Ds4 : 1h	MATHEMATIQUES	11/03/2013

NOM :

1. Cours (6 points)

1.1. Compléter le tableau de dérivées

Fonction f(x)	Dérivée f '(x)	Validité
k		k constante
x		$x \in \mathbb{R}$
x^2		$x \in \mathbb{R}$
x^3		$x \in \mathbb{R}$
x^n		$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ($x \neq 0$ si $n < 0$)
$\frac{1}{x}$		$x \in]-\infty ; 0[$ $x \in]0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$		$x \in]0 ; +\infty[$
mx + p		$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$		$x \in \mathbb{R}$

1.2. Citer le théorème concernant la dérivée de la somme de deux fonctions.

1.3. Si on multiplie une fonction par une constante, que devient sa dérivée ?

2. Problème

Partie A (6 points)

Dans une entreprise pharmaceutique, la production journalière de x litres de sirop amène un coût de fabrication, en € noté f(x), pour $0 \leq x \leq 100$.
Ce sirop étant revendu au prix de 7,50 € par litre, le chiffre d'affaires, en €, réalisé par l'entreprise, pour la vente de x litres est donc égal à **$g(x) = 7{,}5x$**.
On a tracé ci-contre la courbe C représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ; le volume, en litres, de sirop produit est porté en abscisse, et le coût de fabrication, en €, en ordonnée.

2.1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

a. Quel est le coût de fabrication pour une production journalière de 20 litres ? de 80 litres ?

b. Quelle production journalière correspond à un coût de fabrication de 250 € ?

c. Quelle est la production journalière maximale pour que le coût de fabrication n'excède pas 500 € ?

2.2.

a. Déduire de **2.1.a.** le coût d'un litre quand la production est 20 litres. 80 litres.

b. Sur le graphique précédent, tracer la droite d'équation **$y = 7{,}5x$**.

c. Déterminer graphiquement dans quel intervalle doit être situé le nombre journalier de litres de sirop produit pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

Partie B (8 points)

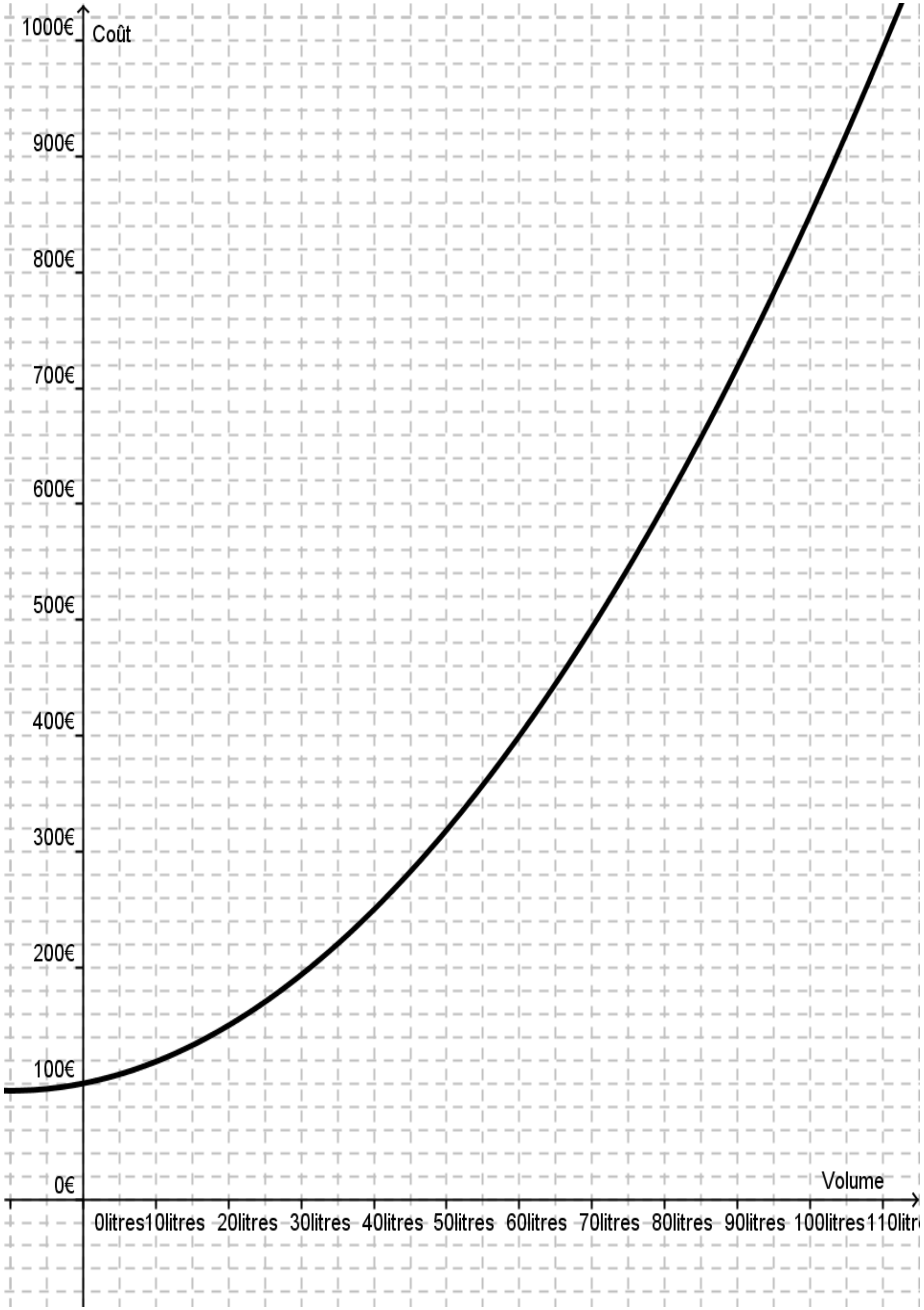
On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 100], par **$f(x) = 0{,}0625x^2 + 1{,}25x + 100$**

2.3. Calculer la dérivée de f, f '(x). En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2.4. Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x de [0 ; 100] par $h(x) = g(x) - f(x)$. h représente le bénéfice de l'entreprise.

a. Calculer la dérivée de h, h'(x). En déduire le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

b. Quel est le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser ? Déterminer la production journalière correspondante. Faire figurer ces résultats sur la courbe ci-jointe.



1. Cours (6 points)

f(x)	f '(x)	Validité
k	**0**	k constante
x	**1**	$x \in \mathbb{R}$
x^2	$\mathbf{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
x^3	$\mathbf{3x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$\mathbf{n.x^{n-1}}$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ($x \neq 0$ si $n < 0$)
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{\frac{-1}{x^2}}$	$x \in]-\infty ; 0[$ $x \in]0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$x \in]0 ; +\infty[$
mx + p	**m**	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	**2ax + b**	$x \in \mathbb{R}$

La dérivée de la somme de deux fonctions est égale à la somme de leurs dérivées.

Si on multiplie une fonction par une constante, sa dérivée est multipliée par la même constante.

2. Problème

Partie A (6 points)

2.1.

a. 20 litres → **150 €** et 80 litres → **600 €.**

b. 250 € → **40 litres**.

c. Coût < 500 € ⇔ Production **< 70,6 litres.**

2.2.

a. **7,5 € par litre**. Le bénéfice est nul pour 20 litres ou 80 litres.

b. Sur le graphique précédent, tracer la droite d'équation **y = 7,5x**.

c. Entre **20 et 80 litres** par jour l'entreprise est bénéficiaire.

Partie B (8 points)

2.3. $\mathbf{f'(x) = 0{,}125x + 1{,}25}$.

$f'(x) > 0$ pour $x > 0$ donc

f est croissante sur [0 ; 100].

x	0		100
f '		+	
f	100	↗	850

2.4. $h(x) = 6{,}25x - 0{,}0625x^2 - 100$.

a. $h'(x) = 6.25 - 0.125x$.

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 50$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 50$

donc h est croissante sur [0 ; 50] et décroissante sur [50 ; 100].

x	0		50		100
h '		+	0	–	
h	-100	↗	56.25	↘	-100

b. Le bénéfice maximal est **56.25 €** pour une production de **50 litres**.