est 21 192 €.

Énoncé 2

Le montant total des factures payé par Loïc depuis sept ans correspond à la somme des sept premiers termes de la suite, soit $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$.
$v_6 = 1\,000 + 6 \times 60 = 1\,360$;
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 7 \times \frac{1\,000 + 1\,360}{2} = 8\,260.$$
Le montant total payé est 8 260 €.

Savez-vous calculer une somme $u_1 + u_2 + ... + u_n$ ou $u_0 + u_1 + ... + u_n$ pour une suite géométrique ?

Énoncé 1

La somme totale reçue par le gagnant correspond à la somme des douze premiers termes de la suite, soit $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}$.
$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = 1\,500 \times \frac{1 - 1{,}05^{12}}{1 - 1{,}05} \approx 23\,876.$$
La somme totale reçue est à peu près 23 876 €.

Énoncé 2

La quantité totale importée de 2002 à 2007 correspond à la somme des six premiers termes de la suite, soit $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5$.
$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1\,000 \times \frac{1 - 1{,}1^6}{1 - 1{,}1} = 7\,715{,}61.$$
La quantité totale importée est 7 715,61 tonnes.

Savez-vous calculer une somme de termes consécutifs pour une suite arithmétique ?

Énoncé 1

$u_5 + u_6 + ... + u_{10} = 6\dfrac{u_5 + u_{10}}{2}$;

$u_5 = 6 + (5 - 1) \times (-7) = -22$;
$u_{10} = 6 + (10 - 1) \times (-7) = -57$.
D'où $u_5 + u_6 + ... + u_{10} = 6 \times \dfrac{-22 - 57}{2} = -237$.

Énoncé 2

$v_3 + v_4 + ... + v_{12} = 10\dfrac{v_3 + v_{12}}{2}$;

$v_3 = 4{,}5 + 3 \times 0{,}3 = 5{,}4$;

$v_{12} = 4{,}5 + 12 \times 0{,}3 = 8{,}1$.

D'où $v_3 + v_4 + \ldots + v_{12} = 10 \times \dfrac{5{,}4 + 8{,}1}{2} = 67{,}5$.

Savez-vous calculer une somme de termes consécutifs pour une suite géométrique ?

Énoncé 1

$u_2 + u_3 + ... + u_8 = u_2 \dfrac{1 - 2{,}5^7}{1 - 2{,}5}$; $u_2 = 2{,}5^2 \times 3 = 18{,}75$.

D'où $u_2 + u_3 + ... + u_8 = 18{,}75 \times \dfrac{1 - 2{,}5^7}{1 - 2{,}5} \approx 7\,616{,}89$.

Énoncé 2

$v_4 + v_5 + ... + v_8 = v_4 \dfrac{1 - 0{,}4^5}{1 - 0{,}4}$;

$v_4 = 0{,}4^{4-1} \times 24 = 1{,}536$.

D'où $v_4 + v_5 + \ldots + v_8 = 1{,}536 \times \dfrac{1 - 0{,}4^5}{1 - 0{,}4} \approx 2{,}53$.

Activités guidées

79 AG1

1. a) En ajoutant les deux lignes terme à terme, on obtient

$2S = (u_2 + u_7) + (u_3 + u_6) + (u_4 + u_5) + (u_5 + u_4) + (u_6 + u_3) + (u_7 + u_2)$.

b) $u_3 = u_2 + a$; $u_6 = u_7 - a$;

$u_3 + u_6 = u_2 + a + u_7 - a = u_2 + u_7$.

$u_3 + u_6$ est égale à la somme du premier terme et du dernier terme de la suite.

c) $u_4 = u_2 + 2a$; $u_5 = u_7 - 2a$;

$u_4 + u_5 = u_2 + 2a + u_7 - 2a = u_2 + u_7$.

$u_4 + u_5$ est égale à la somme du premier terme et du dernier terme de la suite.

d) En remplaçant dans l'expression de $2S$ obtenue dans le **a)** $u_3 + u_6$ par $u_2 + u_7$ et $u_4 + u_5$ par $u_2 + u_7$, on obtient

$2S = (u_2 + u_7) + (u_2 + u_7) + (u_2 + u_7) + (u_2 + u_7) + (u_2 + u_7) + (u_2 + u_7)$, soit $2S = 6(u_2 + u_7)$, ou encore $S = 6\dfrac{(u_2 + u_7)}{2}$.

2. a) En ajoutant les deux lignes terme à terme, on obtient

$2S = (u_k + u_p) + (u_{k+1} + u_{p-1}) + (u_{k+2} + u_{p-2}) + \ldots + (u_{p-2} + u_{k+2}) + (u_{p-1} + u_{k+1}) + (u_p + u_k)$.

b) $u_{k+1} = u_k + a$; $u_{p-1} = u_p - a$;

$u_{k+1} + u_{p-1} = u_k + a + u_p - a = u_k + u_p$.

$u_{k+1} + u_{p-1}$ est égale à la somme du premier terme et du dernier terme de la suite.

c) Idem pour u_{k+2} et u_{p-2}, etc.

d) En remplaçant dans l'expression de $2S$ obtenue dans le **a)**, $u_{k+1} + u_{p-1}$ par $u_k + u_p$, $u_{k+2} + u_{p+2}$ par $u_k + u_p$, etc., on obtient

$2S = (u_k + u_p) + (u_k + u_p) + (u_k + u_p) + \ldots + (u_k + u_p) + (u_k + u_p) + (u_k + u_p)$.

Dans cette somme, il y a autant de termes $u_k + u_p$ que de termes dans S,

d'où $2S$ = (nombre de termes de S)$(u_k + u_p)$, soit

S = (nombre de termes de S) $\dfrac{u_k + u_p}{2}$, ou encore

$$S = (\text{nombre de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2}.$$

80 AG2

1. a) $bS = bv_2 + bv_3 + bv_4 + bv_5 + bv_6 + bv_7$.

Or $bv_2 = v_3$, $bv_3 = v_4$, $bv_4 = v_5$, $bv_5 = v_6$, $bv_6 = v_7$, $bv_7 = v_8$,

d'où $bS = v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8$.

b) En soustrayant les lignes terme à terme, on obtient

$S - bS = v_2 - v_3 + v_3 - v_4 + v_4 - v_5 + v_5 - v_6 + v_6 - v_7 + v_7 - v_8 = v_2 - v_8$.

Soit $(1 - b)S = v_2 - v_8$.

c) $b \neq 1$, donc $S = \dfrac{v_2 - v_8}{1 - b}$.

d) $v_8 = v_2 b^{8-2} = v_2\, b^6$.

D'où $S = \dfrac{v_2 - v_2\, b^6}{1 - b} = v_2\, \dfrac{1 - b^6}{1 - b}$.

2. a) $bS = bv_k + bv_{k+1} + bv_{k+2} + \ldots + bv_{p-2} + bv_{p-1} + bv_p$.

Or $bv_k = v_{k+1}$, $bv_{k+1} = v_{k+2}$, $bv_{k+2} = v_{k+3}$, …, $bv_{p-2} = v_{p-1}$, $bv_{p-1} = v_p$, $bv_p = v_{p+1}$.

D'où $bS = v_{k+1} + v_{k+2} + v_{k+3} + \ldots + v_{p-1} + v_p + v_{p+1}$.

b) En soustrayant les lignes terme à terme, on obtient

$S - bS = v_k - v_{k+1} + v_{k+1} - v_{k+2} + v_{k+2} - v_{k+3} + \ldots + v_{p-2} - v_{p-1} + v_{p-1} - v_p + v_p - v_{p+1} = v_k - v_{p+1}$.

Soit $(1 - b)S = v_k - v_{p+1}$.

c) $b \neq 1$, donc $S = \dfrac{v_k - v_{p+1}}{1 - b}$.

d) $v_{p+1} = v_k b^{p+1-k} = v_k b^{p-k+1} = v_k b^{\text{nombre de termes de } S}$.

e) Des questions **c)** et **d)**, on déduit que

$$S = \frac{v_k - v_k b^{\text{nombre de termes de } S}}{1-b} = v_k \frac{(1 - b^{\text{nombre de termes de } S})}{1-b}.$$

Soit S = (premier terme de S) ×

$$\frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes de } S)}}{1 - (\text{raison})}.$$

81 **AG3** **1.** Pour tout entier naturel n,
$p_n = 50\,000 + 2\,000n$ et $q_n = 1{,}06^n \times 30\,000$.

2. a) On lit sur le tableau de valeurs :
pour $x = 18$, $y_1 = 86\,000$, $y_2 = 85\,630$.
pour $x = 19$, $y_1 = 88\,000$, $y_2 = 90\,767$.
La population de la ville B dépasse celle de la ville A à partir de l'année 2019.

b) Les deux courbes se croisent en un point d'abscisse situé entre 18 et 19, d'où la vérification du **2. a)**.

82 **AG4**

1. Le nombre de cellules A augmente de 8 % par jour, donc le nombre de cellules A est multiplié par 1,08. La suite (a_n) est donc géométrique, de raison 1,08 et de terme initial $a_0 = 1\,500$.
Le nombre de cellules B augmente de 10 % par jour, donc le nombre de cellules B est multiplié par 1,1. La suite (b_n) est donc géométrique, de raison 1,1 et de terme initial $b_0 = 1\,000$.
Pour tout entier naturel n, $a_n = 1{,}08^n \times 1\,500$ et $b_n = 1{,}1^n \times 1\,000$.

2. a) C'est au bout de 23 jours que le nombre de cellules B devient supérieur au nombre de cellules A.

83 **AG5**

1. $a = -1{,}5$; $a < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. a) $u_n = 5 - 1{,}5n$.

b) $u_n < -30$ équivaut à $5 - 1{,}5n < -30$,
c'est-à-dire $n > \frac{35}{1{,}5}$.

$\frac{35}{1{,}5} = 23{,}33\ldots$, donc le plus petit entier k tel que $u_k < -30$ est 24.
$u_{24} = -31$.

c) La suite est strictement décroissante, donc pour tout entier $n > k$, $u_n < u_k < -30$.

3. b) u_{24}.

4. a) $a = 3{,}5$; $a > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante.

b) $v_n > 200$ équivaut à $2 + (n-1) \times 3{,}5 > 200$,
c'est-à-dire $n > \frac{201{,}5}{3{,}5}$.

Or $\frac{201{,}5}{3{,}5} = 57{,}57\ldots$, donc le premier terme de la suite supérieur à 200 est $v_{58} = 201{,}5$.

c) Tous les termes suivants sont supérieurs à 200, car la suite étant strictement croissante, pour tout $n > 58$, $v_n > v_{58} > 200$.

84 **AG6**

1. $a = 1{,}2$; $a > 1$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) $u_n = 1{,}2^n \times 4$.

2. b) Le premier terme de la suite qui est supérieur à 150 000 est u_{58}.

3. a) $b = 0{,}7$; $0 < b < 1$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

b) Le premier terme de la suite qui est inférieur à 2×10^{-6} est u_{39}.

c) La suite étant strictement décroissante, pour tout $n > 39$, $u_n < u_{39} < 2 \times 10^{-6}$.

Problèmes

85 **1.** $x_n = 50 + 15(n-1) = 35 + 15n$.

2. $y_n = 1{,}1^{n-1} \times 50$.

3. Après 20 jours, c'est la population X qui est supérieure à la population Y.
Après 30 jours, c'est la population Y qui est supérieure à la population X.

86 **1. a)** L'intérêt produit la première année est de 600 €. Donc $u_2 = 10\,000 + 2 \times 600$, soit $u_2 = 11\,200$.
$u_4 = 10\,000 + 4 \times 600 = 12\,400$.

b) $v_2 = 1{,}045^2 \times 10\,000 \approx 10\,920{,}25$;
$v_4 = 1{,}045^4 \times 10\,000 \approx 11\,925{,}19$.

2. Pour le placement P, chaque année, la valeur acquise augmente de 600 € : la suite (u_n) est arithmétique, de raison 600 et de terme initial $u_0 = 10\,000$.
Pour le placement Q, chaque année, la valeur acquise augmente de 4,5 % ; elle est donc multipliée par 1,045 : la suite (v_n) est géométrique, de raison 1,045 et de terme initial $v_0 = 10\,000$.

3. Pour tout entier naturel,
$u_n = 10\,000 + n \times 600$ et $v_n = 10\,000 \times 1{,}045^n$.
La valeur acquise v_n deviendra supérieure à la valeur acquise u_n au bout de 14 ans.

87 **1.** Pour $n \geqslant 4$, $v_n > u_n$.
2. a) $u_0 = 9$, $a = u_1 - u_0 = 8 - 9 = -1$; $u_n = 9 - n$.

b) $v_0 = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; $v_n = 2^n \times \dfrac{1}{2}$.

c) On retrouve sur le tableau de valeurs le résultat du **1.**

88 **1.** Pour $n \geqslant 4$, $u_n > v_n$.
2. a) $u_1 = 1$, $a = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{3}{1} = 3$; $u_n = 3^{n-1}$.

b) $v_1 = 3$, $a = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{6}{3} = 2$; $v_n = 3 \times 2^{n-1}$.

c) On retrouve sur le tableau de valeurs le résultat du **2.**

89 **1. a)** Le nombre de bactéries obtenues après 20 minutes est 2. Le nombre de bactéries obtenues après 40 minutes est 4.
b) Le nombre de bactéries obtenues après 80 minutes correspond au terme b_4.
Le nombre de bactéries obtenues après 3 heures, ou 180 minutes, correspond au terme b_9.
2. La bactérie se divise en deux toutes les vingt minutes, donc le nombre de bactéries est multiplié par deux toutes les vingt minutes. On en déduit que la suite (b_n) est géométrique, de raison 2 et de terme initial $b_0 = 1$. Pour tout entier naturel n, $b_n = 2^n$.
3. Le nombre de bactéries devient supérieur à 1 million après 20 fois 20 minutes, soit après 6 heures et 40 minutes.

90 **1.** Au bout d'une heure, le volume de produit éliminé est $\dfrac{10}{100} \times 1\ \text{cm}^3$, soit $0{,}1\ \text{cm}^3$.

Il reste donc dans l'organisme du malade $0{,}9\ \text{cm}^3$ de produit calmant.
Au cours de la 2e heure, le volume de produit éliminé est $\dfrac{10}{100} \times 0{,}9\ \text{cm}^3$, soit $0{,}09\ \text{cm}^3$.

Au cours de deux heures, le volume de produit éliminé est $(0{,}1 + 0{,}09)\ \text{cm}^3$, soit $0{,}19\ \text{cm}^3$.
2. L'organisme élimine 10 % de produit toutes les heures, donc le volume de produit est multiplié toutes les heures par $1 - 0{,}1$, soit par 0,9. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = 1$.
Pour tout entier naturel n, $v_n = 0{,}9^n$.
3. Le produit deviendra inefficace entre la 6e et la 7e heure.

91 **1.** Les valeurs remboursables sont, en euros :

pour la première année	$550 - 550 \times 0{,}15 = 467{,}50$,
pour la deuxième année	$467{,}50 - 467{,}50 \times 0{,}15 \approx 397{,}38$,
pour la troisième année	$397{,}38 - 397{,}38 \times 0{,}15 \approx 337{,}77$.

2. Appliquer une réduction de 15 %, c'est multiplier le prix par $1 - 0{,}15$, soit 0,85.
La suite des valeurs « remboursables » est géométrique, de raison 0,85 et de terme initial 550.
3. Au bout de dix ans, la valeur remboursable, en euros, est $0{,}85^{10} \times 550 \approx 108{,}28$ €.
4. Dans l'éditeur de fonctions, on entre $y = 0{,}85^x \times 550$, et on obtient que la valeur « remboursable » devient inférieure à 50 € en 15 années (la suite étant strictement décroissante).

92 **1.** $u_1 = 100 - 100 \times 10\ \% = 90$; $u_2 = 81$; $u_3 = 72{,}9$.
2. $u_{n+1} = u_n - u_n \times 10\ \% = (1 - 0{,}1)u_n = 0{,}9u_n$.
(u_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $u_0 = 100$.
3. $u_n = 0{,}9^n \times 100$.
4. À l'aide de la calculatrice, la suite étant strictement décroissante, on obtient que c'est à partir de $n = 44$ que l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

93 **1.** Le salaire mensuel de Marcel en 2006 est 1 250 €. En 2007, son salaire mensuel est 1 300 €.
2. a) La suite (U_n) est arithmétique, de raison 50 et de terme initial $U_0 = 1\,200$.
b) Pour tout entier naturel n, $U_n = 1\,200 + 50n$.
c) $U_{19} = 2\,150$. Le salaire mensuel de Marcel en 2024 sera 2 150 €.
d) On résout l'inéquation $1\,200 + 50n \geqslant 1\,700$, soit $n \geqslant 10$.
Le salaire mensuel de Marcel sera au moins 1 700 € à partir de 2015.
3. a) La suite (V_n) est géométrique, de raison 1,05 et de terme initial $V_0 = 1\,200$.
b) Pour tout entier naturel n, $V_n = 1{,}05^n \times 1\,200$.
c) Le salaire mensuel, en euros, de Claudine en 2022 correspond à V_{17}.
$V_{17} = 1{,}03^{17} \times 1\,200 \approx 1\,983{,}42$.
4. a) La suite (V_n) est strictement croissante ; $V_n > 1\,700$ pour $n > 11$.

Claudine gagnera au moins 1 700 € à partir de 2012.
b) Le salaire mensuel de Claudine dépassera celui de Marcel à partir de 2028.
5. On vérifie les résultats du **4.**

94 **1.** $t_1 = 169 + 169 \times 2\,\%$.
$t_1 = 169 \times 1{,}02 = 172{,}3\ldots \approx 172$.
$t_2 = t_1 \times 1{,}02 = 175{,}8\ldots \approx 176$.
2. t_4 correspond à la durée du temps libre pour 1999.
$t_3 = t_2 \times 1{,}02 = 179{,}3\ldots \approx 179$.
$t_4 = t_3 \times 1{,}02 = 182{,}9\ldots \approx 183$.
La durée du temps libre pour 1999 est environ 183 minutes.
3. La suite (t_n) est géométrique, de raison 1,02 et de terme initial $t_0 = 169$.
Pour tout entier naturel n, $t_n = 1{,}02^n \times 169$.
4. La suite (t_n) est strictement croissante ; $t_n > 200$ pour $n > 8$.
La durée quotidienne moyenne du temps libre des femmes deviendra supérieure à 200 minutes en 1987 + 3 × 9, soit en 2014.

95 **1.** $R_1 = 125 + 125 \times 3\,\% = 125 \times 1{,}03 \approx 128{,}8$;
$R_2 = R_1 \times 1{,}03 \approx 132{,}6$;
$R_3 = R_2 \times 1{,}03 \approx 136{,}6$.
2. $R_{n+1} = R_n \times 1{,}03$.
La suite (R_n) est géométrique, de raison 1,03 et de terme initial $R_0 = 125$.
3. $R_n = 1{,}03^n \times 125$.
4. $R_6 = 1{,}03^6 \times 125 \approx 149{,}3$. En 2010, on peut prévoir une population de 149,3 milliers d'habitants.
5. En utilisant la calculatrice, le rang du relevé pour lequel la population dépasse pour la première fois 163 milliers d'habitants est 9.
L'année correspondante est (1990 + 5 × 9), soit 2025.

96 **1.**

Année	Population d'âge scolaire	Population scolarisée
2000	3 000 000	700 000
2001	3 060 000	850 000
2002	3 121 200	1 000 000
2003	3 183 624	1 150 000

2. La proportion de la population scolarisée dans la population d'âge scolaire est :
en 2000 : $\dfrac{700\,000}{3\,000\,000} \approx 23{,}33\,\%$;
en 2003 : $\dfrac{1\,150\,000}{3\,183\,624} \approx 36{,}12\,\%$.

3. a) $P_0 = 3\,000\,000$ et $S_0 = 700\,000$.
b) $P_{n+1} = (1 + 2\,\%)P_n = 1{,}02P_n$; la suite (P_n) est géométrique, de raison 1,02 ; $P_n = 1{,}02^n \times 3\,000\,000$.
c) $S_{n+1} = S_n + 150\,000$; la suite (S_n) est arithmétique, de raison 150 000.
$S_n = 700\,000 + 150\,000n$.
d) La proportion de la population scolarisée dans la population d'âge scolaire en 2005 est :
$$\frac{S_5}{P_5} = \frac{700\,000 + 5 \times 150\,000}{1{,}02^5 \times 3\,000\,000} \approx 43{,}78\,\%.$$
4. $\dfrac{S_n}{P_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$ s'écrit $\dfrac{700\,000 + 150\,000n}{1{,}02^n \times 3\,000\,000} - 0{,}5 \geqslant 0$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient que c'est en (2 000 + 7) que l'on peut espérer que, pour la première fois, plus de la moitié de la population d'âge scolaire sera scolarisée.

97 **1. a)** Le pâtissier-chocolatier voit ses commandes de pâtisseries augmenter de 10 chaque jour, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 10 et de terme initial $u_1 = 30$.
b) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 6\,\dfrac{u_1 + u_6}{2}$;
$u_6 = 30 + (6 - 1) \times 10 = 80$.
D'où $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 6 \times \dfrac{30 + 80}{2} = 330$.

Le nombre total de commandes de pâtisseries enregistrées au cours de cette période correspond à la somme $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$, soit 330.
2. a) Le pâtissier-chocolatier voit ses ventes de ballotins doubler chaque jour, donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 2 et de terme initial $v_1 = 20$.
b) $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 20 \times \dfrac{1 - 2^{\,6}}{1 - 2} = 1\,260$.

Le nombre total de ballotins de chocolats vendus au cours de cette période correspond à la somme $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$, soit 1 260.

98 **1. a)** Aline parcourt 20 km la première semaine, puis augmente chaque semaine la distance parcourue de 7 km. On en déduit que la suite (U_n) est arithmétique, de raison 7 et de terme initial $U_1 = 20$.
b) $U_n = 20 + (n - 1) \times 7 = 13 + 7n$.
c) $U_{10} = 83$. La distance parcourue par Aline est 83 km.
d) La distance totale parcourue par Aline correspond à $U_1 + U_2 + \ldots + U_{15}$.
$$U_1 + U_2 + \ldots + U_{15} = 15 \times \frac{20 + 118}{2} = 1\,035.$$
La distance totale parcourue par Aline est 1 035 km.

2. a) Blandine augmente chaque semaine de 13,5 % la distance parcourue, donc elle la multiplie par $1 + \frac{13,5}{100}$, c'est-à-dire par 1,135.

La suite (V_n) est donc géométrique, de raison 1,135 et de terme initial $V_1 = 20$.
b) Pour tout entier naturel n, $V_n = 20 \times 1,135^{n-1}$.
c) La distance kilométrique parcourue par Blandine le samedi de la dixième semaine correspond à V_{10}, soit $20 \times 1,135^9 \approx 63$.
d) $V_1 + V_2 + \ldots + V_{15} = 20\left(\frac{1 - 1,135^{15}}{1 - 1,135}\right) \approx 842$.

La distance totale parcourue par Blandine est environ 842 km.

99 **1. a)** $u_1 = 15\,000 + 1\,800 = 16\,800$;
$u_2 = 16\,800 + 1\,800 = 18\,600$; $u_3 = 20\,400$.
b) $u_6 = 15\,000 + 6 \times 1\,800 = 25\,800$.
c) La somme remboursée serait, en euros :
$u_0 + u_1 + \ldots + u_6 = 7 \times \frac{15\,000 + 25\,800}{2} = 142\,800$.
2. a) $v_1 = 20\,000 + 20\,000 \times 2\ \% = 20\,400$;
$v_2 = 20\,400 + 20\,400 \times 2\ \% = 20\,808$.
b) $v_1 = 1,02v_0$; $v_2 = 1,02v_1$.
c) Les remboursements seraient chacun en augmentation de 2 % par rapport au remboursement précédent, donc les remboursements sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 1,02 et de terme initial $v_0 = 20\,000$.
d) La somme remboursée serait, en euros :
$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_6 = 20000\left(\frac{1 - 1,0,2^7}{1 - 1,0,2}\right) \approx 148\,686$.
3. La formule la plus avantageuse est celle proposée par la banque A.

100 **1. a)** Pierre possède 500 euros d'économies le 1^er^ janvier et décide d'ajouter 50 euros le 27 de chaque mois, donc la suite (u_n) est arithmétique, de raison 50 et de terme initial $u_0 = 500$.
b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 500 + 50n$.
c) u_{12} correspond à la somme dont dispose Pierre à la fin de l'année.
$u_{12} = 1\,100$. Pierre dispose de 1 100 €.
d) Le taux d'augmentation est
$\frac{1\,100 - 500}{500} = 1,2 = 120\ \%$.
2. a) Émilie possède 400 euros d'économies le 1^er^ janvier et décide d'augmenter ses économies de 10 % le 27 de chaque mois, donc la suite (v_n) est géométrique, de raison 1,1 et de terme initial $v_0 = 400$.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = 1,1^n \times 400$.
c) v_{12} correspond à la somme dont dispose Émilie à la fin de l'année.
$v_{12} \approx 1\,255$. Émilie dispose d'environ 1 255 €.
d) Le taux d'augmentation est environ
$\frac{1\,255 - 400}{400} = 2,137\,5 = 213,75\ \%$.

3. Les économies d'Émilie deviennent supérieures à celles de Pierre à la fin du mois d'octobre.

101 **1. a)** La suite (u_n) est arithmétique, de raison 70 et de terme initial $u_0 = 1\,200$.
b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,200 + 70n$.
$u_9 = 1\,830$. Le salaire mensuel en 2011 est 1 830 €.
c) Le montant total des salaires du début de l'année 2002 jusqu'à la fin $(2002 + n)$ est égal, en euros, à

$$12u_0 + 12u_1 + \ldots + 12u_n = 12(n + 1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}$$
$$= 6(n + 1)\,(2\,400 + 70n).$$

Le montant total des salaires du début de l'année 2002 jusqu'à la fin 2011 est égal, en euros, à :
$60(2\,400 + 70 \times 9) = 181\,800$.
2. a) La suite (v_n) est géométrique, de raison 1,08 et de terme initial $v_0 = 1\,000$.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = 1,08^n \times 1\,000$.
$v_9 \approx 1\,999$. Le salaire mensuel en 2011 est environ 1 999 €.
c) Le total des salaires du début de l'année 2002 jusqu'à la fin $(2002 + n)$ est égal à

$$12v_0 + 12v_1 + 12v_2 + \ldots + 12v_n = 12 \times 1\,000 \times \frac{1 - 1,08^{n+1}}{1 - 1,08}.$$

Le montant total des salaires du début de l'année 2002 jusqu'à la fin 2011 est égal, en euros, à

$$12 \times 1\,000 \times \frac{1 - 1,08^{10}}{1 - 1,08} \approx 173\,839.$$

3. a) Le salaire mensuel du contrat B devient supérieur à celui du contrat A à partir de l'année 2002 + 7, soit 2009.
b) Le montant total des salaires du contrat B, à partir du début de l'année 2002, devient supérieur à celui du contrat A, à partir de l'année 2002 + 12, soit 2014.

102 Le premier versement de 1 000 € va produire des intérêts pendant 18 ans.
Il aura une valeur acquise de $1,04^{18} \times 1\,000$.

Le deuxième versement de 1 000 € ne va produire des intérêts que pendant 17 ans. Il aura une valeur acquise de $1{,}04^{17} \times 1\,000$. Et ainsi de suite.
De plus, le jour des 18 ans de Félix, la grand-mère verse 1 000 €. Félix, le jour de son anniversaire, dispose de 27 671,23 € :
$S = 1{,}04^{18} \times 1\,000 + 1{,}04^{17} \times 1\,000 + \dots$
$+ 1{,}04^{1} \times 1\,000 + 1\,000$.
S est la somme des 19 premiers termes de la suite géométrique de raison 1,04 et de terme initial 1 000.
Donc $S = 1\,000 \times \dfrac{1 - 1{,}04^{19}}{1 - 1{,}04} \approx 27\,671{,}23$.

103 **1.** Le jardinier consomme la moitié de sa citerne, puis la moitié de ce qui reste et ainsi de suite.
La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times 1\,000$.
3. On lit sur le tableau de valeurs que :
pour $x = 13$, $y \approx 0{,}122$; pour $x = 14$, $y \approx 0{,}061$.
Puisque la suite (u_n) est strictement décroissante, il restera moins de 0,1 litre après 14 jours.

104 **Partie A**
1. Le nombre d'atomes de carbone 14 diminue environ de 1,24 % par siècle, il est donc multiplié par 0,987 6 par siècle.
La suite (N_k) est donc géométrique, de raison 0,987 6 et de terme initial N_0.
2. Pour tout entier naturel k, $N_k = 0{,}987\,6^k\, N_0$.

Partie B
On résout l'inéquation $0{,}987\,6^k\, N_0 < 0{,}05 N_0$; soit $0{,}987\,6^k < 0{,}05$. On lit sur le tableau de valeurs de la calculatrice que :
pour $x = 240$, $y \approx 0{,}050\,1$; pour $x = 241$, $y \approx 0{,}049\,4$.
On peut donc estimer l'âge du squelette à environ 241 000 ans.

Tableur sur papier

1. a) La quantité de déchets devrait augmenter de 5 % chaque année, donc le nombre de millions de tonnes de déchets devrait être multiplié par $1 + \dfrac{5}{100}$, soit 1,05. On en déduit que la suite (u_n) est géométrique, de raison 1,05 et de terme initial $u_0 = 2$.
b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 1{,}05^n \times 2$.
Le nombre de millions de tonnes de déchets en 2012 correspond au terme de la suite $u_5 = 1{,}05^5 \times 2 \approx 2{,}553$.
2. a) Pour éviter d'entrer toutes les années dans la colonne A et tous les rangs n des termes de la suite dans la colonne B, on sélectionne les cellules A7 et A8 et les cellules B7 et B8 et on utilise la poignée de remplissage pour compléter les colonnes A et B jusqu'aux cellules A22 et B22.
b) On peut entrer dans la cellule C7 la formule
=2*$B$2^B7.
Dans la cellule C10, on obtient
=2*$B$2^B10.
c) La suite (u_n) a une raison supérieure à 1, donc elle est strictement croissante.
Le nombre de tonnes de déchets devrait dépasser 4 millions en 2022.
d) On peut entrer dans la cellule C25 la formule
=SOMME(C7:C16)
ou la formule
=C7*(1–B2^(B16+1))/(1–B2).
Le bouton de la barre d'outils permettant de calculer directement cette somme est Σ.
3. a) Dans la cellule D11, on a entré la formule
=$B$4^D10.
En cliquant dans la cellule D15, on obtient la formule
=$B$4*D14.
b) La suite correspondant aux années 2011 et suivantes est strictement décroissante, car la raison est comprise entre 0 et 1.
Le nombre de tonnes de déchets devrait devenir inférieur à 1,3 millions en 2022.
c) Dans la cellule E11, on peut entrer la formule
=SOMME(D7:D10)
ou la formule
=D7*(1–B2^(B10–B7+1)/(1–B2).
Dans la cellule E17, on peut entrer la formule
=SOMME(D11:D16)
ou la formule
=D11*(1–B4^(B16–B11+1)/(1–B4).
4. Dans la cellule E25, on peut entrer la formule
=C25–D25.