CHAPITRE 5

Matrices et suites

SÉQUENCE 1 Suite de matrices colonnes (page 142)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1

A **1. Étape 1**

La louche aller contient 20 cL de café. Donc, après l'aller, A contient 80 cL de café et B 20 cL de café.

Donc, la louche retour contient $\frac{20}{6}$ cL de café.

On obtient :

$$a_1 = 80 + \frac{20}{6} = \frac{250}{3} \quad \text{et} \quad b_1 = 20 - \frac{20}{6} = \frac{50}{3}.$$

Étape 2

La louche aller contient $\frac{50}{3}$ cL de café. Donc, après l'aller, A contient $\frac{200}{3}$ cL de café et B contient $\frac{100}{3}$ cL de café.

Donc, la louche retour contient $\frac{100}{18}$ cL de café.

On obtient :

$$a_1 = \frac{200}{3} + \frac{100}{18} = \frac{650}{9} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{100}{3} - \frac{100}{18} = \frac{250}{9}.$$

2. Étape $n + 1$

La louche aller contient $\frac{1}{5}a_n$ de café. Donc, après l'aller, A contient $a_n - \frac{1}{5}a_n = \frac{4}{5}a_n$ et B contient $b_n + \frac{1}{5}a_n$.

Donc, la louche retour contient $\frac{1}{6}\left(b_n + \frac{1}{5}a_n\right)$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{30}a_n$.

Donc $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{30}a_n = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \\ b_{n+1} = b_n + \frac{1}{5}a_n - \left(\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{30}a_n\right) = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n. \end{cases}$

3. Voir en bas de page.

(a_n) et (b_n) semblent converger vers 50.

B **1.** $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}(100 - a_n) = \frac{2}{3}a_n + \frac{50}{3}$.

2. a) Pour $n = 0$, $a_0 > a_1 > 50$.

Si $a_n > a_{n+1} > 50$, alors :

$$\frac{2}{3}a_n + \frac{50}{3} > \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{50}{3} > \frac{2}{3} \times 50 + \frac{50}{3};$$

donc $a_{n+1} > a_{n+2} > 50$.

La propriété étant vraie pour 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout naturel n.

b) La suite (a_n) est décroissante et minorée ; elle est donc convergente.

c) Sa limite c vérifie $c = \frac{2}{3}c + \frac{50}{3}$, c'est-à-dire $c = 50$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	Café en A (en cl)	100	83,3	72,2	64,8	59,9	56,6	54,4	52,9	52,0	51,3	50,9	50,6	50,4	50,3	50,2	50,1	50,1	50,1	50,0	50,0	50,0
3	Café en B (en cl)	0	16,7	27,8	35,2	40,1	43,4	45,6	47,1	48,0	48,7	49,1	49,4	49,6	49,7	49,8	49,9	49,9	49,9	50,0	50,0	50,0

3. a) De $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{50}{3}$ et $c = \frac{2}{3} c + \frac{50}{3}$, on déduit, par soustraction membre à membre :

$$a_{n+1} - c = \frac{2}{3}\left(a_n - c\right).$$

Donc, $x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$: la suite (x_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $x_0 = 50$.

b) $x_n = 50 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc :

$$a_n = 50 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 50 = 50\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

4. $b_n = 100 - a_n = 50\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$. La suite (b_n) est croissante et a pour limite 50.

Donc, on tend vers des mélanges identiques dans les deux récipients.

5. *Cf.* le cours **§1.1**, page 148.

Remarque

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6} a_n + \frac{1}{6}(100 - a_n) = \frac{2}{3} a_n + \frac{50}{3} \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}(100 - b_n) + \frac{5}{6} b_n = \frac{2}{3} b_n + \frac{50}{3} \end{cases}.$$

Autrement dit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \end{pmatrix}$.

C = AC + B $\Leftrightarrow$ (I – A)C = B $\Leftrightarrow$ C = $(I - A)^{-1}$B.

Or I – A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ qui a pour inverse $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc C = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Alors $V_n = A^n(V_0 - C) + C$.

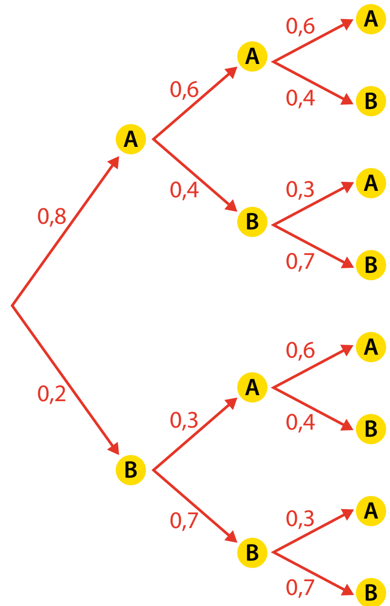
Or $V_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $V_0 - C = \begin{pmatrix} 50 \\ -50 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ -50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix},$$

d'où $a_n = 50\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ et $b_n = 50\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

Problème 2

A **1.** D'après l'arbre ci-dessous :

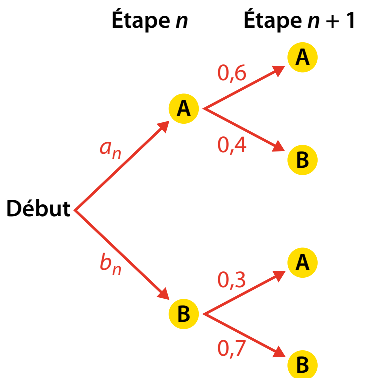


on obtient :

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}54 \\ b_1 = 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}46 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a_2 = 0{,}6 \times 0{,}54 + 0{,}3 \times 0{,}46 = 0{,}462 \\ b_2 = 0{,}4 \times 0{,}54 + 0{,}7 \times 0{,}46 = 0{,}538 \end{cases}.$$

2. L'arbre ci-dessous justifie les formules.



3. Cette formule se déduit des formules précédentes.

4. Voir en bas de page.

Il semble que les parts de marché se stabilisent autour de 43 % et 57 %.

B **1.** $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}6 a_n + 0{,}3(1 - a_n) = 0{,}3 a_n + 0{,}3 \\ b_{n+1} = 0{,}4(1 - b_n) + 0{,}7 b_n = 0{,}3 b_n + 0{,}4 \end{cases}.$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	*n*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	**Part de A**	0,8	0,54	0,4620	0,4386	0,4316	0,4295	0,4288	0,4287	0,4286	0,4286	0,4286	0,4286	0,4286
3	**Part de B**	0,2	0,46	0,5380	0,5614	0,5684	0,5705	0,5712	0,5713	0,5714	0,5714	0,5714	0,5714	0,5714

Autrement dit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{cases} a = 0,3a + 0,3 \\ b = 0,3b + 0,4 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = \dfrac{3}{7} \\ b = \dfrac{4}{7} \end{cases}$.

b) De $P_{n+1} = DP_n + E$ et $C = DC + E$, on déduit par soustraction membre à membre :

$$P_{n+1} - C = D(P_n - C), \text{ soit } X_{n+1} = DX_n.$$

c) Pour $n = 0$, $X_0 = D^0X_0$ puisque $D^0 = I$.

Si $X_n = D^nX_0$ alors $X_{n+1} = DX_n = DD^nX_0 = D^{n+1}X_0$.

La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout naturel n.

3. a) $D^n = 0,3^n\, I^n = 0,3^n\, I = \begin{pmatrix} 0,3^n & 0 \\ 0 & 0,3^n \end{pmatrix}$.

b) $X_0 = P_0 - C = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{35} \\ -\dfrac{13}{35} \end{pmatrix}$.

$X_n = \begin{pmatrix} 0,3^n & 0 \\ 0 & 0,3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{13}{35} \\ -\dfrac{13}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{35}\times 0,3^n \\ -\dfrac{13}{35}\times 0,3^n \end{pmatrix}$.

Donc $P_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} + \dfrac{13}{35}\times 0,3^n \\ \dfrac{4}{7} - \dfrac{13}{35}\times 0,3^n \end{pmatrix}$.

c) $\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{7} + \dfrac{13}{35}\times 0,3^n \\ b_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{13}{35}\times 0,3^n \end{cases}$

On vérifie les valeurs trouvées au **A.1**.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{7}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{4}{7}$.

Ce sont les parts de marché de AlloTel et BravoTel sur le long terme.

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$.

5. *Cf.* cours **§ 1.2**, page 149.

Remarque. a_n et b_n peuvent s'interpréter comme les probabilités, pour l'année 2010 + n, qu'un client pris au hasard soit chez AlloTel ou chez BravoTel. Il s'agit d'une marche aléatoire entre les deux états A et B.

Problème 3

A **1.** $j_0 = 20$, $a_0 = 0$; $j_1 = 20$, $a_1 = 5$.

j_n femelles donnent naissance à j_n jeunes et deviennent $0,25j_n$ adultes.

a_n femelles donnent naissance à $8a_n$ jeunes, puis meurent.

Donc $\begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25j_n \end{cases}$.

2. Voir en bas de page.

Les proportions de jeunes et d'adultes semblent se stabiliser autour de 89 % et 11 %.

À la longue, la population semble doubler tous les ans.

B **1.** $V_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_{n+1} = LV_n$.

2. Pour $n = 0$, $V_0 = L^0V_0$ car $V^0 = I$.

Si $V_n = L^nV_0$ alors $V_{n+1} = LL^nV_0 = L^{n+1}V_0$.

La propriété, vraie pour 0 et héréditaire, est donc vraie pour tout naturel n.

3. a) $L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0,25 & 1 \end{pmatrix}$

$= L + 2I$.

b) $L^0 = I = 0L + 1I$. Donc $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

Si $L^n = x_nL + y_nI$, alors :

$$L^{n+1} = (x_nL + y_nI)L = x_nL^2 + y_nL = x_n(L + 2I) + y_nL$$

$$= (x_n + y_n)L + 2x_nI.$$

Donc $x_{n+1} = x_n + y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n$.

c) Si $n = 0$, $\dfrac{2^0 - (-1)^0}{3} = 0 = x_0$ et $\dfrac{2^0 + 2(-1)^0}{3} = 1 = y_0$.

Si $x_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $y_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, alors :

$$x_{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}$$

et $y_n = 2\dfrac{2^n - (-1)^n}{3} = \dfrac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{3}$.

La propriété, étant vraie pour 0 et héréditaire, est donc vraie pour tout naturel n.

4. a) $V_n = L^nV_0 = (x_nL + y_nI)V_0 = x_nLV_0 + y_nV_0$

$$= x_n\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} + y_n\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	jeunes j_n	20	20	60	100	220	420	860	1700	3420	6820	13660	27300	54620
3	adultes a_n	0	5	5	15	25	55	105	215	425	855	1705	3415	6825
4	somme s_n	20	25	65	115	245	475	965	1915	3845	7675	15365	30715	61445
5	j_n/s_n	100%	80%	92%	87%	90%	88%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	89%
6	a_n/s_n	0%	20%	8%	13%	10%	12%	11%	11%	11%	11%	11%	11%	11%
7	*taux évolution*		25%	160%	77%	113%	94%	103%	98%	101%	100%	100%	100%	100%

b) $\begin{cases} j_n = 20x_n + 20y_n = 20\dfrac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3} \\ a_n = 5x_n = 5\dfrac{2^n-(-1)^n}{3} \end{cases}$

$s_n = j_n + a_n = 15\times 2^n + 5\times\left(-1\right)^n$.

5. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{j_n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{20}{3}\left[2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = \dfrac{40}{3}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = \dfrac{5}{3}$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{2^n} = 15$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{j_n}{s_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{j_n}{2^n}\times\dfrac{2^n}{s_n} = \dfrac{40}{3}\times\dfrac{1}{15} = \dfrac{8}{9}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{s_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n}\times\dfrac{2^n}{s_n} = \dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{9}$.

À long terme, les proportions de jeunes et d'adultes se stabilisent à $\dfrac{8}{9}$ et $\dfrac{1}{9}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_{n+1}-s_n}{s_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15\times 2^n - 10\times\left(-1\right)^n}{15\times 2^n + 5\times\left(-1\right)^n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{15-10\times\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{15+5\times\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n} = 1.$$

À long terme, le taux d'évolution est de 100 % ; autrement dit, la population double tous les ans.

Les résultats **b)** et **c)** confirment les conjectures du **A.1**.

Problème 4

A **1.** Le triangle est rectangle si, et seulement si, $a^2 + (a + 1)^2 = b^2$; c'est-à-dire $2a^2 + 2a + 1 = b^2$, ce qui équivaut à $2a(a + 1) - b^2 + 1 = 0$.

2. a) $a_1 = 20$, $b_1 = 29$. Le triangle de côtés 20, 21 et 29 est rectangle car $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2$.

b) $2a_{n+1}\left(a_{n+1}+1\right)-b_{n+1}^2 =$

$$= 2\left(3a_n+2b_n+1\right)\left(3a_n+2b_n+2\right)-\left(4a_n+3b_n+2\right)^2$$

$$= 2a_n\left(a_n+1\right)-b_n^2.$$

c) Pour $n = 0$, $2a_0\left(a_0+1\right)-b_0^2 = 2\times3\times4-5^2 = -1$.

Si $2a_n\left(a_n+1\right)-b_n^2 = -1$, alors, d'après ce qui précède $2a_{n+1}\left(a_{n+1}+1\right)-b_{n+1}^2 = -1$.

La propriété, étant vraie pour 0 et héréditaire, est donc vraie pour tout naturel n.

3.

	A	B	C
1	n	a_n	b_n
2	0	3	5
3	1	20	29
4	2	119	169
5	3	696	985
6	4	4059	5741
7	5	23660	33461

B **1.** $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

et $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= AU_n + B$.

2. a) $C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B \Leftrightarrow C = (I - A)^{-1}B$.

Or, $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ qui a pour inverse $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Donc $C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) De $U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$, on déduit, par soustraction membre à membre : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$.

c) Pour $n = 0$, $U_0 - C = A^0 (U_0 - C)$ puisque $A^0 = I$.

Si $U_n - C = A^n(U_0 - C)$, alors :

$$U_{n+1} - C = AA^n(U_0 - C) = A^{n+1}(U_0 - C).$$

La propriété, étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie pour tout naturel n.

3. $U_n = A^n\left(U_0-C\right)+C = \left(3+2\sqrt{2}\right)^n M\left(U_0-C\right)$

$$+\left(3-2\sqrt{2}\right)^n N\left(U_0-C\right)+C.$$

Or $U_0 - C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Donc $M(U_0 - C) = \begin{pmatrix} 1{,}75+1{,}25\sqrt{2} \\ 2{,}5+1{,}75\sqrt{2} \end{pmatrix}$

et $N(U_0 - C) = \begin{pmatrix} 1{,}75-1{,}25\sqrt{2} \\ 2{,}5-1{,}75\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\begin{cases} a_n = \left(1{,}75+1{,}25\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n \\ \qquad +\left(1{,}75-1{,}25\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n - 0{,}5 \\ b_n = \left(2{,}5+1{,}75\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)^n \\ \qquad +\left(2{,}5-1{,}75\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)^n \end{cases}$$

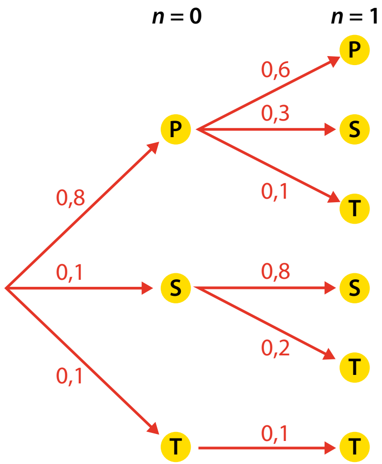
Remarques

1. Ces formules fournissent bien des valeurs entières car si on développe les termes $\sqrt{2}$ s'éliminent.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{2{,}5+1{,}75\sqrt{2}}{1{,}75+1{,}25\sqrt{2}} = \sqrt{2}$: le triangle tend à être rectangle isocèle.

Problème 5

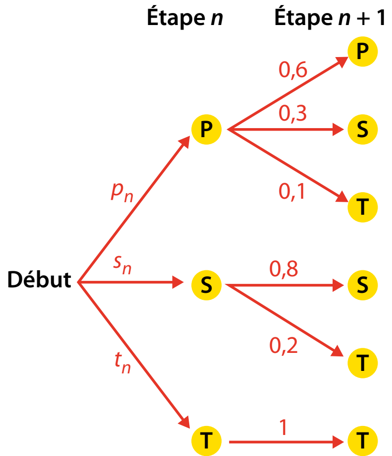
A **1.** D'après l'arbre ci-dessous :



on obtient :

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48 \\ s_1 = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}32 \\ t_1 = 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}1 = 0{,}20 \end{cases}.$$

2. D'après l'arbre ci-dessous :



on obtient :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6 p_n \\ s_{n+1} = 0{,}3 p_n + 0{,}8 s_n \\ t_{n+1} = 0{,}1 p_n + 0{,}2 s_n + t_n \end{cases}.$$

3.

	A	B	C	D	E
1	n	année	primaire	secondaire	tertiaire
2	0	1825	80%	10%	10%
3	1	1850	48%	32%	20%
4	2	1875	29%	40%	31%
5	3	1900	17%	41%	42%
6	4	1925	10%	38%	52%
7	5	1950	6%	33%	61%
8	6	1975	4%	28%	68%
9	7	2000	2%	24%	74%
10	8	2025	1%	20%	79%

On constate que la part du secteur primaire diminue régulièrement, celle du secteur tertiaire augmente régulièrement et celle du secteur secondaire augmente puis diminue.

B **1.** Les relations $\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6 p_n \\ s_{n+1} = 0{,}3 p_n + 0{,}8 s_n \\ t_{n+1} = 0{,}1 p_n + 0{,}2 s_n + t_n \end{cases}$ s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ s_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

2. Pour $n = 0$, $E_0 = M^0 E_0$ puisque $M^0 = I$.
Si $E_n = M^n E_0$, alors $E_{n+1} = ME_n = MM^n E_0 = M^{n+1} E_0$.
La propriété, étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie pour tout naturel n.

3. $$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ -0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0{,}6\,A.$$

$$BM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 1 & 0 \\ -1{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ -1{,}2 & -0{,}8 & 0 \end{pmatrix} = 0{,}8\,B.$$

$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

4. Si $n = 0$, $A + B + C = I = M^0$.
Si $M^n = 0{,}6^n A + 0{,}8^n B + C$, alors :

$$M^{n+1} = M^n M = 0{,}6^n AM + 0{,}8^n BM + CM$$
$$= 0{,}6^{n+1} A + 0{,}8^{n+1} B + C.$$

La propriété, étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie pour tout naturel n.

5. $E_n = M^n E_0 = 0{,}6^n AE_0 + 0{,}8^n BE_0 + CE_0$.

6. a) $E_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$, donc :

$$AE_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -1{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix},\ BE_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}3 \\ -1{,}3 \end{pmatrix},\ CE_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} p_n = 0{,}8 \times 0{,}6^n \\ s_n = -1{,}2 \times 0{,}6^n + 1{,}3 \times 0{,}8^n \\ t_n = 0{,}4 \times 0{,}6^n - 1{,}3 \times 0{,}8^n + 1 \end{cases}.$$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: la tendance à long terme est que tous les emplois soient dans le secteur tertiaire.

Remarque. a_n, b_n et c_n peuvent s'interpréter comme les probabilités qu'un travailleur de la génération n pris au hasard soit dans le secteur primaire, secondaire et tertiaire. Il s'agit donc d'une marche aléatoire entre les trois états P, S et T.

EXERCICES Application (page 150)

1 **1.** $I - A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de la matrice n'est pas nul : $ad - bc = -2$. Donc I – A est inversible, et :

$$(I - A)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) $AR = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -R$;

de même, $RA = -R$.

$AS = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2S$;

de même, $SA = 2S$.

b) Notons E_n l'égalité $A^n = (-1)^n R + 2^n S$.

E_0 est vraie : $(-1)^0 R + 2^0 S = R + S = I = A^0$.

E_n est héréditaire : si $A^n = (-1)^n R + 2^n S$, alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= A[(-1)^n R + 2^n S] = (-1)^n AR + 2^n AS \\ &= -(-1)^n R + 2 \times 2^n S \\ &= (-1)^{n+1} R + 2^{n+1} S. \end{aligned}$$

Donc, E_n est vraie pour tout naturel n.

3. Cherchons la matrice colonne C, telle que $C = AC + B$:

$$C = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Posons, pour tout naturel n : $X_n = U_n - C$.

De $U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$, on déduit, par différence :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C) \text{ soit } X_{n+1} = AX_n.$$

Donc, par récurrence, $X_n = A^n X_0$ pour tout n.

Or, $A^n = (-1)^n R + 2^n S$ pour tout n.

Donc $X_n = (1)^n RX_0 + 2^n SX_0$, pour tout n.

Or, $X_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; donc $RX_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $SX_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Finalement $X_n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout n.

On en déduit, pour tout naturel n :

$$U_n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 2^{n+1} + 5 \\ 2^{n+1} + 2 \end{pmatrix}.$$

2 **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors, pour tout $n \geqslant 3$, $A^n = A^{n-3} A^3 = O$.

b) Cherchons la matrice colonne C d'ordre 3, telle que $C = AC + B$, c'est-à-dire $(I - A)C = B$.

Or, $I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

De $U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$, on déduit :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C), \text{ d'où } U_n = A^n(U_0 - C) + C.$$

Or, à partir du rang 3, $A^n = O$, donc $U_n = C$.

c) Ce résultat est indépendant de U_0.

3 **1.** $I - A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

donc $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

2. a) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $MD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } MDM^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

c) L'égalité est vraie pour $n = 0$:

$$MD^0M^{-1} = MIM^{-1} = MM^{-1} = I = A^0.$$

L'égalité est héréditaire. Si $A^n = MD^nM^{-1}$ alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^nA &= MD^nM^{-1}MDM^{-1} = MD^n IDM = MD^n DM \\ &= MD^{n+1}M^{-1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout naturel n.

d) L'égalité est vraie pour $n = 0$: $D^0 = I$.

L'égalité est héréditaire :

si $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$$\text{alors } D^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

L'égalité est donc vraie pour tout naturel n.

3. a) Cherchons la matrice colonne C, telle que C = AC + B :

$$C = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Posons, pour tout naturel n, $X_n = U_n - C$. Alors, pour tout n, $X_{n+1} = AX_n$.

c) Pour tout naturel n, $X_n = A^nX_0 = MD^nM^{-1}X_0$.

Or $X_0 = U_o - C = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2^{n+1} \\ 3(-1)^{n+1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3(-1)^{n+1} \\ 3(-1)^{n+1} + 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

D'où $U_n = X_n + C = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3(-1)^{n+1} + 11 \\ 3(-1)^{n+1} + 3^n + 7 \\ 3^n + 3 \end{pmatrix}$.

4 **1.** $I - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de la matrice vaut 2. Donc I – A est inversible et $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. L'égalité est vérifiée pour $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3^0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

L'égalité est héréditaire :

si $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$,

alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie pour tout naturel n.

3. Cherchons la matrice ligne C, telle que $C = CA + B$:

$$C = B(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Pour tout naturel n :

$$V_n = (V_0 - C)A^n + C = \begin{pmatrix} 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 \times 2^n - 4 \end{pmatrix}.$$

5 **1.** $I - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La calculatrice indique que :

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. L'égalité est vérifiée pour $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^0 & 2^0 - 3^0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0.$$

L'égalité est héréditaire :

Si $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$,

alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 2^{n+1} - 3^{n+1} \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La propriété est donc vraie pour tout naturel n.

3. Cherchons la matrice ligne C, telle que $C = CA + B$:

$$C = B(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout naturel n,

$V_n = (V_0 - C)A^n + C$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n - 2 & 3^n + 3 & 2^{n+1} - 3^n + 2 \end{pmatrix}.$$

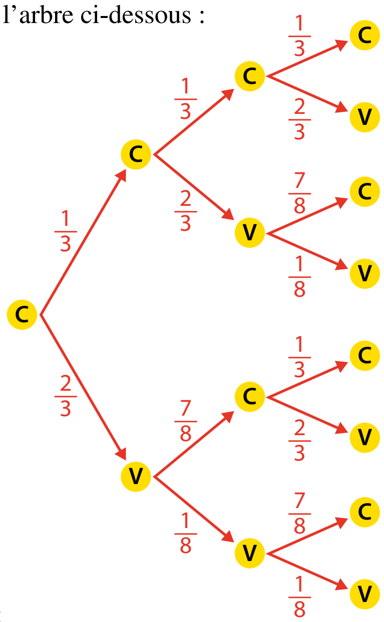
Étude de marches aléatoires (page 152)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 6

A **1.** Les sommets indiquent les deux possibilités : Voyelle ou Consonne ; les flèches indiquent les probabilités de passer de l'une à l'autre. Pour les deux flèches partant d'un même sommet, la somme des probabilités vaut 1 ; en effet, pour une lettre, il n'y a que ces deux possibilités et elles sont exclusives l'une de l'autre.

2. D'après l'arbre ci-dessous :



on obtient :

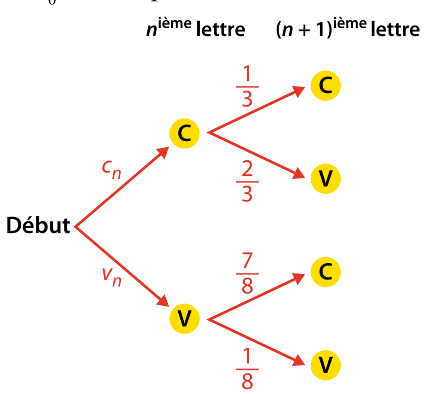
$$v_4 = \frac{2}{27} + \frac{1}{36} + \frac{7}{18} + \frac{1}{96} = \frac{433}{864} \approx 0{,}501$$

$$c_4 = \frac{1}{27} + \frac{7}{36} + \frac{7}{36} + \frac{7}{96} = \frac{431}{864} \approx 0{,}499$$

3. $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$; $\quad P_{C_n}(V_{n+1}) = \frac{2}{3}$;

$P_{V_n}(C_{n+1}) = \frac{7}{8}$; $\quad P_{V_n}(V_{n+1}) = \frac{1}{8}$.

4. $c_0 = 1$ et $v_0 = 0$. D'après l'arbre ci-dessous :



on obtient :

$$\begin{cases} c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{7}{8}v_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{8}v_n \end{cases}$$

5. Les relations ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $P_{n+1} = P_n T$.

6.

	A	B	C
1	n	c_n	v_n
2	1	1	0
3	2	0,333	0,667
4	3	0,694	0,306
5	4	0,499	0,501
6	5	0,605	0,395
7	6	0,547	0,453
8	7	0,578	0,422
9	8	0,562	0,438
10	9	0,571	0,429
11	10	0,566	0,434
12	11	0,569	0,431
13	12	0,567	0,433
14	13	0,568	0,432
15	14	0,567	0,433
16	15	0,568	0,432
17	16	0,568	0,432
18	17	0,568	0,432
19	18	0,568	0,432
20	19	0,568	0,432
21	20	0,568	0,432

Les probabilités semblent se stabiliser autour de 0,568 (consonne) et 0,432 (voyelle).

B **1.** $c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{7}{8}v_n = \frac{1}{3}c_n + \frac{7}{8}(1 - c_n) = -\frac{13}{24}c_n + \frac{7}{8}$.

2. a) $c = -\frac{13}{24}c + \frac{7}{8}$ équivaut à $\frac{37}{24}c = \frac{7}{8}$, soit $c = \frac{21}{37}$.

b) De $c_{n+1} = -\frac{13}{24}c_n + \frac{7}{8}$ et $c = -\frac{13}{24}c + \frac{7}{8}$, on déduit par soustraction :

$$c_{n+1} - c = -\frac{13}{24}(c_n - c), \text{ soit } x_{n+1} = -\frac{13}{24}x_n.$$

La suite (x_n) est donc géométrique de raison $-\frac{13}{24}$ et de premier terme $x_1 = c_1 - c = 1 - \frac{21}{37} = \frac{16}{37}$.

c) $x_n = \frac{16}{37}\left(-\frac{13}{24}\right)^{n-1}$, donc $c_n = \frac{16}{37}\left(-\frac{13}{24}\right)^{n-1} + \frac{21}{37}$.

3. $v_n = 1 - c_n = -\frac{16}{37}\left(-\frac{13}{24}\right)^{n-1} + \frac{16}{37}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{21}{37} & \frac{16}{37} \end{pmatrix}$. Cela confirme la conjecture du A, puisque $\frac{21}{37} \approx 0{,}568$ et $\frac{16}{37} \approx 0{,}432$.

Ces deux nombres s'interprètent comme les proportions respectives de consonnes et de voyelles dans l'ensemble de l'œuvre.

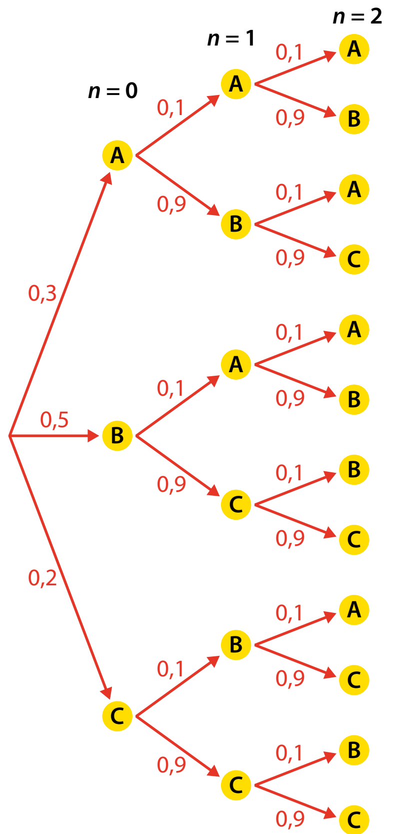
Problème 7

A **1.** • Si l'assuré est au tarif A, il y a une probabilité 0,1 pour qu'il y reste l'année suivante et 0,9 pour qu'il passe au tarif B.

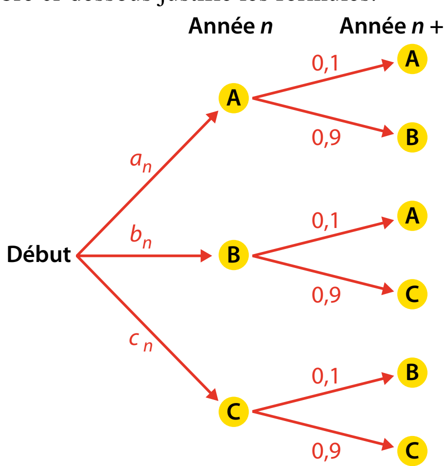
• Si l'assuré est au tarif B, il y a une probabilité 0,1 pour qu'il passe au tarif A l'année suivante et 0,9 pour qu'il passe au tarif C.

• Si l'assuré est au tarif C, il y a une probabilité 0,9 pour qu'il y reste l'année suivante et 0,1 pour qu'il passe au tarif B.

2. Voir l'arbre ci-dessous.



3. L'arbre ci-dessous justifie les formules.



4. a)

	A	B	C	D
1	n	a_0	b_0	c_0
2	0	0,3	0,5	0,2
3	1	0,080	0,290	0,630
4	2	0,037	0,135	0,828
5	3	0,017	0,116	0,867
6	4	0,013	0,102	0,885
7	5	0,012	0,100	0,888
8	6	0,011	0,099	0,890
9	7	0,011	0,099	0,890
10	8	0,011	0,099	0,890
11	9	0,011	0,099	0,890
12	10	0,011	0,099	0,890
13	11	0,011	0,099	0,890
14	12	0,011	0,099	0,890
15	13	0,011	0,099	0,890
16	14	0,011	0,099	0,890
17	15	0,011	0,099	0,890
18	16	0,011	0,099	0,890
19	17	0,011	0,099	0,890
20	18	0,011	0,099	0,890
21	19	0,011	0,099	0,890
22	20	0,011	0,099	0,890

b)

	A	B	C	D
1	n	a_0	b_0	c_0
2	0	0,7	0,2	0,1
3	1	0,090	0,640	0,270
4	2	0,073	0,108	0,819
5	3	0,018	0,148	0,834
6	4	0,017	0,100	0,884
7	5	0,012	0,103	0,885
8	6	0,011	0,099	0,890
9	7	0,011	0,099	0,890
10	8	0,011	0,099	0,890
11	9	0,011	0,099	0,890
12	10	0,011	0,099	0,890
13	11	0,011	0,099	0,890
14	12	0,011	0,099	0,890
15	13	0,011	0,099	0,890
16	14	0,011	0,099	0,890
17	15	0,011	0,099	0,890
18	16	0,011	0,099	0,890
19	17	0,011	0,099	0,890
20	18	0,011	0,099	0,890
21	19	0,011	0,099	0,890
22	20	0,011	0,099	0,890

c) Dans les deux cas, les valeurs de a_n, b_n et c_n semblent se stabiliser respectivement autour de 0,011 ; 0,099 et 0,890.

B **1.** Les formules du A3 peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix},$$

soit $P_{n+1} = P_n T$.

2. Pour $n = 0$, $P_0 = P_0 T^0$ puisque $T^0 = I$.

Si $P_n = P_0 T^n$, alors $P_{n+1} = P_n T = P_0 T^n T = P_0 T^{n+1}$.

La propriété étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout naturel n.

3. $\begin{cases} a = 0{,}1a + 0{,}1b \\ b = 0{,}9a + 0{,}1c \\ c = 0{,}9b + 0{,}9c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} b = 9a \\ c = 9b \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = \frac{1}{91} \\ b = \frac{9}{91} \\ c = \frac{81}{91} \end{cases}$.

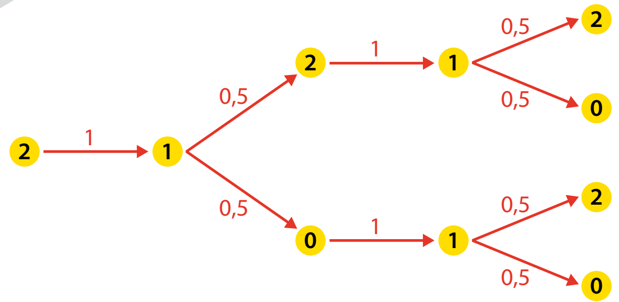
4. a) $E(X) = \frac{1}{91} \times 455 + \frac{9}{91} \times 364 + \frac{81}{91} \times 273 = PU = 284$.

b) L'espérance de gain pour la compagnie est de 284 € par assuré ; l'espérance de coût est de 280 € par assuré.

La compagnie peut donc espérer un bénéfice net de 4 € par assuré.

Problème 8

A **1.** Voir l'arbre ci-dessous.



2. Au début, les deux puces sont sur Pollux, donc : $\begin{cases} p_0 = 0 \\ q_0 = 1 \\ r_0 = 1 \end{cases}$

Alors, d'après l'arbre, $\begin{cases} p_1 = 0 \\ q_1 = 1 \\ r_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} p_2 = 0{,}5 \\ q_2 = 0 \\ r_2 = 0{,}5 \end{cases}$.

3. Quand il y a deux puces sur Pollux, il est certain qu'à la minute suivante, il y en aura une.
Quand il y en a une, à la minute suivante, il y en aura soit 0, soit 2 (selon celle qui change de chien) de façon équiprobable.
Quand il y en a 0, il est certain qu'à la minute suivante, il y en aura une.

4. $p_{n+1} = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 0\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n=1}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 0\right) = q_n \times 0{,}5.$

$q_{n+1} = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 1\right) =$

$= \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = 0\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n=0}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 1\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = 2\right) \times \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n=2}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 1\right)$

$= p_n \times 1 + r_n \times 1 = p_n + r_n.$

$r_{n+1} = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 2\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n=1}\left(\mathrm{X}_{n+1} = 2\right) = q_n \times 0{,}5.$

5.

	A	B	C	D
1	n	p_0	q_0	r_0
2	0	0	1	1
3	1	0,5	1	0,5
4	2	0,5	1	0,5
5	3	0,5	1	0,5
6	4	0,5	1	0,5
7	5	0,5	1	0,5
8	6	0,5	1	0,5
9	7	0,5	1	0,5
10	8	0,5	1	0,5
11	9	0,5	1	0,5
12	10	0,5	1	0,5
13	11	0,5	1	0,5
14	12	0,5	1	0,5
15	13	0,5	1	0,5
16	14	0,5	1	0,5
17	15	0,5	1	0,5
18	16	0,5	1	0,5
19	17	0,5	1	0,5
20	18	0,5	1	0,5
21	19	0,5	1	0,5
22	20	0,5	1	0,5

Quand n est impair, $p_n = q_n = 0$ et $r_n = 1$.
Quand n est pair non nul, $p_n = q_n = 0{,}5$ et $r_n = 0$.

B **1.** $\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}5 q_n \\ q_{n+1} = p_n + r_n \\ r_{n+1} = 0{,}5 q_n \end{cases}$, peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

soit $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n\mathrm{T}$. Par récurrence, on en déduit que $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\mathrm{T}^n$, pour tout naturel n.

2. a) $\mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{T}^3 = \mathrm{T}$.

b) $\mathrm{T}^3 = \mathrm{T}$ implique $\mathrm{T}^4 = \mathrm{T}^2$, $\mathrm{T}^5 = \mathrm{T}^3 = \mathrm{T}$, etc.
Par récurrence, on peut formaliser que $\mathrm{T}^{2k} = \mathrm{T}^2$, pour tout naturel k non nul.
On en déduit que $\mathrm{T}^{2k+1} = \mathrm{T}^{2k}\mathrm{T} = \mathrm{T}^2\,\mathrm{T} = \mathrm{T}^3 = \mathrm{T}$.

c) • Si n est pair non nul :

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\mathrm{T}^n = \mathrm{P}_0\mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} p_n = 0{,}5 \\ q_n = 0 \\ r_n = 0{,}5 \end{cases}$.

• Si n est impair :

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\mathrm{T}^n = \mathrm{P}_0\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} p_n = 0 \\ q_n = 1 \\ r_n = 0 \end{cases}$.

d) Selon que n est pair ou impair, on retrouve bien les valeurs de la question précédente.

3. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0 \times p_n + 1 \times q_n + 2 \times r_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2} + \dfrac{1+(-1)^n}{2} = 1.$

On peut s'attendre en moyenne à trouver à chaque minute une puce sur Pollux. En effet, soit il y en a effectivement une seule, soit il y en a 0 ou 2 avec équiprobabilité.

C **1.** Si n est impair, Pollux a une seule puce ; donc n n'est pas une valeur possible pour D.

2. a) On peut se référer à l'arbre du **A.1.**, entre l'étape $2k$ et l'étape $2k + 2$:
• S'il y a 0 puce sur Pollux, deux minutes plus tard, il y en aura 0 ou 2 de façon équiprobable.
• S'il y a 2 puces sur Pollux, deux minutes plus tard, il y en aura 0 ou 2 de façon équiprobable.
Posons, pour tout naturel k non nul : $u_k = \mathrm{P}(\mathrm{D} = 2k)$.

$u_{k+1} = \mathrm{P}(\mathrm{D} = 2k+2) = \mathrm{P}(\mathrm{D} = 2k) \times \mathrm{P}_{\mathrm{D}=2k}(\mathrm{D} = 2k+2)$

$\quad = \mathrm{P}(\mathrm{D} = 2k) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} u_k.$

La suite (u_k) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = \mathrm{P}(\mathrm{D} = 2) = \dfrac{1}{2}$.

Donc, pour tout naturel k non nul, $u_k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

3. P(D = 2 ou D = 4) = P(D = 2) + P(D = 4) = $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
C'est bien ce qu'indique l'arbre du **A.1**.

Problème 9

A **1.** • Si la suite est dans l'état A, et qu'on ajoute un chiffre, alors :

– ou bien ce nouveau chiffre est le même que le dernier et la suite passe à l'état B ;

– ou bien il est différent et la suite reste à l'état A.

• Si la suite est dans l'état B, et qu'on ajoute un chiffre, alors :

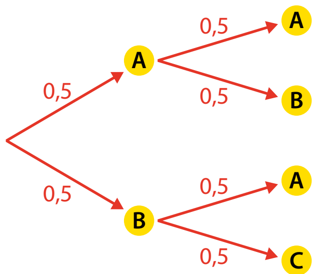
– ou bien ce nouveau chiffre est le même que le dernier et la suite passe à l'état C,

– ou bien il est différent et la suite passe à l'état A.

• Si la suite est dans l'état C et qu'on ajoute un chiffre, alors la suite reste dans l'état C.

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

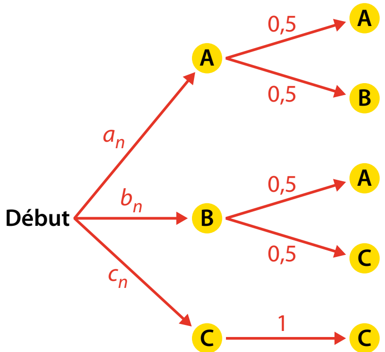
2. a) D'après l'arbre ci-dessous :



$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$.

b) D'après l'arbre ci-dessous :



On obtient :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,5b_n \\ b_{n+1} = 0,5a_n \\ c_{n+1} = 0,5b_n + c_n \end{cases}$$

qui peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

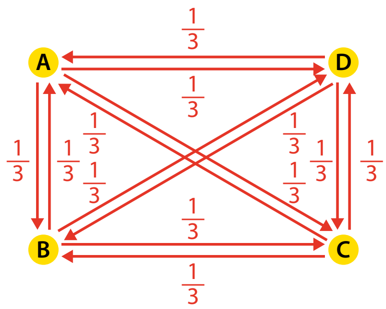
3.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	2	0,5	0,5	0
3	3	0,5	0,25	0,25
4	4	0,375	0,250	0,375
5	5	0,313	0,188	0,500
6	6	0,250	0,156	0,594
7	7	0,203	0,125	0,672
8	8	0,164	0,102	0,734
9	9	0,133	0,082	0,785
10	10	0,107	0,066	0,826
11	11	0,087	0,054	0,859
12	12	0,070	0,043	0,886
13	13	0,057	0,035	0,908
14	14	0,046	0,028	0,926
15	15	0,037	0,023	0,940

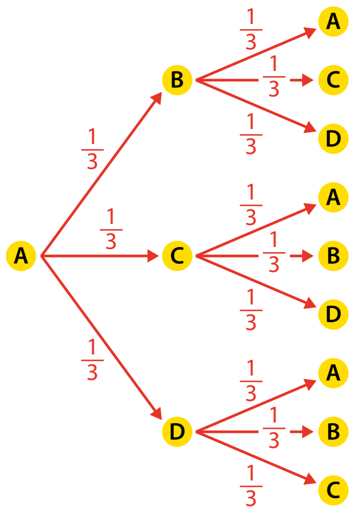
On constate que la probabilité cherchée c_{15} est environ 0,94 : autrement dit, il est très probable qu'une séquence de 15 chiffres binaires équirépartis contienne au moins une séquence de trois chiffres identiques.

Problème 10

1. Graphe probabiliste ci-dessous.



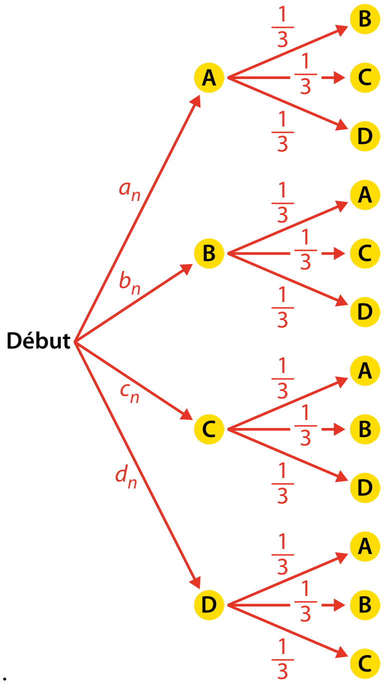
2. Les possibilités de parcours des deux premières arêtes sont représentées sur l'arbre ci-dessous.



3. $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4. a) D'après l'arbre ci-dessous :



On obtient :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

qui peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $P_{n+1} = P_n T$.

b) Pour $n = 0$, $P_0 = P_0 T^0$ puisque $T^0 = I$.

Si $P_n = P_0 T^n$, alors $P_{n+1} = P_n T = P_0 T^n T = P_0 T^{n+1}$.

La propriété, étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, est vraie pour tout naturel n.

5. a) $a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{3}(1 - a_n)$.

b) $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$.

L'équation $x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ a pour solution $x = \frac{1}{4}$.

On en déduit $a_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, d'où :

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

La probabilité cherchée est $a_6 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{61}{243} \approx 0{,}251$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$. Sur une longue période, la fourmi passe en A une fois sur 4.

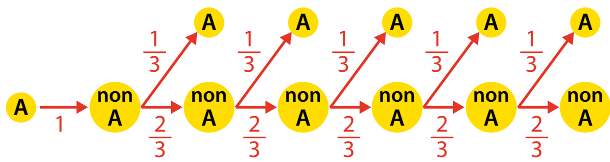
6. $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$, donc $a_n + 3b_n = 1$, d'où :

$$b_n = \frac{1 - a_n}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$: sur une longue période, chaque sommet est également visité.

7. a)



b) $p = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81}\right) = \frac{211}{243} \approx 0{,}87$.

EXERCICES Application (page 160)

6 Notons A et E, les deux états « Allumée » et « Éteinte » et classons-les dans cet ordre.

La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, de la forme $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $p = 0,25$ et $q = 0,4$.

Comme (p, q) est différent de $(0, 0)$ et de $(1, 1)$, la répartition de probabilité converge vers la répartition stable $\begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \frac{8}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$.

Or $\frac{8}{13} \approx 0,62$. Sur une longue période, la diode est allumée environ 62 % du temps.

7 Notons D et F, les deux états « Vent défavorable » et « Vent favorable » et classons-les dans cet ordre.

La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, de la forme

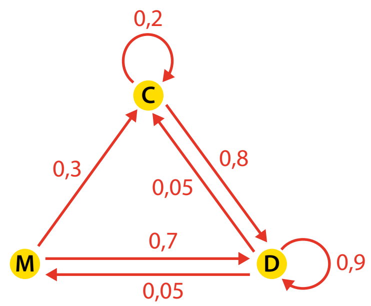
$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $p = \frac{3}{5}$ et $q = \frac{2}{3}$.

Comme (p, q) est différent de $(0, 0)$ et de $(1, 1)$, la répartition de probabilité converge vers la répartition stable :

$$\begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{9}{19} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}.$$

Sur une longue période, le vent est favorable environ 53 % du temps, défavorable 47 % du temps.

8 **1.** $T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}$.



2. $T^2 = \begin{pmatrix} 0,08 & 0,88 & 0,04 \\ 0,07 & 0,885 & 0,045 \\ 0,095 & 0,87 & 0,035 \end{pmatrix}$.

Or $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$P_2 = P_0T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,08 & 0,88 & 0,04 \\ 0,07 & 0,885 & 0,045 \\ 0,095 & 0,87 & 0,035 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,07 & 0,885 & 0,045 \end{pmatrix}.$$

3. T^2 n'a aucun coefficient nul ; donc (P_n) converge vers la répartition stable de probabilité $P = (c \;\; d \;\; m)$.

Déterminons P :

$$\begin{cases} 0,2c + 0,05d + 0,3m = c \\ 0,8c + 0,9d + 0,7m = d \\ 0,05d = m \\ c + d + m = 1 \end{cases}$$ équivaut à :

$$\begin{cases} 0,8c - 0,065d = 0 \\ 0,05d = m \\ c + d + m = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} c = \frac{13}{160}d \\ m = \frac{1}{20}d \\ \frac{13}{160}d + d + \frac{1}{20}d = 1 \end{cases}.$$

La dernière équation fournit :

$$d = \frac{160}{181}, \text{ d'où } m = \frac{8}{181} \text{ et } c = \frac{13}{181}.$$

Ainsi $P = \begin{pmatrix} \frac{13}{181} & \frac{160}{181} & \frac{8}{181} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,07 & 0,88 & 0,04 \end{pmatrix}$.

Sur une longue période, Bill passe 7 % de son temps à courir, 88 % à dormir et 4 % à manger.

9 **1.** $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$,

donc $T^7 \approx \begin{pmatrix} 0,34 & 0,17 & 0,49 \\ 0,34 & 0,17 & 0,49 \\ 0,32 & 0,16 & 0,51 \end{pmatrix}$.

$$P_7 = P_0T^7 \approx \begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,34 & 0,17 & 0,49 \\ 0,34 & 0,17 & 0,49 \\ 0,32 & 0,16 & 0,51 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0,33 & 0,17 & 0,51 \end{pmatrix}.$$

On peut prévoir 33 % de patients en soins réguliers, 17 % en soins intensifs et 51 % à l'extérieur.

2. T n'a aucun coefficient nul ; donc (P_n) converge vers la répartition stable de probabilité $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Déterminons P :

$$\begin{cases} 0{,}6a+0{,}5b+0{,}1c=a \\ 0{,}2a+0{,}3b+0{,}1c=b \\ 0{,}2a+0{,}2b+0{,}8c=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \text{ équivaut à : }$$

$$\begin{cases} 4a-5b-c=0 \\ 2a-7b+c=0 \\ a+b-c=0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 4a-5b=0{,}5 \\ 2a-7b=-0{,}5 \\ a+b=0{,}5 \\ c=0{,}5 \end{cases},$$

c'est-à-dire $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{1}{6} \\ c=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

À long terme, on peut prévoir 1 patient sur 3 en soins réguliers, 1 sur 6 en soins intensifs et 1 sur 2 à l'extérieur.

10 **1.** $T=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{c}{6}+\dfrac{k}{6}+\dfrac{p}{3}+\dfrac{t}{3}=c \\ \dfrac{c}{3}+\dfrac{k}{6}+\dfrac{p}{6}+\dfrac{t}{3}=k \\ \dfrac{c}{3}+\dfrac{k}{3}+\dfrac{p}{6}+\dfrac{t}{6}=p \\ \dfrac{c}{6}+\dfrac{k}{3}+\dfrac{p}{3}+\dfrac{t}{6}=t \\ c+k+p+t=1 \end{cases}$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} -5c+k+2p+2t=0 \\ 2c-5k+p+2t=0 \\ 2c+2k-5p+t=0 \\ c+2k+2p-5t=0 \\ c+k+p+t=1 \end{cases}, \text{ d'où } c=k=p=t=\frac{1}{4}.$$

Sur une longue partie, les quatre cases sont équiprobables.

3. Soit n le nombre de coups de la partie, supposé suffisamment grand, pour que la répartition de probabilité entre les 4 cases soit sensiblement la répartition stable. Notons C, K, P et T, les variables aléatoires indiquant respectivement le nombre de passage par les cases Cœur, Carreau, Pique, Trèfle, et X la variable aléatoire qui indique le gain final du joueur. X = C + K – P – T, donc :

$$E(X)=E(C)+E(K)-E(P)-E(T)=\frac{n}{4}+\frac{n}{4}-\frac{n}{4}-\frac{n}{4}=0.$$

Le jeu est équitable.

EXERCICES sur l'ensemble des séquences (page 164)

EXERCICES Activités de recherche (page 164)

15 **Structure de population**

• Les outils

– Suite de matrices colonne (P_n) telles que $P_{n+1} = TP_n$.

• Les objectifs

– Étudier l'évolution d'une structure de population.

1. $P_{n+1} = TP_n$ équivaut à :

$$\begin{cases} j_{n+1}=1{,}2a_n \\ a_{n+1}=j_n+0{,}2a_n \\ v_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}5v_n \end{cases}.$$

D'une génération à la suivante :

• En moyenne les adultes donnent naissance à 1,2 jeunes par adulte (soit un taux de fécondité de 2,4 enfants par femme).

• Tous les jeunes deviennent adultes ; 20 % des adultes restent dans la catégorie adulte (autrement dit 80 % des adultes deviennent vieux ou meurent).

• 70 % des adultes deviennent des personnes âgées (donc, d'après ce qui précède, 10 % des adultes meurent) ; et 50 % des personnes âgées survivent (donc 50 % meurent).

2. a) Supposons que $j_n = a_n = v_n$. Alors $j_{n+1} = 1{,}2\,a_n$, $a_{n+1} = 1{,}2\,a_n$ et $v_{n+1} = 1{,}2\,a_n$. Donc $j_{n+1} = a_{n+1} = v_{n+1}$.

b) $j_{n+1} = 1{,}2 j_n$, $a_{n+1} = 1{,}2\,a_n$ et $v_{n+1} = 1{,}2_{vn}$.

Donc $j_{n+1} + a_{n+1} + v_{n+1} = 1{,}2\,(j_n + a_n + v_n)$.

La population totale est multipliée par 1,2 : elle augmente de 20 %.

3. a) $P_1 = \begin{pmatrix} 48 \\ 38 \\ 43 \end{pmatrix}$. La population totale est passée de 100 à 129, soit une augmentation de 29 %.

b) $P_4 = T^4 P_0$. Or $T^4 = \begin{pmatrix} 1{,}488 & 0{,}5856 & 0 \\ 0{,}488 & 1{,}5856 & 0 \\ 1{,}113 & 0{,}8981 & 0{,}0625 \end{pmatrix}$.

Donc $P_4 = \begin{pmatrix} 68{,}064 \\ 78{,}064 \\ 71{,}189 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 68 \\ 78 \\ 71 \end{pmatrix}$.

16 Le rat

• ***Les outils***

– Graphe probabiliste.

– Matrice de transition.

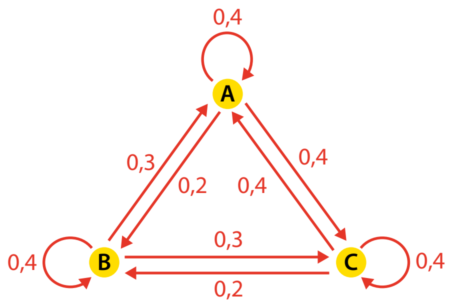
– Répartition stable de probabilité.

– Théorème de convergence.

• ***Les objectifs***

– Étudier une marche aléatoire entre trois états.

1. *Cf.* figure ci-dessous.



2. $T = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

3. a) T n'a aucun coefficient nul ; donc, d'après le Théorème 6, la suite des répartitions de probabilité (P_n) converge vers la répartition stable.

b) Cherchons la répartition stable $P = (a \quad b \quad c)$:

$$\begin{cases} 0{,}4a + 0{,}3b + 0{,}4c = a \\ 0{,}2a + 0{,}4b + 0{,}2c = b \\ 0{,}4a + 0{,}3b + 0{,}4c = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -6a + 3b + 4c = 0 \\ 2a - 6b + 2c = 0 \\ 4a + 3b - 6c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}.$$

Par exemple, on peut tirer $c = 1 - a - b$ de la dernière équation et reporter dans les trois autres :

$$\begin{cases} 10a + b = 4 \\ 8b = 2 \\ 10a + 9b = 6 \\ c = 1 - a - b \end{cases}.$$

On en déduit $b = \frac{1}{4}$, d'où $a = \frac{3}{8}$ puis $c = \frac{3}{8}$.

Finalement $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

À long terme, le rat passe 37,5 % de son temps dans le compartiment A, 25 % dans le B et 37,5 % dans le C.

17 Narration de recherche

• **Si $a = 1$**, la suite (u_n) est arithmétique de raison b. Elle est donc croissante, constante ou décroissante selon que b est positif, nul ou négatif.

• **Si $a \neq 1$**, il existe c unique tel que $c = ac + b$. Alors, pour tout naturel n, $u_n = a^n(u_0 - c) + c$.

– Si $a < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone (les termes sont alternativement inférieurs ou supérieurs à c), sauf si $u_0 = c$ où elle est constante.

– Si $a = 0$, la suite (u_n) est constante à partir de $n = 1$.

– Si $0 < a < 1$, la suite (u_n) est décroissante, constante ou croissante selon que $u_0 > c$, $u_0 = c$, $u_0 < c$.

– Si $a > 1$, la suite (u_n) est croissante, constante ou décroissante selon que $u_0 > c$, $u_0 = c$, $u_0 < c$.

18 Narration de recherche

Nous supposerons bien entendu que la pièce est équilibrée.

Alors, la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.

Le Théorème 6 s'applique car $T^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, qui n'a aucun coefficient nul.

Cherchons la répartition stable de probabilité $P = (e \quad n \quad s)$:

$$\begin{cases} 0{,}5n + 0{,}5s = e \\ 0{,}5e + 0{,}5s = n \\ 0{,}5e + 0{,}5n = s \\ e + n + s = 1 \end{cases}.$$ Cela implique $e = n = s = \frac{1}{3}$.

Donc, à long terme, les trois sommets ont autant de chances d'être visités.

19 TD – Pertinence d'une page web

A. $T = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}45 & 0{,}02 & 0{,}45 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}45 & 0{,}02 & 0{,}45 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}88 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}45 & 0{,}02 & 0{,}45 \\ 0{,}45 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}45 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}88 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}88 & 0{,}02 \end{pmatrix}$.

B. 1. a) L'égalité $P_n K = V$ traduit le fait que, pour chaque ligne, la somme des coefficients de P_n est égale à 1.

b) $$T = \begin{pmatrix} 0 & 0,43 & 0 & 0,43 & 0 & 0 & 0 \\ 0,43 & 0 & 0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,43 & 0 & 0,43 \\ 0,43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,86 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,86 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \\ 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \end{pmatrix}$$

T = A + 0,02K.

Donc, l'égalité $P_{n+1} = P_nT$ équivaut à :

$$P_{n+1} = P_n(A + 0,02K) = P_nA + 0,02\,V = P_nA + B.$$

2. Voir en bas de page.

On constate que les valeurs de P_n se stabilisent à :
(0,164 0,091 0,059 0,249 0,127 0,184 0,127) ; cela fournit les valeurs approchées à 10^{-3} près des indices de pertinence de chaque page.

Remarques

1. La matrice limite P vérifie PT = P (Théorème 6) mais aussi P = PA + B (*cf.* **I.2.** du cours page 149). Mais T – I n'est pas inversible, alors que A – I est inversible.

2. Au chapitre 4, on avait trouvé des valeurs différentes : (0,138 0,069 0,034 0,276 0,138 0,207 0,138), correspondant à une probabilité 0 (au lieu de 0,14) de choisir au hasard une page. Mais l'ordre des pages est le même :

$$\text{Page4} > \text{Page6} > \text{Page1} \geqslant \text{Page5}$$
$$= \text{Page7} > \text{Page2} > \text{Page3}.$$

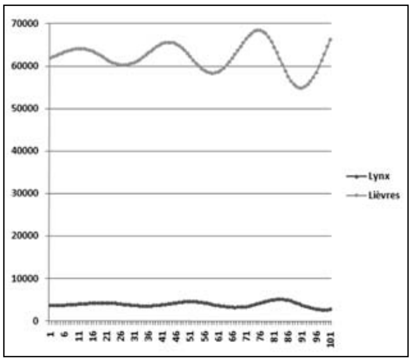
20 TD – Lynx et lièvres

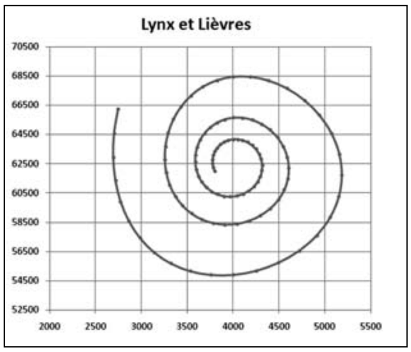
A. 1. Avec les coefficients indiqués, les relations :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-b)u_n + au_nv_n \\ v_{n+1} = (1+c)v_n - du_nv_n \end{cases}$$

s'écrivent : $$\begin{cases} u_{n+1} = 0,5\,u_n + 8\times10^{-6}\,u_nv_n \\ v_{n+1} = 1,08\,v_n - 2\times10^{-5}\,u_nv_n \end{cases}.$$

2.





B. 1. u_e et v_e doivent vérifier : $\begin{cases} av_eu_e - bu_e = 0 \\ cv_e - du_ev_e = 0 \end{cases}$.

En écartant la solution triviale $u_e = v_e = 0$, on obtient :

$$u_e = \frac{c}{d} = 4\,000 \text{ et } v_e = \frac{b}{a} = 62\,500.$$

2. $u_n = x_n + u_e = x_n + 4\,000$ et $v_n = y_n + v_e = y_n + 62\,500$.

En reportant ces expressions dans les relations de récurrence, on obtient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,032\,y_n + 8\times10^{-6}\,x_ny_n \\ y_{n+1} = -1,25\,x_n + y_n - 2\times10^{-5}x_ny_n \end{cases}.$$

3.a) Si on néglige les termes en x_ny_n, ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,032\,y_n \\ y_{n+1} = -1,25\,x_n + y_n \end{cases},$$

soit $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,032 \\ -1,25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

b) On obtient des courbes analogues.

c) L'égalité du **a)** s'écrit $P_{n+1} = AP_n$; d'où, par récurrence $P_n = A^n P_0$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*n*	page 1	page 2	page 3	page 4	page 5	page 6	page 7
2	0	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0,020	0,450	0,020	0,450	0,020	0,020	0,020
4	2	0,239	0,029	0,214	0,046	0,214	0,046	0,214
5	3	0,308	0,123	0,032	0,162	0,040	0,295	0,040
6	4	0,118	0,152	0,073	0,406	0,090	0,071	0,090

⋮

33	31	0,164	0,091	0,059	0,249	0,127	0,183	0,127
34	32	0,164	0,090	0,059	0,248	0,127	0,184	0,127
35	33	0,164	0,091	0,059	0,249	0,127	0,184	0,127
36	34	0,164	0,091	0,059	0,249	0,127	0,183	0,127
37	35	0,164	0,091	0,059	0,248	0,127	0,184	0,127

EXERCICES Entraînement (page 65)

DE TÊTE

21 **a)** La relation de récurrence est de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b, \text{ avec } a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -1.$$

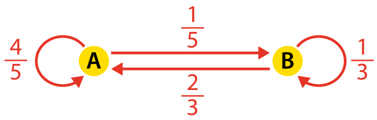
Comme $-1 < a < 1$, la suite (u_n) converge vers c tel que $c = -\frac{1}{2}c - 1$, soit $c = -\frac{2}{3}$.

b) La relation de récurrence est de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b, \text{ avec } a = 2 \text{ et } b = 2.$$

$a > 1$ donc la suite est divergente ; sauf si $u_0 = -2$, auquel cas elle est constante.

22



La marche aléatoire converge, car $p = \frac{1}{5}$ et $q = \frac{2}{3}$: ils ne sont pas tous deux nuls, ni tous deux égaux à 1.

23 $\begin{pmatrix} 0{,}7 & \mathbf{0{,}3} \\ \mathbf{0{,}2} & 0{,}8 \end{pmatrix}$. $p = 0{,}3$ et $q = 0{,}2$, donc $\frac{q}{p+q} = 0{,}4$ et $\frac{p}{p+q} = 0{,}6$.

La marche aléatoire converge vers la répartition stable de probabilité $(0{,}4 \;\; 0{,}6)$.

24 $\begin{pmatrix} \mathbf{0{,}4} & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & \mathbf{0{,}5} & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & \mathbf{0{,}2} \end{pmatrix}$. Cette matrice n'a aucun coefficient nul ; donc la marche aléatoire converge.

25 *Corrigé sur le site élève.*

26 **1.** $V_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n \end{cases} \text{ peut s'écrire } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}(100 - a_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}(100 - b_n) + \frac{5}{6}b_n \end{cases};$$

c'est-à-dire $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{50}{3} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{50}{3} \end{cases}$,

soit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \end{pmatrix}$,

soit $V_{n+1} = AV_n + B$.

2. $A^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n I = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

3. Cherchons $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ telle que $C = AC + B$:

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}a + \frac{50}{3} \\ b = \frac{2}{3}b + \frac{50}{3} \end{cases} \text{ implique } a = b = 50.$$

$$V_n = A^n(V_0 - C) + C = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ -50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} a_n = 50\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ b_n = 50\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \end{cases}$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$.

27 **1.** $P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}9\, r_n + 0{,}05\, u_n \\ u_{n+1} = 0{,}1 r_n + 0{,}95 u_n \end{cases}$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n \\ u_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $P_{n+1} = MP_n$.

2. $\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}9 r_n + 0{,}05 u_n \\ u_{n+1} = 0{,}1 r_n + 0{,}95 u_n \end{cases}$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}9 r_n + 0{,}05(10 - r_n) \\ u_{n+1} = 0{,}1(10 - u_n) + 0{,}95 u_n \end{cases},$$

c'est-à-dire $\begin{cases} r_{n+1} = 0{,}85 r_n + 0{,}5 \\ u_{n+1} = 0{,}85 u_n + 1 \end{cases}$ soit $P_{n+1} = AP_n + B$.

3. De $A = 0{,}85\,I$, on déduit :

$$A^n = 0{,}85^n I = \begin{pmatrix} 0{,}85^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{pmatrix}.$$

4. Cherchons $C = \begin{pmatrix} r \\ u \end{pmatrix}$ telle que $C = AC + B$:

$$\begin{cases} r = 0{,}85 r + 0{,}5 \\ u = 0{,}85 u + 1 \end{cases} \text{ implique } r = \frac{10}{3} \text{ et } u = \frac{20}{3}.$$

$$P_n = A^n(P_0 - C) + C = \begin{pmatrix} 0{,}85^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{cases} r_n = \frac{10}{3} + \frac{8}{3} \times 0{,}85^n \\ u_n = \frac{20}{3} - \frac{8}{3} \times 0{,}85^n \end{cases}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} 0,85^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$.

La population tend vers une répartition stable constituée pour $\frac{1}{3}$ de ruraux et pour $\frac{2}{3}$ d'urbains.

Remarque. Si on raisonnait sur les proportions et non les effectifs, on pourrait traduire les données en termes de probabilités.

Il s'agit d'une marche aléatoire entre deux états R et U ; on retrouve le résultat par le Théorème 5.

28 **1. a)** $zz' = (a+bi)(a' + b'i)$
$= (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$

$$MM' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix}.$$

Donc zz' est associé à MM'.

b) $z^0 = 1 = 1 + 0i$ est associé à $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si z^n est associé à M^n, alors $z^n z$ est associé à $M^n M$, d'après **1. a)**.

Donc z^{n+1} est associé à M^{n+1}.

La propriété est vraie pour 0 et héréditaire ; elle est donc vraie pour tout naturel n.

2. a) Le nombre complexe associé à la matrice M est $z = 1 + i$ qui peut s'écrire $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit :

$$z^n = \sqrt{2}^n\,e^{i\frac{n\pi}{4}} = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

z^n est associé à la matrice M^n, qui est donc égale à :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & -\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

b) Cherchons $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ telle que $C = MC + N$:

$$\begin{cases} a = a - b + 2 \\ b = a + b - 3 \end{cases}, \text{ donc } C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$Z_n = M^n(Z_0 - C) + C$$
$$= \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ 2 - 2\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

$$Z_{2012} = \begin{pmatrix} 3 + 2^{1007} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ; en effet :}$$

$$\sqrt{2}^{2012} = 2^{1006},\ \cos\left(\frac{2012\pi}{4}\right) = \cos(503\pi) = -1,$$
$$\sin\left(\frac{2012\pi}{4}\right) = \sin(503\pi) = 0.$$

Remarque. La définition de la suite (Z_n) implique que toutes les matrices Z_n ont leurs coefficients entiers.

Or, effectivement la formule explicite fournit des nombres entiers :

• si $n = 2k$, $\sqrt{2}^n = 2^k$ est entier et :

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\} = \left\{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right\} \subset \{0, 1, -1\}$$

• si $n = 2k + 1$, $\sqrt{2}^n = 2^k\sqrt{2}$ et :

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\} =$$
$$= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right\} \subset \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

29 **1. a)** Si la suite (u_n) converge vers le nombre c, alors $c = 3c - 2$, c'est-à-dire $c = 1$.

b) Pour tout naturel n, $u_n = 3^n(u_0 - 1) + 1$. Donc :

• si $u_0 > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$;

• si $u_0 < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$;

• si $u_0 = 1$, la suite est constante donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

2. a) Si u_0 était strictement supérieur à 1, d'après **1. b)** la suite (u_n) aurait pour limite $+\infty$; donc elle ne serait pas majorée.

b) Si u_0 était inférieur à 1, d'après **1. b)** la suite (u_n) serait décroissante ou constante ; donc elle ne serait pas strictement croissante.

c) Si u_0 était différent de 1, d'après **1. b)** la suite (u_n) ne serait pas convergente.

MARCHE ALÉATOIRE ENTRE DEUX ÉTATS

30 **1.** $a_0 = \frac{1\,200}{2\,000} = 0,6$ et $b_0 = \frac{800}{2\,000} = 0,4$.

La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

Donc, pour tout n, :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,85a_n + 0,45b_n = 0,85a_n + 0,45(1 - a_n) \\ \quad = 0,4a_n + 0,45 \\ b_{n+1} = 0,15a_n + 0,55b_n = 0,15(1 - b_n) + 0,55b_n \\ \quad = 0,4b_n + 0,15 \end{cases}.$$

• Étude de (a_n) : $c = 0,4c + 0,45$ fournit $c = 0,75$.

Donc pour tout n,

$$a_n = 0,4^n(a_0 - 0,75) + 0,75 = -0,15 \times 0,4^n + 0,75.$$

• Étude de (b_n) : $c = 0,4c + 0,15$ fournit $c = 0,25$.

Donc pour tout n,

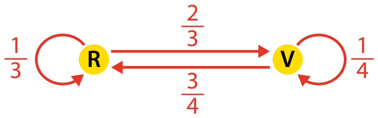
$$b_n = 0,4^n(b_0 - 0,25) + 0,25 = 0,15 \times 0,4^n + 0,25.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}75$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0{,}25$.

Donc, à long terme, on peut prévoir 1 500 abonnements A et 500 abonnements B.

31 *Corrigé sur le site élève.*

32 **1.** Cf. figure ci-dessous.



2. $P_{n+1} = TP_n$, avec $T = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

3. Posons $p = \dfrac{2}{3}$ et $q = \dfrac{3}{4}$. p et q n'étant pas nuls ni égaux à 1, la suite (P_n) converge vers la répartition stable de probabilité :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{17} & \dfrac{8}{17} \end{pmatrix}.$$

Remarque. $r_0 = v_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = \dfrac{1}{3}r_n + \dfrac{3}{4}v_n = \dfrac{1}{3}r_n + \dfrac{3}{4}(1-r_n) = -\dfrac{5}{12}r_n + \dfrac{3}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{2}{3}r_n + \dfrac{1}{4}v_n = \dfrac{2}{3}(1-v_n) + \dfrac{1}{4}v_n = -\dfrac{5}{12}v_n + \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

• Étude de (r_n) : $x = -\dfrac{5}{12}x + \dfrac{3}{4}$ fournit $x = \dfrac{9}{17}$.

Donc pour tout n,

$$r_n = \left(-\frac{5}{12}\right)^n \left(r_0 - \frac{9}{17}\right) + \frac{9}{17} = -\frac{1}{34} \times \left(-\frac{5}{12}\right)^n + \frac{9}{17}.$$

• Étude de (v_n) : $x = -\dfrac{5}{12}x + \dfrac{2}{3}$ fournit $x = \dfrac{8}{17}$.

Donc pour tout n,

$$v_n = \left(-\frac{5}{12}\right)^n \left(v_0 - \frac{8}{17}\right) + \frac{8}{17} = \frac{1}{34} \times \left(-\frac{5}{12}\right)^n + \frac{8}{17}.$$

33 **1.** *Cf.* figure ci-dessous.

2. $P_{n+1} = TP_n$, avec $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

3. Posons $p = 0{,}2$ et $q = 0{,}3$. p et q n'étant pas nuls ni égaux à 1, la suite (P_n) converge vers la répartition stable de probabilité :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} = (0{,}6 \quad 0{,}4).$$

À long terme, il y aura 60 % de fumeurs et 40 % de non fumeurs.

Remarque. $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$, et pour tout n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8\,x_n + 0{,}3\,y_n = 0{,}8\,x_n + 0{,}3\,(1-x_n) \\ \qquad = 0{,}5x_n + 0{,}3 \\ y_{n+1} = 0{,}2\,x_n + 0{,}7\,y_n = 0{,}2(1-y_n) + 0{,}7y_n \\ \qquad = 0{,}5y_n + 0{,}2 \end{cases}.$$

• Étude de (x_n) : $x = 0{,}5x + 0{,}3$ fournit $x = 0{,}6$.

Donc pour tout n,

$$x_n = 0{,}5^n(x_0 - 0{,}6) + 0{,}6 = 0{,}4 \times 0{,}5^n + 0{,}6.$$

• Étude de (y_n) : $y = 0{,}5y + 0{,}2$ fournit $y = 0{,}4$.

Donc pour tout n,

$$y_n = 0{,}5^n(y_0 - 0{,}4) + 0{,}4 = -0{,}4 \times 0{,}5^n + 0{,}4.$$

34 **1.** $T^2 = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1-2p+p^2+pq & 2p-p^2-pq \\ 2q-q^2-pq & 1-2q+q^2+pq \end{pmatrix}$$

donc :

$$T^2 - T = \begin{pmatrix} 1-2p+p^2+pq & 2p-p^2-pq \\ 2q-q^2-pq & 1-2q+q^2+pq \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -p+p^2+pq & p-p^2-pq \\ q-q^2-pq & -q+q^2+pq \end{pmatrix}.$$

D'autre part :

$$\lambda(T-I) = (1-p-q)\begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -p+p^2+pq & p-p^2-pq \\ q-q^2-pq & -q+q^2+pq \end{pmatrix}.$$

On constate l'égalité.

2. L'égalité est vraie pour $n = 0$, car $T - I = \lambda^0(T-I)$.

Si $T^{n+1} - T^n = \lambda^n(T-I)$, alors $T(T^{n+1} - T^n) = \lambda^n T(T-I)$,

donc $T^{n+2} - T^{n+1} = \lambda^n(T^2 - T) = \lambda^{n+1}(T-I)$.

Pour $n = 0$, l'égalité est vraie et héréditaire ; donc, elle est vraie pour tout naturel n.

3. $$\begin{cases} T - I = T - I \\ T^2 - T = \lambda(T-I) \\ T^3 - T^2 = \lambda^2(T-I) \\ \ldots \\ T^n - T^{n-1} = \lambda^{n-1}(T-I) \end{cases}$$

Additionnons, membre à membre :

$$T^n - I = (1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{n-1})(T-I) = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}(T-I).$$

MARCHE ALÉATOIRE ENTRE PLUSIEURS ÉTATS

35 *Corrigé sur le site élève.*

36 **A.** Exemple de simulation :

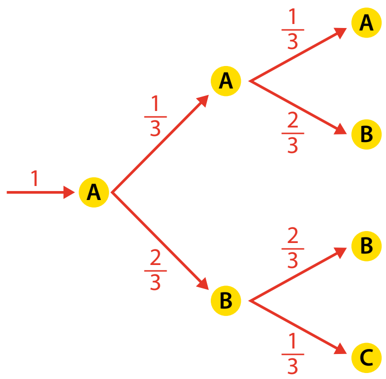
	A	B	C
1	*n*	**alea**	**autocollant**
2	1	0,796	Trèfle
3	2	0,99	Trèfle
4	3	0,01	Etoile
5	4	0,806	Trèfle
6	5	0,33	Etoile
7	6	0,255	Etoile
8	7	0,221	Etoile
9	8	0,324	Etoile
10	9	0,763	Trèfle
11	10	0,902	Trèfle
12	11	0,973	Trèfle
13	12	0,092	Etoile

1. À chaque nouvelle tablette, chaque dessin a une chance sur trois d'être obtenu.
L'instruction `=ALEA()` de la cellule B2 fournit un nombre au hasard entre 0 et 1.

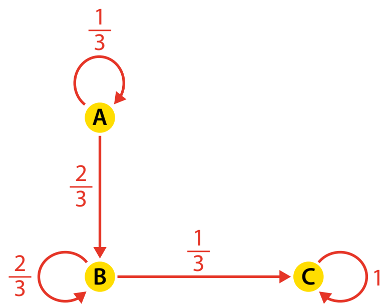
- S'il est inférieur à $\frac{1}{3}$, on obtient Étoile ;
- s'il est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, on obtient Cœur ;
- s'il est supérieur à $\frac{2}{3}$, on obtient Trèfle.

2. On peut compléter la simulation comme indiqué en bas de page afin de déterminer aisément la fréquence demandée.

B. 1. Arbre pondéré de l'évolution possible pour les trois premières semaines.



2. Graphe probabiliste de l'évolution de semaine en semaine.



Matrice de transition $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	1	1	0	0
3	2	0,333	0,667	0
4	3	0,111	0,667	0,222
5	4	0,037	0,519	0,444
6	5	0,012	0,370	0,617
7	6	0,004	0,255	0,741
8	7	0,001	0,173	0,826
9	8	0,000	0,116	0,883
10	9	0,000	0,078	0,922
11	10	0,000	0,052	0,948
12	11	0,000	0,035	0,965
13	12	0,000	0,023	0,977

4. $\begin{cases} a = \frac{1}{3}a \\ b = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b \\ c = \frac{1}{3}b + c \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ fournit $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$.

5. a) $MT = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}M.$

$NT = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}N.$

$RT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$

Formule en E2 :

PRODU... =NB.SI(C2:$C13;"Etoile")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	alea	autocollant		Etoile	Cœur	Trèfle		Tous ?
2	1	0,796	Trèfle		=NB.SI(	0	6		non
3	2	0,99	Trèfle						

Formule en I2 :

PRODU... =SI(OU(E2=0;F2=0;G2=0);"non";"oui")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	alea	autocollant		Etoile	Cœur	Trèfle		Tous ?
2	1	0,827	Trèfle		3	6	3		=SI(OU(E2=0;
3	2	0,857	Trèfle						

b) Pour $n = 0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0 \mathrm{M} + \left(\frac{2}{3}\right)^0 \mathrm{N} + \mathrm{R} = \mathrm{M} + \mathrm{N} + \mathrm{R} = \mathrm{I} = \mathrm{T}^0$.

Si $\mathrm{T}^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{M} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{N} + \mathrm{R}$, alors :

$$\mathrm{T}^{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{MT} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{NT} + \mathrm{RT}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \mathrm{M} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mathrm{N} + \mathrm{R}.$$

Pour $n = 0$, l'égalité est vraie et héréditaire ; donc, elle est vraie pour tout naturel n.

6. a) De la relation $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n\mathrm{T}$, on déduit par récurrence la formule explicite $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_1\mathrm{T}^{n-1}$.

b) $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_1\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \mathrm{M} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \mathrm{N} + \mathrm{R}\right]$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \mathrm{P}_1\mathrm{M} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \mathrm{P}_1\mathrm{N} + \mathrm{P}_1\mathrm{R}.$$

Or $\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc :

$\mathrm{P}_1\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_1\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}_1\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ; b_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} ; c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1.$$

7. M, N et R ont trois coefficients nuls aux mêmes emplacements : (2, 1), (3, 1), (3, 2). Donc T^n a toujours ces trois coefficients nuls.

Néanmoins $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

La condition du Théorème 6 est suffisante pour la convergence mais pas nécessaire.

8. a) De l'égalité $c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n$, on déduit que $c_{n+1} \geqslant c_n$ pour tout naturel n non nul.

Cela signifie que plus on achète de plaquettes, plus la probabilité d'avoir les trois dessins est élevée.

b) Le tableau de **B. 3.** a montré que $c_{10} \approx 0{,}948$ et $c_{11} \approx 0{,}965$. Donc, à partir de 11 plaquettes, on est assuré d'avoir les trois dessins à plus de 95 %.

c) Au bout de 11 semaines, la simulation montre qu'on a presque toujours les trois dessins.

37 *Corrigé sur le site élève.*

AVEC LES TICE

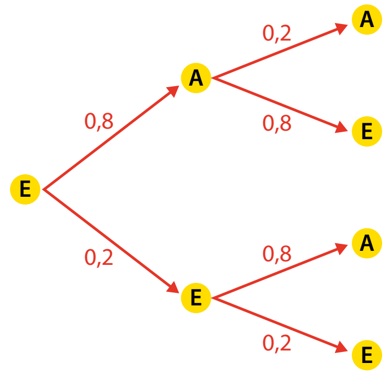
38 **A. 1.** La formule en B3 fournit, avec une probabilité 0,8, la valeur 1-B2 (passage de 0 à 1 ou de 1 à 0) ; et avec une probabilité 0,2 la valeur B2 (pas de changement). Il suffit de recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule B102.

2. En B103, il suffit d'entrer la formule :

=SOMME(B2:B102)/100.

3. On constate que la fréquence d'allumage est voisine de 0,5.

B. 1. Arbre indiquant l'état possible des réverbères pour les jours 1 et 2.



2. Graphe probabiliste ci-dessous :

Matrice de transition $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

3. a) $\mathrm{N} + \mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{N} - 0{,}6\,\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \mathrm{T}.$$

b) $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \mathrm{N}$,

$$\mathrm{R}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \mathrm{R}.$$

$$\mathrm{NR} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{RN} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Pour $n = 0$, $\mathrm{N} + (-0{,}6)^0\,\mathrm{R} = \mathrm{N} + \mathrm{R} = \mathrm{I} = \mathrm{T}^0$.

Si $\mathrm{T}^n = \mathrm{N} + (-0{,}6)^n\,\mathrm{R}$, alors :

$$\mathrm{T}^{n+1} = \left[\mathrm{N} + (-0{,}6)^n\,\mathrm{R}\right](\mathrm{N} - 0{,}6\mathrm{R}) = \mathrm{N}^2$$

$$= \mathrm{N}^2 - 0{,}6\mathrm{NR} + (-0{,}6)^n\,\mathrm{RN} + (-0{,}6)^{n+1}\,\mathrm{R}^2$$

$$= \mathrm{N} + (-0{,}6)^{n+1}\,\mathrm{R}.$$

La propriété étant vraie pour 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout naturel n.

4. $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\mathrm{T}^n = \mathrm{P}_0\left[\mathrm{N} + (-0{,}6)^n\,\mathrm{R}\right] = \mathrm{P}_0\mathrm{N} + (0{,}6)^n\,\mathrm{R}$.

Or $\mathrm{P}_0 = (0 \quad 1)$, donc $\mathrm{P}_0\mathrm{N} = (0{,}5 \quad 0{,}5)$ et $\mathrm{P}_0\mathrm{R} = (-0{,}5 \quad 0{,}5)$.

Donc $a_n = 0{,}5 + 0{,}5 \times (-0{,}6)^n$.

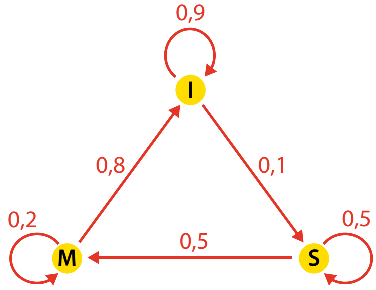
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}5$. Sur une longue période, le réverbère est allumé la moitié du temps. Ce résultat est en accord avec les simulations de la partie **A.**.

Prendre toutes les initiatives

39 Ordonnons les trois états dans l'ordre I, M et S. Alors :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 0,81 & 0.05 & 0,14 \\ 0,88 & 0,04 & 0.08 \\ 0.4 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

T^2 n'ayant aucun coefficient nul, la répartition de probabilité converge vers la répartition stable P = (i m s).



$$\begin{cases} 0,9i+0,8m=i \\ 0,2m+0,5s=m \\ 0,1i+0,5s=s \\ i+m+s=1 \end{cases} \quad \text{fournit} \quad \begin{cases} i=8m=5s \\ i+m+s=1 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} i=\dfrac{40}{53}\approx 0,755 \\ m=\dfrac{5}{53}\approx 0,094 \\ s=\dfrac{8}{53}\approx 0,151 \end{cases}.$$

À long terme, on peut prévoir :

- 75,5 % d'immunisés,
- 9,4 % de malades
- et 15,1 % de non malades non immunisés.

EXERCICES Le jour du BAC (page 172)

40 *Corrigé sur le site élève.*

41 **1.** Graphe probabiliste ci-dessous :

Matrice de transition $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

2.

n	a_n	b_n
1	0	1
2	0,1	0,9
3	0,12	0,88
4	0,124	0,876
5	0,125	0,875

Les probabilités de A et B semblent se stabiliser à 0,125 et 0,875.

3. $p = 0,7$ et $q = 0,1$; donc :

$$a=\frac{q}{p+q}=\frac{1}{8} \text{ et } b=\frac{p}{p+q}=\frac{7}{8}.$$

Comme p et q ne sont pas nuls ni égaux à 1, la suite (P_n) converge vers $\left(\frac{1}{8}\ ;\ \frac{7}{8}\right)$.

4. $\begin{cases} a_1=0 \\ b_1=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{n+1}=0,3a_n+0,1b_n=0,3a_n+0,1(1-a_n)=0,2a_n+0,1 \\ b_{n+1}=0,7a_n+0,9b_n=0,7(1-b_n)+0,9b_n=0,2b_n+0,7 \end{cases}$.

• Étude de (a_n) : $x = 0,2x + 0,1$ fournit $x=\frac{1}{8}$.

Donc $a_n=0,2^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}=\frac{1-0,2^{n-1}}{8}$.

• Étude de (b_n) : $x = 0,2x + 0,7$ fournit $x=\frac{7}{8}$.

Donc $b_n=0,2^{n-1}\left(b_1-\frac{7}{8}\right)+\frac{7}{8}=\frac{7+0,2^{n-1}}{8}$.

On vérifie que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{8}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{7}{8}$.

5. La relation de récurrence $a_{n+1}=0,2a_n+0,1$ subsiste, mais $a_1 = 1$. Donc :

$$a_n=0,2^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}=\frac{7\times 0,2^{n-1}+1}{8}.$$

On en déduit $a_5=\frac{7\times 0,2^4+1}{8}=0,1264$.

42 **1.** On trouve $a_{10}\approx 0,17$; $b_{10}\approx 0,51$; $c_{10}\approx 0,31$.

2. La calculatrice, ou le tableur, indiquent que b_n se stabilise autour de 0,5. Démontrons-le.

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{T}^2=\begin{pmatrix} 0,28 & 0,66 & 0,06 \\ 0,22 & 0,625 & 0,155 \\ 0,03 & 0,2325 & 0,7375 \end{pmatrix}$;

la matrice n'a aucun coefficient nul ; donc la répartition de probabilité converge vers la répartition stable P = (a b c).

Déterminons P :

$$\begin{cases} 0,4a+0,2b=a \\ 0,6a+0,7b+0,15c=b \\ 0,1b+0,85c=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} b=3a \\ c=2a \\ a+b+c=1 \end{cases};$$

d'où $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$.

On vérifie que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

43 Cherchons la matrice colonne C telle que C = AC + B :

$$C = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De $U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$, on déduit par soustraction : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$.

D'où, par récurrence, $U_n - C = A^n (U_0 - C)$; donc :

$$U_n = A^n(U_0 - C) + C = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 1 \\ 3^n + 2 \end{pmatrix}.$$

44 La matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, la répartition de probabilité à l'étape n.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}b_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n) = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$$

$x = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ fournit $x = \frac{4}{7}$.

Donc, pour tout n, $a_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^n \left(a_0 - \frac{4}{7}\right) + \frac{4}{7}$.

On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{7}$. Par suite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - a_n) = \frac{3}{7}$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

45 **1.** –3 est inférieur à –1 ; donc, la suite diverge (elle n'a pas de limite). Réponse exacte : **c)**.

2. Cherchons la matrice colonne C telle que C = AC + B :

$$C = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

De $U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$, on déduit par soustraction : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$.

D'où, par récurrence, $U_n - C = A^n (U_0 - C)$; donc :

$$U_n = A^n (U_0 - C) + C = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5^n + 6 \\ 2^{n+1} - 5 \end{pmatrix}.$$

Réponse exacte : **c)**.

3. Réponse exacte : **b)**.

EXERCICES Pour aller plus loin (page 174)

46 **1.** $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. $I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: son déterminant étant nul, la matrice n'est pas inversible.

Remarque. Dire que I – A n'est pas inversible équivaut à dire que 1 est valeur propre de A.

Cherchons $C = (x \quad y)$ telle que C = AC + B :

$$\begin{cases} x = x + 3 \\ y = 2y - 3 \end{cases} \text{ ; il n'y a pas de solution.}$$

3. a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 3$: la suite (u_n) est arithmétique de raison 3 ; donc $u_n = 1 + 3n$ pour tout naturel n.

b) $v_0 = -4$ et $v_{n+1} = 2v_n + 5$: la suite (v_n) est arithmético-géométrique ; $c = -5$ donc $v_n = 2^n(v_0 + 5) - 5 = 2^n - 5$ pour tout naturel n.

c) On vérifie que : $u_1 = 4$, $v_1 = -3$, $u_2 = 7$, $v_2 = -1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Donc, la suite (U_n) n'est pas convergente.

47 **1.** Pour $n = 0$:

$$\left(\frac{\sqrt{26}}{5}\right)^0 \left[5\sin(0)A - \sqrt{26}\sin(-\alpha)\, I\right] = \sqrt{26}\sin(\alpha)\, I = I = A^0.$$

Pour $n = 1$:

$$\left(\frac{\sqrt{26}}{5}\right)^1 \left[5\sin(\alpha)A - \sqrt{26}\sin(0)\, I\right] = \frac{\sqrt{26}}{5} \times 5\sin(\alpha)A = A.$$

2. $\begin{cases} x_0 = u_0 - u_e = 3\,800 - 4\,000 = -200 \\ y_0 = v_0 - v_e = 62\,000 - 62\,500 = -500 \end{cases}$.

$$P_n = A^n P_0 = \left(\frac{\sqrt{26}}{5}\right)^n \left[5\sin(n\alpha)AP_0 - \sqrt{26}\sin((n-1)\alpha)\, P_0\right]$$

Or, $AP_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0,032 \\ -1,25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -200 \\ -500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -216 \\ -250 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{cases} x_n = \left(\frac{\sqrt{26}}{5}\right)^n \left[-1\,080\sin(n\alpha) + 200\sqrt{26}\sin((n-1)\alpha)\right] \\ y_n = \left(\frac{\sqrt{26}}{5}\right)^n \left[-1\,250\sin(n\alpha) + 500\sqrt{26}\sin((n-1)\alpha)\right] \end{cases}$$

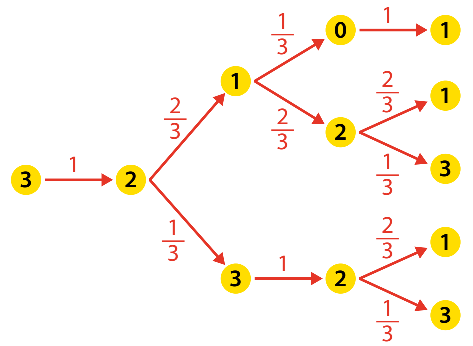
3.

$$\begin{cases} u_n = u_e + x_n \\ \quad = 4\ 000 + \left(\dfrac{\sqrt{26}}{5}\right)^n \left[-1\ 080 \sin(n\alpha) + 200\sqrt{26}\sin((n-1)\alpha)\right] \\ v_n = v_e + y_n \\ \quad = 62\ 500 + \left(\dfrac{\sqrt{26}}{5}\right)^n \left[-1\ 250 \sin(n\alpha) + 500\sqrt{26}\sin((n-1)\alpha)\right] \end{cases}$$

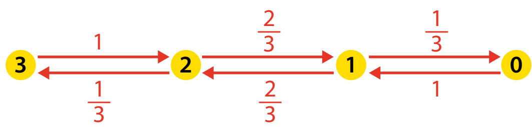
4.

Année	Lynx	Lièvres	x_n	y_n	u_n	v_n
0	3800	62000	-200	-500	3800	62000
1	3785	62248	-216	-250	3784	62250
2	3777	62516	-224	20	3776	62520
3	3778	62795	-222	301	3778	62801
4	3787	63074	-212	580	3788	63080
5	3804	63343	-192	846	3808	63346
6	3830	63591	-163	1088	3837	63588
			⋮			
96	2777	59884	-1406	806	2594	63306
97	2719	61348	-1375	2569	2625	65069
98	2694	62919	-1286	4296	2714	66796
99	2703	64562	-1139	5914	2861	68414
100	2748	66237	-939	7350	3061	69850

48 **1. a)** Arbre probabiliste de l'évolution de l'urne A au cours des quatre premières étapes :



b) Graphe probabiliste de l'évolution de l'urne A :



Si on ordonne les états dans l'ordre 0, 1, 2 et 3 :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Cherchons la répartition stable de probabilité :

$$P = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 = \pi_0 \\ \pi_0 + \frac{2}{3}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} \pi_1 = 3\pi_0 \\ \pi_2 = 3\pi_3 \\ \pi_0 = \pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}.$$

On en déduit $\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{8} \\ \pi_1 = \frac{3}{8} \\ \pi_2 = \frac{3}{8} \\ \pi_3 = \frac{1}{8} \end{cases}$.

On reconnaît la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. a) Le nombre de boules dans l'urne A change de parité à chaque étape. Or, à l'étape 0, il y en a 3 ; donc, pour toutes les étapes impaires, il y en a 2 ou 0.

b) Si à l'étape $2k$, il y a 3 boules dans l'urne A alors à l'étape $2k + 2$, il y en a :

- 1 avec la probabilité $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (il en part 1 puis il en part encore 1) ;
- 3 avec la probabilité $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (il en part 1 puis il en revient 1).

Si à l'étape $2k$, il y a 1 boule dans l'urne A alors à l'étape $2k + 2$, il y en a :

- 1 avec la probabilité $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$ (il en part 1 puis il en revient 1 ou il en vient 1 puis il en repart 1) ;
- 3 avec la probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ (il en vient 1 puis il en vient encore 1).

Remarque. On pourrait obtenir ces valeurs en calculant la matrice :

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{7}{9}} & 0 & \mathbf{\frac{2}{9}} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{2}{3}} & 0 & \mathbf{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

c) La probabilité qu'il y ait 3 boules dans A à l'étape $2k$ est p_{2k} ; c'est donc $1 - p_{2k}$ qu'il y en ait 1.
Deux étapes plus tard, la probabilité p_{2k+2} qu'il y ait 3 boules dans A est :

$$\frac{1}{3}p_{2k} + \frac{2}{9}(1 - p_{2k}) \text{, soit } \frac{1}{9}p_{2k} + \frac{2}{9}.$$

d) Posons, pour tout naturel k : $u_k = p_{2k}$.

$u_0 = 1$ et, pour tout k, $u_{k+1} = \frac{1}{9}u_k + \frac{2}{9}$.

On en déduit $u_k = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{9}\right)^k + \dfrac{1}{4}$; donc :

$$p_{2k} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}.$$

e) L'arbre de la question **1. a)** montre que :

$$p_0 = 1 \ ; \ p_2 = \frac{1}{3} \ ; \ p_4 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{7}{27}.$$

3. a) D ne prend que des valeurs paires puisque lors des étapes impaires, il y a 0 ou 2 boules dans l'urne A.

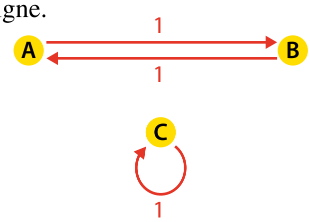
b) $P(D = 2) = \dfrac{1}{3}$. $P(D = 4) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$.

c) $P(D < 5) = P(D = 2) + P(D = 4) = p_4 = \dfrac{7}{27}$.

Remarque

$P(D = 2k) = \dfrac{4}{27}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-2}$ pour tout naturel $k \geqslant 2$. E(D) = 8.

49 **1.** Tous les coefficients sont positifs et de somme 1 pour chaque ligne.



2. On cherche une répartition stable de probabilité $P = (a \quad b \quad c)$:

$$\begin{cases} b = a \\ a = b \\ c = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

Il y a une infinité de solutions ; par exemple :

$(0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0), (0 \quad 0 \quad 1), (0{,}25 \quad 0{,}25 \quad 0{,}5)$.

Les solutions sont de la forme $(a \quad a \quad 1 - 2a)$, avec $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ implique :

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si n est pair ; $P_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si n est impair : la suite (P_n) n'est pas convergente.

4. Dans le Problème 8, on a trouvé :

$$p_n = r_n = \frac{1+(-1)^n}{4} \text{ et } q_n = \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Les trois suites (p_n), (q_n) et (r_n) n'ont pas de limite ; donc, la suite (P_n) n'est pas convergente.

50 **1.** P(GTTAAATT) =

$$\begin{aligned} &= P(G)P_G(T)P_T(T)P_T(A)P_A(A)P_A(A)P_A(T)P_T(T) \\ &= 0{,}28\times0{,}24\times0{,}31\times0{,}22\times0{,}34\times0{,}34\times0{,}25\times0{,}31 \\ &= 0{,}00004105945536 \approx 0{,}000041 \\ &= 41\times10^{-6}. \end{aligned}$$

2. P(GTTAAATT) =

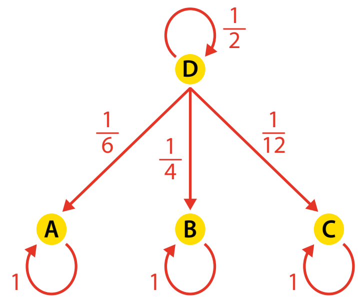
$$\begin{aligned} &= P(G)P_G(T)P_T(T)P_T(A)P_A(A)P_A(A)P_A(T)P_T(T) \\ &= 0{,}28\times0{,}32\times0{,}41\times0{,}26\times0{,}42\times0{,}42\times0{,}26\times0{,}41 \\ &= 0{,}0001796060657664 \approx 0{,}000180 = 180\times10^{-6}. \end{aligned}$$

3. $\dfrac{180}{41} \approx 4{,}4$. Cette séquence est 4,4 fois plus probable chez le mycoplasme que chez l'homme.

51 **1.** $P_{D_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}$; $P_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$;

$P_{D_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$; $P_{D_n}(D_{n+1}) = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$.

2. Graphe probabiliste de l'évolution du duel :



Matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{6}d_n \\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{4}d_n \\ c_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{12}d_n \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n \end{cases}$

4. $d_0 = 1$ et $d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n$, donc $d_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{6}d_n = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Donc $a_n - a_0 = \dfrac{1}{6}\left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

D'où le résultat puisque $a_0 = 0$.

6. Un raisonnement analogue fournit :

$$b_n = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \text{ et } c_n = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$: c'est la probabilité que A soit vainqueur.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$: c'est la probabilité que B soit vainqueur.

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{6}$: c'est la probabilité que tous les deux soient touchés.

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$: c'est la probabilité que les deux restent indemnes.

Remarque. Il y a une infinité de répartitions stables, de la forme $(a \quad b \quad c \quad 0)$, avec $a + b + c = 1$ car les trois états A, B, C sont absorbants. On n'est pas dans les conditions du Théorème 6 ; néanmoins la suite (P_n) converge.