CHAPITRE

4 Matrices

SÉQUENCE 1 Calcul matriciel (page 106)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1

1. a) La matrice A est constituée de 5 lignes et de 2 colonnes.
b) $a_{12} = 8$; $a_{42} = 11$; a_{15} n'est pas défini ; $a_{31} = 38$.

2. a) Le nombre d'élèves de Terminale dans ce lycée est donné par la formule :

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32} + a_{41} + a_{42} + a_{51} + a_{52} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}.$$

b) Le nombre de garçons en Terminale dans ce lycée est donné par la formule :

$$a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} + a_{52} = \sum_{i=1}^{5} a_{i2}.$$

c) La proportion d'élèves de Terminale S parmi les terminales de ce lycée est donnée par la formule :

$$\frac{a_{31} + a_{32}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32} + a_{41} + a_{42} + a_{51} + a_{52}} = \frac{\sum_{j=1}^{2} a_{3j}}{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}}.$$

3. a) La matrice B est de format (2, 5).
b) $b_{12} = a_{21} = 36$: c'est le nombre de filles en Terminale ES ; b_{42} n'est pas défini ; $b_{23} = a_{32} = 62$: c'est le nombre de garçons en Terminale S.
c) $b_{13} = a_{31}$; de manière plus générale, $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \in \{1 ; 2\}$ et $j \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

Problème 2

1. La matrice C_M est de format (3, 1).

2. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

3. a) $C = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}$: les coefficients de la matrice C sont obtenus en multipliant chaque coefficient de $C_{\vec{n}}$ par t.

b) $C_M + C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1-2t \\ 3+2t \end{pmatrix}$.

c) Par construction, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, H décrit la droite passant par le point M et de vecteur directeur $\vec{n}$.

d) $H \in \mathcal{P}$ si $2 + t - 2(-1 - 2t) + 2(3 + 2t) + 8 = 0$, soit :

$$9t + 18 = 0 \text{ et donc } t = -2.$$

On a alors $C_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. a) $C_H - C_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ admet cette matrice pour matrice de coordonnées.

b) Par définition de M' et de H, $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ dont l'écriture matricielle est :

$C_{M'} - C_M = 2(C_H - C_M)$ soit $C_{M'} = 2(C_H - C_M) + C_M$.

D'où $C_{M'} = \begin{pmatrix} -2\times 2 \\ 4\times 2 \\ -4\times 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

ainsi $C_{M'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. Dans un premier temps, cherchons la matrice de coordonnées du point H appartenant au plan $\mathcal{P}$ et à la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

$$C_A + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 11-2t \\ -7+2t \end{pmatrix},$$

avec $1 + t - 2(11 - 2t) + 2(-7 + 2t) + 8 = 0$.
D'où $9t - 27 = 0$ et donc $t = 3$.

Ainsi $C_H = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'après **4. b)**, $C_{A'} = 2(C_H - C_A) + C_A$.

Soit $C_{A'} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$, donc $C_{A'} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Problème 3

1. a) $0 \times 1{,}2 + 29 \times 1 = 29$; 29 est la quantité de glucides (en grammes) dans l'assiette d'Inès.

b) $(16{,}5 \quad 2{,}7)\begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = 16{,}5 \times 1{,}8 + 2{,}7 \times 1{,}5 = 33{,}75$;

33,75 est la quantité de protides (en grammes) dans l'assiette de Dorian.

c) $(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1{,}2 + 0 \times 1 = 1{,}2$;

l'assiette d'Inès contient 1,2 gramme de lipides.

d) $(0 \quad 29)\begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = 0 \times 1{,}8 + 29 \times 1{,}5 = 43{,}5$;

43,5 est la quantité de glucides (en grammes) dans l'assiette de Dorian ; elle est donnée par le produit de la matrice ligne 1 de A par la matrice colonne 2 de B.

2. a) D'après les questions précédentes :

$c_{11} = 29$; $c_{22} = 33{,}75$; $c_{31} = 1{,}2$ et $c_{12} = 43{,}5$.

Chaque coefficient est bien égal au produit de la matrice ligne i de A par la matrice colonne j de B.

b) $c_{21} = (16{,}5 \quad 2{,}7)\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} = 16{,}5 \times 1{,}2 + 2{,}7 \times 1 = 22{,}5$;

$c_{32} = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = 1 \times 1{,}8 + 0 \times 1{,}5 = 1{,}8$;

donc $AB = \begin{pmatrix} 29 & 43{,}5 \\ 22{,}5 & 33{,}75 \\ 1{,}2 & 1{,}8 \end{pmatrix}$.

La première colonne représente les quantités respectives de glucides, lipides, protides (en grammes) dans l'assiette d'Inès. De même, la seconde colonne concerne l'assiette de Dorian.

c) A est de format (3, 2), B de format (2, 2) et AB de format (3, 2).

d) La matrice AB est définie si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

e) La matrice AB est de format (n, p) où n est le nombre de lignes de A et p le nombre de colonnes de B.

EXERCICES Application (page 114)

1 **a)** 2M + A = 5B équivaut à :

$$M = \frac{1}{2}(5B - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5\times 8-(-1) & 5\times 9-7 \\ 5\times(-5)-4 & 5\times(-7)-3 \end{pmatrix}$$

soit $M = \begin{pmatrix} 20{,}5 & 19 \\ -14{,}5 & -19 \end{pmatrix}$.

b) M + B = 3M – 2A équivaut à :

$-2M = -2A - B$ soit $M = \frac{1}{2}(2A + B)$; ce qui donne :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\times(-1)+8 & 2\times 7+9 \\ 2\times 4+(-5) & 2\times 3+(-7) \end{pmatrix}$$

ou encore $M = \begin{pmatrix} 3 & 11{,}5 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

2 **a)** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 7a \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 7 \\ 8a & 9 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a & -4a \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 3a & -4a \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3a^2 \\ -3 & -3a \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(a)+\sin 2(a) & 0 \\ 0 & \cos 2(a)+\cos^2(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 **a)** $T = NQ = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 13 & 15 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 15 & 13 & 13 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$T = \begin{pmatrix} 244 & 201 \\ 180 & 149 \\ 262 & 197 \end{pmatrix}$.

b) La somme des coefficients du concours C_1 est 20 et celle du concours C_2 est 16.

TD représente la moyenne de chaque étudiant aux deux concours :

si $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$ alors $TD = \begin{pmatrix} 12{,}2 & 12{,}5625 \\ 9 & 9{,}3125 \\ 13{,}1 & 12{,}3125 \end{pmatrix}$.

SÉQUENCE 2 Matrices carrées (page 116)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

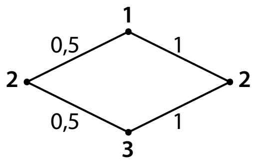
Problème 4

1. Des positions 1 et 3, la cible se déplace à la position 2 ; donc : $t_{11} = t_{13} = t_{31} = t_{33} = 0$ et $t_{12} = t_{32} = 1$.
De la position 2, la cible se déplace soit à la position 1, soit à la position 3 avec la même probabilité 0,5.
Donc $t_{21} = t_{23} = 0{,}5$ et $t_{22} = 0$.

Ainsi $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

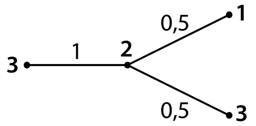
2. a) $c_{11} = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$; $c_{12} = 0$; $c_{13} = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$.

b)



$c_{21} = c_{23} = 0$ et $c_{22} = 1$.

c)



$c_{31} = c_{33} = \dfrac{1}{2}$; $c_{32} = 0$.

Ainsi $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

d) $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T} \times \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\mathrm{C} = \mathrm{T}^2$.
En effet, avec les arbres probabilistes, on a :

$$c_{ij} = t_{i1} \times t_{1j} + t_{i2} \times t_{2j} + t_{i3} \times t_{3j}$$

ce qui revient à dire que $\mathrm{C} = \mathrm{T} \times \mathrm{T} = \mathrm{T}^2$.

3. $\mathrm{T}^3 = \mathrm{T} \times \mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\mathrm{T}^3 = \mathrm{T}$, et donc si $\mathrm{T}^{2n+1} = \mathrm{T}$, alors :

$$\mathrm{T}^{2n+3} = \mathrm{T}^{2n+1} \times \mathrm{T}^2 = \mathrm{T} \times \mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^3 = \mathrm{T} ;$$

ce qui montre que $\mathrm{T}^k = \mathrm{T}$ si k est impair.
De même, $\mathrm{T}^4 = \mathrm{T} \times \mathrm{T}^3 = \mathrm{T} \times \mathrm{T} = \mathrm{T}^2$ et donc si $\mathrm{T}^{2n} = \mathrm{T}^2$, alors :

$$\mathrm{T}^{2n+2} = \mathrm{T}^2 \times \mathrm{T}^{2n} = \mathrm{T}^2 \times \mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^4 = \mathrm{T}^2 ;$$

ce qui montre que $\mathrm{T}^k = \mathrm{T}^2$ si k est pair (non nul).

4. Ainsi, le coefficient ligne 1, colonne 1 de la matrice T^{15} répond au problème initial posé.
Or, d'après la question précédente :

$$\mathrm{T}^{15} = \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure que si cette cible débute à la position 1, alors elle n'a aucune chance d'y être à nouveau 30 secondes plus tard.

Problème 5

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Parcours utilisant deux pistes et reliant :
- l'Arc de Triomphe au musée du Louvre : il y en a trois, {214 ; 234 ; 254}.
- Notre Dame à la Tour Eiffel : il y en a deux, {765 ; 745}.

b) D'après la calculatrice, $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \boxed{3} & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & \boxed{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On retrouve $c_{24} = 3$ et $c_{75} = 2$ ce qui correspond aux réponses précédentes.

c) $c_{ij} = a_{i1} \times a_{1j} + a_{i2} \times a_{2j} + a_{i3} \times a_{3j} + \ldots + a_{i7} \times a_{7j}$;
or $a_{ik} \times a_{kj}$ donne le nombre de chaînes de longueur 2 reliant i et j et passant par k.
Donc c_{ij} représente le nombre de chaînes de longueur 2 reliant les sommets i et j.

3. D'après l'énoncé, le nombre de parcours utilisant cinq pistes (qui peuvent être répétées) reliant le Grand Palais à Beaubourg est le coefficient ligne 3, colonne 6, de la matrice A^5 ; soit, d'après la calculatrice, 125.

Problème 6

1. D'après l'énoncé, on a : $\begin{cases} c_e = 0{,}1p_e + 0{,}3p_f \\ c_f = 0{,}4p_e + 0{,}2p_f \end{cases}$

d'écriture matricielle C = LP avec $L = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

2. a) $C = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 80\ 000 \\ 50\ 000 \end{pmatrix}$.

La matrice des consommations est $C = \begin{pmatrix} 23\ 000 \\ 42\ 000 \end{pmatrix}$.

b) $P - C = \begin{pmatrix} 80\ 000 \\ 50\ 000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23\ 000 \\ 42\ 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57\ 000 \\ 8\ 000 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la production nette d'électricité est de 57 000 € et celle de fioul de 8 000 €.

c) Cet exemple ne permet pas de répondre à la question initiale posée car on cherche à obtenir $\begin{pmatrix} 72\ 000 \\ 24\ 000 \end{pmatrix}$ comme matrice des productions nettes.

3. a) $IP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_e \\ p_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_e \\ p_f \end{pmatrix}$; donc IP = P.

b) On cherche à avoir P – C = N, soit IP – LP = N ce qui revient à (I – L)P = N(*).

c) $I - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$;

$A(I - L) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

De même (I – L)A = I.

d) (I – L)P = N, ce qui donne, en multipliant à gauche chaque membre de l'égalité (*) par A :

$$A(I - L)P = AN$$

soit IP = AN ou encore P = AN.

Ainsi, la matrice P cherchée est :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 72\ 000 \\ 24\ 000 \end{pmatrix} \text{ soit } P = \begin{pmatrix} 108\ 000 \\ 84\ 000 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : pour satisfaire une commande de 72 000 € d'électricité et de 24 000 € de fioul, il faut une production totale d'électricité de 108 000 € et de fioul de 84 000 €.

Problème 7

A $p_i = \sum_{j \to i} 1$.

1. $p_1 = 3$; $p_2 = 1$; $p_3 = 1$; $p_4 = 2$; $p_5 = 1$; $p_6 = 2$; $p_7 = 1$.

Donc, avec ce modèle, la page la plus pertinente est la page 1.

2. On aurait alors la même distribution que la précédente, sauf $p_5 = 1 + 2 = 3$ et $p_8 = p_9 = 0$.

Ainsi, la page 5 serait la page la plus pertinente pour accompagner la page 1 dans ce nouveau réseau.

3. La question précédente soulève un inconvénient majeur : on pourrait truquer le comptage en ajoutant des pages artificielles.

B $p_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j}$

1. $p_1 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$; $p_2 = \frac{1}{2}$; $p_3 = \frac{1}{2}$; $p_4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;

$p_5 = \frac{1}{2}$; $p_6 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $p_7 = \frac{1}{2}$.

Donc, avec ce modèle, la page la plus pertinente est la page 1.

2. On aurait alors la même distribution que la précédente, sauf : $p_5 = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}$ et $p_8 = p_9 = 0$.

Ainsi, la page 5 serait la page la plus pertinente dans ce nouveau réseau.

3. La question précédente soulève un inconvénient majeur : on pourrait truquer le comptage en ajoutant des pages artificielles.

C $p_i = \sum_{j \to i} \frac{1}{l_j} p_j$

1. a) D'après la formule, $p_1 = \frac{1}{2}p_2 + p_3 + \frac{1}{2}p_5 = 0$, ce qui revient à :

$$-p_1 + \frac{1}{2}p_2 + p_3 + \frac{1}{2}p_5 = 0.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} -p_1 + \frac{1}{2}p_2 + p_3 + \frac{1}{2}p_5 = 0 \\ \frac{1}{2}p_1 - p_2 = 0 \\ \frac{1}{2}p_2 - p_3 = 0 \\ \frac{1}{2}p_1 - p_4 + p_6 = 0 \\ \frac{1}{2}p_4 - p_5 = 0 \\ \frac{1}{2}p_5 - p_6 + p_7 = 0 \\ \frac{1}{2}p_4 - p_7 = 0 \end{cases}$$

b) $\sum_{i=1}^{6} L_i : -\frac{1}{2}p_4 + p_7 = 0$ et $L_7 : \frac{1}{2}p_4 - p_7 = 0$, donc :

$$\sum_{i=1}^{6} L_i = -L_7.$$

Ainsi, si le 7-uplet (p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4 ; p_5 ; p_6 ; p_7) vérifie les six premières équations du système, alors il vérifie la septième. Donc, la dernière équation de ce système est inutile.

2. a) En remplaçant L_7 par $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1$ alors le système de la question **1. a)** peut s'écrire sous la forme AX = B avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) AX = B ; donc, par multiplication à gauche dans chaque membre de cette égalité par A^{-1} (donnée par la calculatrice), on a $A^{-1}AX = A^{-1}B$, soit $IX = A^{-1}B$ ou encore $X = A^{-1}B$.

D'après la calculatrice, à 10^{-2} près, on a :
$p_1 \approx 0{,}14$; $p_2 \approx 0{,}07$; $p_3 \approx 0{,}03$; $p_4 \approx 0{,}28$; $p_5 \approx 0{,}14$; $p_6 \approx 0{,}21$; $p_7 \approx 0{,}14$.
Ainsi, avec ce modèle, la page la plus pertinente est la page 4.

c) Dans ce nouveau réseau, les pages 8 et 9, ne recevant aucun lien, ont une pertinence nulle : $p_8 = p_9 = 0$.
Ces deux pages n'augmente pas la pertinence de la page 5 :

$$p_5 = \frac{1}{2}p_4 + p_8 + p_9 = \frac{1}{2}p_{4.}$$

Donc, la page 4 reste la page la plus pertinente du réseau.

Problème 8

1. $\vec{i}' = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ donc $\vec{i}'(\cos(\theta) ; \sin(\theta))$;
$\vec{j}' = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$ donc $\vec{j}'(-\sin(\theta) ; \cos(\theta))$.

2. a) D'après l'énoncé, $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i}' + y'\vec{i}'$; donc, d'après la question précédente :

$$\overrightarrow{OM'} = x\cos(\theta)\vec{i} + x\sin(\theta)\vec{j} - y\sin(\theta)\vec{i} + y\cos(\theta)\vec{j}$$

soit $\overrightarrow{OM'} = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta))\vec{i} + (x\sin(\theta) + y\cos(\theta))\vec{j}$.

b) Par unicité des coordonnées dans un repère, comme $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$, on a :

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de la forme $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{120}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{120}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{120}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{120}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}95 \\ 2{,}05 \end{pmatrix}$.

3. a) $RR' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

soit $RR' = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

De même, on a $R'R = I$. Donc R est inversible et $R^{-1} = R'$.

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; donc $R'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R'R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ce qui donne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{60}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{60}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{60}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{60}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}16 \\ 2{,}94 \end{pmatrix}$.

EXERCICES Application (page 124)

4 **1.** $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$;

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = 5I + N$ et, d'après la question précédente :

$$A^2 = 25I + 10N.$$

3. P_k : $A^k = 5^kI + k5^{k-1}N$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$)
Remarque. Cette égalité est aussi valable pour $k = 0$.
Cette propriété est vraie pour $k = 1$: $A = 5I + N$.
En supposant cette propriété vraie au rang k ($k \in \mathbb{N}^*$) montrons alors qu'elle est vraie au rang $k + 1$:
$A^{k+1} = AA^k = (5I + N)(5^kI + k5^{k-1}N)$
$= 5^{k+1}I^2 + k5^kIN + 5^kNI + k5^{k-1}N^2$.
Or $N^2 = 0$, d'après **1.**, donc $A^{k+1} = 5^{k+1}I + (k + 1)5^kN$.
Conclusion : pour tout entier $k \geqslant 1$, $A^k = 5^kI + k\,5^{k-1}N$.

5 **1.** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Conjecture* P_n : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \times a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc P_0 est vraie.

En supposant P_n vraie ($n \in \mathbb{N}$), montrons alors que P_{n+1} l'est aussi :
$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Conclusion
Pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6 P_n : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

P_1 est clairement vérifiée.
En supposant P_n vraie ($n \in \mathbb{N}^*$), montrons alors que P_{n+1} l'est aussi :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Conclusion
Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

7 **1.** Posons x le nombre de consoles vendues et y le nombre de jeux vendus.

D'après l'énoncé, $\begin{cases} x+y=25 \\ 255x+65y=3\,335 \end{cases}$ qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 255 & 65 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 \\ 3\,335 \end{pmatrix},$$

de la forme AX = B.

2. a) $1 \times 65 - 1 \times 255 = -190 \neq 0$, donc A est inversible.

b) Comme A est inversible, AX = B équivaut à $X = A^{-1}B$.

D'où $X=\dfrac{1}{-190}\begin{pmatrix} 65 & -1 \\ -255 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 3\,335 \end{pmatrix}$ et donc $X=\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Ainsi 9 consoles et 16 jeux ont été vendus.

8 **A. 1. a)** D'après l'énoncé, on a le système :

$$(S)\begin{cases} 2x+2y=44 \\ (x+8)(y+5)=xy+180 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à $(S)\begin{cases} x+y=22 \\ 5x+8y=140 \end{cases}$.

b) Écriture matricielle de (S) :

$$AX = B \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 22 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

c) $1 \times 8 - 1 \times 5 = 3 \neq 0$ donc A est inversible et :

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) D'après les questions précédentes :

$$X = A^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 140 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Donc, la solution du système est $\begin{cases} x=12 \\ y=10 \end{cases}$.

2. a) $(S)\begin{cases} x+y=13 \\ 5x+8y=140 \end{cases}$ dont l'écriture matricielle est :

$$AX = C \text{ avec } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 13 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

b) A étant inversible, $X=A^{-1}C=\begin{pmatrix} -12 \\ 25 \end{pmatrix}$; ainsi, il n'existe pas de rectangle solution du problème (les dimensions d'un rectangle doivent être positives).

3. De même, (S) s'écrit AX = D avec $D=\begin{pmatrix} 34 \\ 140 \end{pmatrix}$.

D'où $X = A^{-1}D=\begin{pmatrix} 44 \\ -10 \end{pmatrix}$; ainsi, pour la même raison qu'au **2. b)**, il n'existe pas de rectangle solution.

B. 1. Dans le cas général, l'écriture matricielle est AX = P avec $P=\begin{pmatrix} a \\ 140 \end{pmatrix}$.

2. Ainsi, $X = A^{-1}P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 140 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8a-140 \\ -5a+140 \end{pmatrix}.$$

Ce qui revient à dire que $x=\dfrac{8a-140}{3}$ et $y=\dfrac{-5a+140}{3}$.

3. D'après **2.**, il existe un rectangle solution du problème si $8a - 140 > 0$ et $-5a + 140 > 0$ ce qui équivaut à $17{,}5 < a < 28$.

Il existe des rectangles solutions du problème pour des valeurs du périmètre situées (strictement) entre 35 mètres et 56 mètres.

9 **1.** Le système (S) s'écrit AX = B, avec :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

D'après la calculatrice, A est inversible et donc :

$$X = A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente, l'intersection des trois plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ se réduit au point de coordonnées $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-1 \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$.

10 **1.** Nommons I le centre du cercle inscrit du triangle ABC ; alors $(IP)\perp(AB)$ et $(IN)\perp(AC)$. D'après le théorème de Pythagore, dans les triangles rectangles AIP et AIN, on a :

$$x^2 + PI^2 = AI^2 \text{ et } AN^2 + NI^2 = AI^2 ;$$

or PI = NI (ce sont des rayons du cercle inscrit) ;

on a donc $x^2 = AN^2$ et donc $x = AN$ (ce sont des longueurs).

On montrerait de même que $y = BP$ et $z = CM$.

Ainsi, $\begin{cases} x+y=AB=4 \\ x+z=AC=5 \\ y+z=BC=6 \end{cases}$ dont l'écriture matricielle est AX = B

avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. D'après la calculatrice, la matrice :

$C=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.

On peut vérifier que AC = CA = I ; donc A est inversible et $A^{-1} = C$.

3. D'après les questions précédentes, le système admet un unique triplet solution : $X = A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $x = 1{,}5$ cm ; $y = 2{,}5$ cm ; $z = 3{,}5$ cm.

11 **1.** $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2a+5b+8c=0 \\ 3a+6b+9c=0. \\ 4a+7b=0 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire AX = B avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$,

$X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après la calculatrice, la matrice $C=\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -63 & 56 & -3 \\ 36 & -32 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.

On peut vérifier que AC = CA = I ; donc A est inversible et $A^{-1} = C$.

Donc, le système (S) admet un unique triplet solution $X = A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $a = b = c = 0$.

2. Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étaient coplanaires, alors l'un d'entre eux s'écrirait comme une combinaison linéaire des deux autres, ce qui d'après **1.** est impossible. Donc, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

12 **1.** D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} x+y+z=49 \\ x+0{,}5y+0{,}2z=20 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x+y=49-z \\ x+0{,}5y=20-0{,}2z \end{cases}$$

qui s'écrit AX = B avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}5 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 49-z \\ 20-0{,}2z \end{pmatrix}.$$

2. $1 \times 0{,}5 - 1 \times 1 = -0{,}5 \neq 0$ donc A est inversible et :

$$X = A^{-1}B = -2\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 49-z \\ 20-0{,}2z \end{pmatrix}$$

soit $\begin{cases} x=0{,}6z-9 \\ y=-1{,}6z+58 \end{cases}$.

3. a) $x \geqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}6z-9 \geqslant 0 \Leftrightarrow z \geqslant 15$; $y \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -1{,}6z+58 \geqslant 0 \Leftrightarrow z \leqslant 36$ (car z entier).

Donc, l'entier z est situé entre 15 et 36.

b) x et y sont des entiers, donc z, est un multiple de 5.

Les triplets naturels solutions sont : {(0 ; 34 ; 15) ; (3 ; 26 ; 20) ; (6 ; 18 ; 25) ; (9 ; 10 ; 30) ; (12 ; 2 ; 35)}.

EXERCICES sur l'ensemble des séquences (page 26)

EXERCICES Activités de recherche (page 128)

17 **Circuits de motocross**

• ***Les outils***

– Coefficients d'une matrice.

– Produits de deux matrices.

• ***Les objectifs***

– Établir un lien entre un problème de dénombrement et un produit de matrices.

1. a) x représente le nombre de circuits allant de l'accès 2 à l'accès 3.

b) Il y a deux circuits dont le départ est 2 et l'arrivée 1.

Il y a deux circuits dont le départ est 1 et l'arrivée 3.

c) L'enchaînement d'un circuit de 2 à 1 et d'un circuit de 1 à 3 est un parcours de 1 km de départ 2 et d'arrivée 3.

2. a) m_{2k} (resp. m_{k3}) est le nombre de circuits de 500 m allant de 2 à k (resp. de k à 3). Donc $m_{2k} \times m_{k3}$ est le nombre de parcours de 1 km allant de 2 à 3 et passant par l'accès k.

b) Un parcours de 1 km allant de 2 à 3 passe nécessairement par l'accès intermédiaire 1, 2 ou 3. Donc, d'après la question précédente, le nombre de parcours de 1 km de 2 à 3 est :

$$m_{21} \times m_{13} + m_{22} \times m_{23} + m_{23} \times m_{33} = \sum_{k=1}^{3} m_{2k} \times m_{k3}.$$

c) D'après l'objectif et la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{3} m_{2k} \times m_{k3} = 16$$

soit $2 \times 2 + 1 \times x + x \times 2 = 16$ ou $3x = 12$ et donc $x = 4$.

3. a) Tout circuit de 1 km de l'accès i à l'accès j passe nécessairement par un accès intermédiaire k ; donc, d'après la question **2. b)**, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} m_{ik} \times m_{kj}$.

b) Par définition de c_{ij}, celui-ci est le produit de la ligne i de M par la colonne j de M ; il s'agit donc du coefficient ligne i colonne j de la matrice $C = M \times M = M^2$.

c) $$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 18 \\ 8 & 15 & 16 \\ 7 & 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de parcours de 1 km de 1 à 3 est donc $c_{13} = 18$.

Le nombre de parcours de 1 km de 3 à 1 est donc $c_{31} = 7$.

18 **Intersection de trois plans**

• ***Les outils***

– Écritures matricielles d'un système.

– Matrice inverse.

• ***Les objectifs***

– Utiliser le calcul matriciel pour déterminer l'intersection de trois plans de l'espace.

1. a) Un point M(x ; y ; z), s'il existe, appartient aux trois plans si :

$$(S_1)\begin{cases} x+y+z=5 \\ -x+3y-3z=-1 \\ x+5y-z=9 \end{cases} \text{ qui s'écrit AX = B,}$$

avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$.

b) D'après la calculatrice, A n'est pas inversible et donc l'ensemble des solutions du système (S_1) est soit vide, soit contient une infinité de triplets solutions.

2. a) M(x ; y ; z) $\in \Delta$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ -x+3y-3z=-1 \end{cases} \text{ soit (S) } \begin{cases} x+y=5-z \\ -x+3y=-1+3z \end{cases}.$$

b) Le système précédent s'écrit aussi :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-z \\ -1+3z \end{pmatrix} \text{ où } P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) $1 \times 3 - 1 \times (-1) = 4 \neq 0$; donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} 5-z \\ -1+3z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5-z \\ -1+3z \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} x = -1{,}5z + 4 \\ y = 0{,}5z + 1 \end{cases}$.

e) $\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \in \Delta$ si, et seulement si : $\begin{cases} x = 4 - 1{,}5z \\ y = 1 + 0{,}5z \end{cases}, z \in \mathbb{R}$.

Ainsi, Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - 1{,}5t \\ y = 1 + 0{,}5t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Δ est donc la droite passant par le point de coordonnées $(4\,;1\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1{,}5\,;0{,}5\,;1)$.

3. a) Si $\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \in \Delta$, alors il existe un réel t, tel que :

$$\begin{cases} x = 4 - 15t \\ y = 1 + 0{,}5t\,. \\ z = t \end{cases}$$

Ainsi, $x + 5y - z = 4 - 1{,}5t + 5(1 + 0{,}5t) - t = 9$, et donc $\mathrm{M} \in \mathcal{P}_3$.

On en déduit que la droite Δ est contenue dans $\mathcal{P}_3$.

b) D'après les questions précédentes, l'intersection des trois plans est la droite Δ.

19 Narration de recherche

Si $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{S}$ alors $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{S}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A} + \mathrm{S}$.

Ainsi, $\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{\mathrm{T}})$ et $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M}^{\mathrm{T}})$.

Ici, les matrices $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

20 Narration de recherche

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$; donc, l'égalité $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}$ revient à :

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où le système $\begin{cases} bg - fc = 1 \ (L_1) \\ af + bh - eb - fd = 0 \ (L_2) \\ ce + dg - ga - hc = 0 \ (L_2) \\ cf - gb = 1 \ (L_4) \end{cases}$;

or $(L_1) + (L_4)$ donne « 0 = 2 », ce qui est absurde.

Conclusion : il n'existe pas de matrices carrées A et B d'ordre 2 telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}$.

21 Narration de recherche

$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est magique si, et seulement si, il existe un réel s tel que $\begin{cases} a+b = s \\ c+d = s \\ a+c = s \\ b+d = s \\ a+d = s \\ b+c = s \end{cases}$.

D'après les lignes 1, 3 et 5 de ce système, on a $b = c = d$; ce qui implique, d'après la ligne 2, que $b = c = d = \dfrac{s}{2}$.

Ces six lignes sont alors équivalentes à $a = b = c = d = \dfrac{s}{2}$.

Ainsi, les matrices magiques, parmi les matrices carrées d'ordre 2, sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

22 TD – Chiffrement de Hill

A. 1. c) (*i*) $\begin{pmatrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}$ deviennent $\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$;

(*ii*) $\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ ont pour images respectives :

$$\begin{pmatrix} 80 \\ 262 \\ 258 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 36 \\ 100 \\ 92 \end{pmatrix} ;$$

(*iii*) ce qui devient modulo 26 :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{Y} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \mathrm{W} \\ \mathrm{O} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le code du mot « SESAME » est « CCYKWO ».

B. 1. a) On vérifie que HH' = H'H = I.

b) Pour pouvoir appliquer les étapes du codage, les coefficients de la matrice de chiffrement sont nécessairement des naturels ; donc H' ne peut pas être la matrice D recherchée pour le décodage.

c) $\mathrm{DH} = \begin{pmatrix} 79 & 52 & 52 \\ 338 & 235 & 234 \\ 312 & 208 & 209 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mod 26).

Donc $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 23 & 12 & 13 \\ 13 & 17 & 15 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ convient.

(*i*) $\begin{pmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{Y} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \mathrm{W} \\ \mathrm{O} \end{pmatrix}$ deviennent $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 14 \end{pmatrix}$;

(*ii*) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 14 \end{pmatrix}$ ont pour images respectives (avec D) :

$$\begin{pmatrix} 382 \\ 420 \\ 96 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 676 \\ 714 \\ 186 \end{pmatrix} ;$$

(*iii*) ce qui devient modulo 26 :

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le code du mot « CCYKWO » se décode comme convenu en « SESAME ».

2. $\begin{pmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{U} \\ \mathrm{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{G} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{W} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{X} \\ \mathrm{V} \end{pmatrix}$ deviennent :

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 21 \end{pmatrix}$$

qui ont pour images respectives (avec D) :

$$\begin{pmatrix} 721 \\ 719 \\ 212 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 642 \\ 534 \\ 225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 616 \\ 680 \\ 158 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 641 \\ 758 \\ 149 \end{pmatrix}$$

ce qui devient modulo 26 :

$$\begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{O} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{R} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{T} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le message « NUOTQBGQWEXV » se décode en « TRÉSOR SECRET ».

EXERCICES Entraînement (page 131)

DE TÊTE

23 **1.** $a_{93} = -8$; $a_{21} = 6$ et $a_{32} = -1$.

2. $a_{12} = a_{33} = 2$.

3. a) $\sum_{i=1}^{3} a_{i3} = -8 + 1 + 2 = -5$;

b) $\sum_{j=1}^{3} a_{2j} = 6 + 0 + 1 = 7$;

c) $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 5 + 0 + 2 = 7$.

24 $3B = \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$;

$2C = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$;

$3B - 2C = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -3 & -12 \end{pmatrix}$.

25 **a)** AB est définie, de format (1, 1) ;

b) CA n'est pas définie ;

c) CB est définie, de format (3, 1) ;

d) AC est définie, de format (1, 3).

26 **1.** Déterminant de M : $6 \times 5 - 29 \times 1 = 1$.

Le déterminant de M étant non nul, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -29 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

27 $5 \times (-2) - 2 \times 8 = -26 \neq 0$; donc le système (S) admet un unique couple solution.

LECTURE DE MATRICES

28 **1.** $M = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $M^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; oui, cette matrice est aussi magique.

29 *Corrigé sur le site élève.*

ADDITION DE MATRICES MULTIPLICATION PAR UN RÉEL

30 **a)** A + B n'est pas définie car A et B n'ont pas le même format ;

b) $A + B = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$;

c) A + B n'est pas définie car A et B n'ont pas le même format ;

d) $A + B = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 15 \\ \frac{7}{3} & 3 \end{pmatrix}$.

31 **1.** $A + B = \begin{pmatrix} 2x+y & 2y+4 \\ 12 & -3x-y \end{pmatrix}$.

Ainsi $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2y+4=2 \\ -3x-y=-5 \end{cases} \text{ ce qui est équivaut à } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

2. $A - B = \begin{pmatrix} 2x-y & 6-2y \\ 4 & y-3x \end{pmatrix}$.

Ainsi $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 6-2y=0 \\ y-3x=0 \end{cases} \text{ ce qui est équivaut à } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

32 **1.** Oui, x existe : $\begin{cases} 4 = x\sqrt{2} \\ 2 = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} \\ 2 = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \end{cases}$ équivaut à $x = 2\sqrt{2}$.

2. On peut en déduire que les vecteurs ayant pour matrice de coordonnées, dans un repère de l'espace, les matrices colonnes A et B sont colinéaires.

33 **1.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. On remarque A + A' = J ou encore A = J – A'.

34 **1.** $\vec{n}$ représente un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

2. a) (AA') est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un nombre t tel que $\overrightarrow{AA'} = t\vec{n}$ qui se traduit à l'aide de matrices de coordonnées par :

$$C_{\overrightarrow{AA'}} = C_{t\vec{n}} \text{ c'est-à-dire } C_{A'} - C_A = tC_{\vec{n}}.$$

b) D'après **2. a)**, il existe t tel que :

$$C_{A'} = \begin{pmatrix} -3+2t \\ -4t \\ 2+t \end{pmatrix}.$$

Or, $A' \in \mathcal{P}$ donc $2(-3 + 2t) - 4 \times (-4t) + 2 + t + 14,5 = 0$;

d'où $21t = -10,5$ soit $t = -0,5$. Ainsi $C_{A'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.

MULTIPLICATION DE MATRICES

35 **a)** AB est définie et $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$;

b) AB n'est pas définie car le nombre de colonnes de A(1) n'est pas égal au nombre de lignes de B(2) ;

c) AB est définie et on peut l'assimiler à un nombre réel :

$$AB = (\pi^2 + 2) = \pi^2 + 2.$$

d) AB est définie et $AB = \begin{pmatrix} -44 & \dfrac{-94}{3} \\ 20 & \dfrac{100}{3} \end{pmatrix}$.

36 **a) Fausse** :

contre-exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Fausse : contre-exemple, $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Vraie : pour toute matrice M carrée de même format que O, on a OM = O.

d) Vraie : la contraposée « si A = O alors AB = O » est vraie.

37 **1.** • a_{11} et a_{12} représentent respectivement le nombre d'autoradios et de baladeurs vendus chez VoiturPlus en décembre.

• a_{21} et a_{22} représentent respectivement le nombre d'autoradios et de baladeurs vendus chez Bagnol's en décembre.

• b_{11} et b_{21} représentent respectivement le prix d'un autoradio et d'un baladeur chez VoiturPlus en décembre.

• b_{12} et b_{22} représentent respectivement le prix d'un autoradio et d'un baladeur chez Bagnol's en décembre.

2. • $ABC = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\,700 & 2\,500 \\ 2\,175 & 2\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,700 \\ 2\,175 \end{pmatrix}$

ou $ABC = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,700 \\ 2\,175 \end{pmatrix}$.

La vente d'autoradios et de baladeurs a occasionné un chiffre d'affaires de 2 700 € chez VoiturPlus en décembre : ABC représente la matrice des recettes avec les prix unitaires de VoiturPlus.

• $ABD = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\,700 & 2\,500 \\ 2\,175 & 2\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,500 \\ 2\,000 \end{pmatrix}$

ou $ABC = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,500 \\ 2\,000 \end{pmatrix}$

La vente d'autoradios et de baladeurs a occasionné un chiffre d'affaires de 2 000 € chez Bagnol's en décembre : ABD représente la matrice des recettes avec les prix unitaires de Bagnol's.

38 **1.** $AA^T = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Comme $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan, alors par définition du produit matriciel, on a :

$$AA^T = \begin{pmatrix} \vec{e_1}\cdot\vec{e_1} & \vec{e_1}\cdot\vec{e_2} \\ \vec{e_2}\cdot\vec{e_1} & \vec{e_2}\cdot\vec{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{e_1}\|^2 & \vec{e_1}\cdot\vec{e_2} \\ \vec{e_2}\cdot\vec{e_1} & \|\vec{e_2}\|^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi , d'après la question précédente, $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$ et $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = 0$.

Donc $(O\,;\,\vec{e_1},\,\vec{e_2})$ forme un repère orthonormé du plan.

PUISSANCE D'UNE MATRICE CARRÉE

39 **a)** $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. a) $-2I + J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

donc $-2I + J = A$.

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

donc $J^2 = 3J$.

c) D'après les questions précédentes :

$$A^2 = (-2I + J)(-2I + J) = 4I^2 - 2IJ - 2JI + J^2$$

c'est-à-dire $A^2 = 4I - J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

40 *Corrigé sur le site élève.*

41 **1.** $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

ainsi $A = -3I + N$.

2. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

soit $N^2 = O$.

D'après les questions précédentes :

$$A^2 = (-3I + N)(-3I + N) = 9I^2 - 3IN - 3NI + N^2 \,;$$

ainsi $A^2 = 9I - 6N$.

3. $P_k : A^k = (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N$, $k \in \mathbb{N}$.

• P_0 est vraie car $A^0 = I$ et $(-3)^0 I + 0 \times (-3)^{-1} N = I$.

• En supposant P_k vraie ($k \in \mathbb{N}$), montrons alors que P_{k+1} est vraie :

$A^{k+1} = AA^k = (-3I + N)((-3)^k I + k(-3)^{k-1}N))$

$A^{k+1} = (-3)^{k+1} I^2 + k(-3)^k IN + (-3)^k NI + k(-3)^{k-1} N^2$

$A^{k+1} = (-3)^{k+1} I + (k+1)(-3)^k N$, c'est la propriété P_{k+1}.

Conclusion

Pour tout naturel k :

$$A^k = (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N = \begin{pmatrix} (-3)^k & 2k(-3)^{k-1} \\ 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

MATRICES CARRÉES ET GRAPHES

42 **1.** $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. D'après la calculatrice :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 14 & 5 \\ 16 & 8 & 11 & 14 \\ 14 & 11 & 8 & 16 \\ 5 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. a) $m_{23}^{(2)} = 4$: il existe 4 circuits de 4 km reliant A_2 et A_3.
b) $m_{33}^{(3)} = 8$: il existe 8 circuits de 6 km reliant A_3 et lui-même .
c) $m_{14} + m_{14}^{(2)} + m_{14}^{(3)} = 0 + 4 + 5 = 9$: il existe 9 circuits d'au plus 6 km reliant A_1 et A_4.

43 **1.** $P_k : A^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{N})$.

• P_0 est vraie car $A_0 = I$ et $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^0+2 & 4^0-1 & 4^0-1 \\ 4^0-1 & 4^0+2 & 4^0-1 \\ 4^0-1 & 4^0-1 & 4^0+2 \end{pmatrix} = I$.

• En supposant P_k vraie ($k \in \mathbb{N}$), montrons alors que P_{k+1} est vraie :

$$A^{k+1} = AA^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}$$

$A^{k+1} =$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(4^k+2)+2(4^k-1) & 3(4^k-1)+4^k+2 & 3(4^k-1)+4^k+2 \\ 3(4^k-1)+4^k+2 & 2(4^k+2)+2(4^k-1) & 3(4^k-1)+4^k+2 \\ 3(4^k-1)+4^k+2) & 3(4^k-1)+2(4^k+2) & 2(4^k+2)+2(4^k-1) \end{pmatrix}$$

$$A^{k+1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^{k+1}+2 & 4^{k+1}-1 & 4^{k+1}-1 \\ 4^{k+1}-1 & 4^{k+1}+2 & 4^{k+1}-1 \\ 4^{k+1}-1 & 4^{k+1}-1 & 4^{k+1}+2 \end{pmatrix} : P_{k+1} \text{ est vraie.}$$

Conclusion
Pour tout naturel p :

$$A^p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^p+2 & 4^p-1 & 4^p-1 \\ 4^p-1 & 4^p+2 & 4^p-1 \\ 4^p-1 & 4^p-1 & 4^p+2 \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente, le nombre de chaînes de longueur au plus n reliant les sommets 1 et 2 de ce graphe est :

$$\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}(4^p-1) = \frac{1}{3}\left(4\frac{1-4^n}{1-4} - n\right),$$

soit $\dfrac{4^{n+1}-4-3n}{9}$.

44 **1. a)** Une chaîne de longueur n est constituée d'une liste de $n + 1$ sommets. Or, ce graphe contient n sommets : dans une chaîne de longueur n, un sommet (au moins) de ce graphe est nécessairement répété. Ainsi, dans une chaîne de longueur n de ce graphe, il existe (au moins) une « boucle ».
b) Une chaîne peut être décrite par la succession ordonnée des sommets visités par cette chaîne ; si on enlève le sommet final S' d'une chaîne reliant S et S' de longueur supérieure à n, on obtient une chaîne de longueur au moins égale à n, qui contient, d'après la question précédente, (au moins) une boucle. Si on supprime cette boucle, on obtient alors une chaîne de longueur plus petite reliant S et S'. On peut réitérer ce processus tant que la chaîne « avant S' » est de longueur supérieure ou égale à n . On peut alors, au final, construire une chaîne reliant S et S' de longueur au plus n, ce qui est en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé.
Conclusion : il n'existe aucune chaîne reliant S et S'.

2. • Si $A + A^2 + \ldots + A^n$ n'a aucun coefficient nul, alors pour toute paire de sommets S et S', il existe (au moins) une chaîne de longueur au plus n reliant ces sommets. Donc, le graphe est connexe.
• Si $A + A^2 + \ldots + A^n$ admet au moins un coefficient nul, alors il y a (au moins) une paire de sommets S et S' tels qu'il n'existe aucune chaîne de longueur au plus n les reliant. D'après la question **1. b)**, il n'existe alors aucune chaîne reliant ces deux sommets : le graphe n'est donc pas connexe.
Conclusion : le graphe est connexe si, et seulement si, $A + A^2 + \ldots + A^n$ n'a aucun coefficient nul.

INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE

45 • A est inversible si, et seulement si, $1 \times b - a \times 1 \neq 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $a \neq b$.
• B est inversible si, et seulement si, $1 \times 1 - a \times b \neq 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $ab \neq 1$.
• C est inversible car $1 \times 1 - a \times 0 = 1 \neq 0$.
• D est inversible si, et seulement si, $a \times b - 0 \times 0 \neq 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
• E est inversible si, et seulement si, $1 \times 1 - a \times 1 \neq 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $a \neq 1$.
• F est inversible si, et seulement si, $0 \times 0 - a \times b \neq 0$ c'est-à-dire si, et seulement si, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

46 **1.** $B(AA') = BI = B$
et $(BA)A' = \begin{pmatrix} -ac+ac & ad-bc \\ -ac+ac & ad-bc \end{pmatrix}A' = OA' = O$.
2. Donc $B = O$ et $a = c = 0$.
3. $C(AA') = CI = C$ et $(CA)A' = OA' = O$
et donc $a = b = c = d = O$.
Ainsi, $A = O$ et $AA' = O$; mais on a aussi $AA' = I$, ce qui est absurde.
Conclusion : si $ad - bc = 0$ alors A n'est pas inversible.

47 *Corrigé sur le site élève.*

48 **1.** $M(M - aI) = M^2 - aMI = aM + bI - aM = bI$
et $(M - aI)M = M^2 - aIM = M^2 - aM = bI$.
2. D'après la question précédente, si $b \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{b}(M-aI)M = M\left(\frac{1}{b}(M-aI)\right) = I.$$

M est donc inversible et $M^{-1} = \frac{1}{b}(M - aI)$.

49 **1. a)** $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $N^3 = N^2N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = O$.

b) $(\mathrm{I}-\mathrm{N})(\mathrm{I}+\mathrm{N}+\mathrm{N}^2) = \mathrm{I}^2+\mathrm{IN}+\mathrm{IN}^2-\mathrm{NI}-\mathrm{N}^2-\mathrm{N}^3$
$= \mathrm{I}+\mathrm{N}+\mathrm{N}^2-\mathrm{N}^2-0=\mathrm{I}.$

$(\mathrm{I}+\mathrm{N}+\mathrm{N}^2)(\mathrm{I}-\mathrm{N}) = \mathrm{I}^2-\mathrm{IN}+\mathrm{NI}-\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2\mathrm{I}-\mathrm{N}^3$
$= \mathrm{I}-\mathrm{N}+\mathrm{N}-\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2+0=\mathrm{I}.$

2. D'après la question **1.**, I – N est inversible et :

$$(\mathrm{I}-\mathrm{N})^{-1} = \mathrm{I}+\mathrm{N}+\mathrm{N}^2.$$

Or, I – N = A ; A est donc inversible et :

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}+\mathrm{N}+\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ÉCRITURE MATRICIELLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

50 a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ de la forme AX = B.

De plus, $2\times 1-(-3)\times(-2)=-4\neq 0$; donc A est inversible et $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

b) $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ de la forme AX = B.

De plus, $-6\times 14-7\times 3=-105\neq 0$; donc A est inversible et

$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \frac{-1}{105}\begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{7} \end{cases}$.

c) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{8} & \sqrt{27} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$ de la forme AX = B.

De plus, $\sqrt{2}\times\sqrt{27}-(-\sqrt{3})\times\sqrt{8}=5\sqrt{6}\neq 0$; donc A est inversible et $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\frac{1}{5\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{27} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{8} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$.

d) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \dfrac{7}{6} \end{pmatrix}$ de la forme AX = B.

De plus, $6\times 3-9\times 1=9\neq 0$; donc A est inversible et

$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ \dfrac{7}{6} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x=\dfrac{5}{6} \\ y=\dfrac{1}{9} \end{cases}$.

51 1. $\begin{cases} a-b+c=-6 \\ a+b+c=-2 \\ 4a+2b+c=-9 \end{cases}$

soit $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2 . Si on note A et B ces deux matrices, on vérifie alors que AB = BA = I.

Donc, ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

3 . D'après les questions précédentes :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Ainsi, $f(x)=-3x^2+2x-1$.

52 1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 27 \\ 40 \end{pmatrix}$;

pour un tel programme de production, il faut 50 pièces de modèle m_1, 27 de modèle m_2 et 40 de modèle m_3.

2. Notons x (resp. y, z) le nombre de produits A (resp. B, C) fabriqués ce jour.

Ainsi $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 36 \\ 59 \end{pmatrix}$.

D'après la calculatrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

On peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -\dfrac{4}{3} & \dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3} & -\dfrac{7}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -\dfrac{4}{3} & \dfrac{5}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{5}{3} & -\dfrac{7}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 67 \\ 36 \\ 59 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Le programme de production qui épuisera ce stock est :
5 produits A, 10 produits B et 8 produits C.

53 1. a) $\begin{cases} 14x+12y+10z=11{,}25(x+y+z) \\ 12x+14y+13z=13{,}25(x+y+z) \\ 16x+16y+14z=15(x+y+z) \end{cases}$

soit $\begin{cases} 2{,}75x+0{,}75y-1{,}25z=0 \\ -1{,}25x+0{,}75y-0{,}25z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

qui est de la forme AX = Y où :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2{,}75 & 0{,}75 & -1{,}25 \\ -1{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) D'après la calculatrice, A n'est pas inversible : la connaissance du tableau ne suffirait pas à trouver ces coefficients.

2. a) On vérifie que, pour tout réel z :

$$\begin{cases} 2{,}75\times 0{,}25z+0{,}75\times 0{,}75z-1{,}25z=0 \\ -1{,}25\times 0{,}25z+0{,}75\times 0{,}75z-0{,}25z=0 \\ 0{,}25z+0{,}75z-z=0 \end{cases}.$$

b) On admet que les triplets $(0{,}25z\ ;\ 0{,}75z\ ;\ z)$ (avec $z\in\mathbb{R}$), sont les seuls triplets qui vérifient (1) ; donc, les coefficients recherchés sont de cette forme. De plus, on sait que chaque coefficient est un entier strictement positif et inférieur à 5. Donc, le seul triplet solution répondant à ces critères est :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}.$$

54 **1. a)** Le système (S) admet pour écriture matricielle $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 5 & -(4+\lambda) \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $(3-\lambda)(-4-\lambda) - (-2)\times 5 = -12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 10$
$= \lambda^2 + \lambda - 2$.

Donc, si λ vérifie $\lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0$, (S) admet un unique couple solution.

b) Dans ce cas, A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda^2+\lambda-2}\begin{pmatrix} -(4+\lambda) & 2 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

On a alors X = A–1B soit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2+\lambda-2}\begin{pmatrix} -(4+\lambda) & 2 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = \dfrac{4(4+\lambda)+2\times 5}{\lambda^2+\lambda-2} = \dfrac{4\lambda+26}{\lambda^2+\lambda-2} \\ y = \dfrac{-5\times(-4)+5(3-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-2} = \dfrac{-5\lambda+35}{\lambda^2+\lambda-2} \end{cases}$$

2. a) $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$: il s'agit d'une équation du second degré ; pour la résoudre, calculons son discriminant.

$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 9$; $\Delta > 0$, donc il existe deux solutions à cette équation :

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -2,$$

$$\text{et } \lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 1.$$

b) Si $\lambda = -2$, alors (S) devient :

$$\begin{cases} 5x - 2y = -4 & (L_1) \\ 5x - 2y = 5 & (L_2) \end{cases}.$$

Or, l'opération $(L_1) - (L_2)$ donne $0 = -9$ ce qui est absurde.
Donc, si $\lambda = -2$, (S) n'admet aucune solution.
De même, si $\lambda = 1$, alors (S) devient :

$$\begin{cases} 2x - 2y = -4 & (L_1) \\ 5x - 5y = 5 & (L_2) \end{cases}.$$

Or, l'opération $2{,}5(L_1) - (L_2)$ donne $0 = -15$ ce qui est absurde.
Donc, si $\lambda = 1$, (S) n'admet aucune solution.

CHIFFREMENT DE HILL

55 **1.** $DH = \begin{pmatrix} 5 & x \\ 8 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$,

$$= \begin{pmatrix} 55+16x & 80+3x \\ 88+16y & 128+3y \end{pmatrix}$$

Cherchons les naturels x et y inférieurs à 26 tels que :

$55 + 16x \equiv 128 + 3y \equiv 1 \pmod{26}$

et $80 + 3x \equiv 88 + 16y \equiv 0 \pmod{26}$.

Les naturels $x = 8$ et $y = 1$ conviennent.

2. RIEN se découpe en :

$$\begin{pmatrix} R \\ I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

en utilisant le tableau du TP 22.

Pour décoder ce message, on utilise la matrice $D = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149 \\ 144 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124 \\ 45 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

Ce qui donne les blocs de lettres $\begin{pmatrix} T \\ O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U \\ T \end{pmatrix}$.

Ainsi, le message « RIEN » se décode en « TOUT ».

56 **1.** La bonne réponse est la **c)** : « si le déterminant de H n'est multiple ni de 2 ni de 13 ».

En effet, un entier x est multiple de 2 (resp. de 13) si, et seulement si, $E\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ $\left(\text{resp. si, et seulement si, } E\left(\dfrac{x}{13}\right) = \dfrac{x}{13}\right)$ où E est la fonction partie entière.

2. Si le déterminant de H n'est multiple ni de 2 ni de 13, alors ce déterminant est premier avec 26 : en effet, l'ensemble des diviseurs de 26 est {1 ; 2 ; 13 ; 26} ; donc si 2 et 13 ne divisent pas le déterminant de H, il en est de même pour 26. Donc, le plus grand commun diviseur à 26 et au déterminant de H est 1.

Conclusion : « Il existe une matrice de décryptage » qui correspond au cas 1.

3. a) $1\times 4 - 2\times 3 = -2$;
ainsi 2 divise le déterminant de H et donc, dans ce cas, il n'existe pas de matrice de décryptage.

b) $1\times 3 - 2\times 4 = -5$;
ainsi 2 et 13 ne divise pas le déterminant de H et donc, dans ce cas, il existe une matrice de décryptage.

AVEC LES TICE

57 **1.** M^2 se lit dans la plage de cellules D3:E4
M^3 se lit dans la plage de cellules D5:E6
M^4 se lit dans la plage de cellules D7:E8
M^5 se lit dans la plage de cellules D9:E10
M^6 se lit dans la plage de cellules D11:E12
M^7 se lit dans la plage de cellules D13:E14

2. Si on enlève les $ dans la formule recopiée, on n'obtient plus les matrices M^k avec $3 \leqslant k \leqslant 7$: on aurait en D5:E6 la formule `=PRODUITMAT(A3:B4 ; D3:E4)` ; la plage A3:B4 n'ayant pas de valeur, ce calcul ne serait pas défini. De même pour les plages des cellules suivantes.

3. P_n : $M^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

• P_0 est vraie car $M^{2\times 0} = I$ et $\begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I$.

• En supposant P_n vraie ($n \in \mathbb{N}$), montrons alors que P_{n+1} est vraie :

$$M^{2n+2} = M^2M^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Pour tout naturel n, $M^{2n} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

$Q_n : M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

• Q_0 est vraie car :

$$M^{2\times0+1} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 2^0 \\ 2^{0+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En supposant Q_n vraie ($n \in \mathbb{N}$), montrons alors que Q_{n+1} est vraie :

$$M^{2n+3} = M^2M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2^{n+1} \\ 2^{n+2} & 0 \end{pmatrix}$$

donc Q_{n+1} est vraie.

Conclusion

Pour tout naturel n, $M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Prendre toutes les initiatives

58 **1.** $M^TM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$.

$$M^TM = \begin{pmatrix} m_{11}^2+m_{21}^2+m_{31}^2 & \dots & \dots \\ \dots & m_{12}^2+m_{22}^2+m_{32}^2 & \dots \\ \dots & \dots & m_{13}^2+m_{23}^2+m_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$\mathrm{Tr}(M^TM) = m_{11}^2+m_{21}^2+m_{31}^2+m_{12}^2+m_{22}^2+m_{32}^2+m_{13}^2+m_{23}^2+m_{33}^2$.

Ainsi, $\mathrm{Tr}(M^T M) = 0$ si, et seulement si, $m_{ij} = 0$ pour tous entiers i et j entre 1 et 3 ; c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(M^T M) = 0$ si, et seulement si, $M = O$.

59 **1.** Nommons x (resp. y, z) le nombre de billets de 100 € (resp. 50 €, 20 €).

$$(S)\begin{cases} 100x+50y+20z = 2\ 050 \\ x+y+z = 80 \end{cases}$$

où x, y et z sont des entiers strictement positifs.

$\begin{cases} 100x+50y = 2\ 050-20z \\ x+y = 80-z \end{cases}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ 050-20z \\ 80-z \end{pmatrix};$$

or $100 \times 1 - 50 \times 1 = 50 \neq 0$;

donc $\begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 1 & -50 \\ -1 & 100 \end{pmatrix}$;

ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 1 & -50 \\ -1 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\ 050-20z \\ 80-z \end{pmatrix}$,

soit $\begin{cases} x = 0{,}6z-39 \\ y = -1{,}6z+119 \end{cases}$.

De plus, x, y et z sont des entiers strictement positifs, donc z est un multiple de 5 et :

$$0{,}6z - 39 > 0 \Leftrightarrow z > 65$$

et $-1{,}6z + 119 > 0 \Leftrightarrow z \leqslant 74$ (car z est un entier).

Ainsi, le seul triplet solution de (S) est $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 70 \end{cases}$.

Il y a donc 3 billets de 100 €, 7 billets de 50 € et 70 billets de 20 €.

Le jour du BAC (page 136)

60 *Corrigé sur le site élève.*

61 **1.** $AM = \begin{pmatrix} am_{11} & am_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aL_1 \\ L_2 \end{pmatrix}.$

Réponse exacte : **b)**.

2. $MB = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} + am_{12} \\ m_{21} & m_{21} + am_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_1 + aC_2 \end{pmatrix}.$

Réponse exacte : **c)**.

3. $DM = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{11} + am_{21} & m_{12} + am_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_1 + aL_2 \end{pmatrix}.$

Réponse exacte : **b)**.

62 **1. a)** On remarque que $A = J - 4I$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -4$ conviennent.

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J.$

c) D'après **1. a)** et **b)** :

$$A^2 = (J - 4I)(J - 4I) = J^2 - 4JI - 4IJ + 16I^2$$
$$= 3J - 4J - 4J + 16I \ ;$$

donc $A^2 = -5J + 16I$.

2. a) D'après **1.** :

$$A^2 + 5A = -5J + 16I + 5(J - 4I) \ ;$$

donc $A^2 + 5A = -4I$.

b) D'après la question **2. a)** :

$$A(A + 5I) = (A + 5I)A = -4I \ ;$$

donc $A\left(\frac{-1}{4}(A + 5I)\right) = \left(\frac{-1}{4}(A + 5I)\right)A = I.$

Ainsi, A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}(A + 5I) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

63 **1.a)** $(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix};$$

ainsi, $(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ soit $(R_\theta)^2 = R_{2\theta}$.

b) $P_n : (R_\theta)^n = R_{n\theta}$ $(n \in \mathbb{N})$.

• P_0 est vraie car $(R_\theta)^0 = I$

et $R_{0\times\theta} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

• En supposant P_n vraie $(n \in \mathbb{N})$, montrons alors que P_{n+1} est vraie :

$$R_\theta^{n+1} = R_\theta R_\theta^n = R_\theta R_{n\theta}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

$R_\theta^{n+1} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) & -(\cos(\theta)\sin(n\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)) \\ \sin(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta) & \cos(\theta)\cos(n\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta) \end{pmatrix}$$

$R_\theta^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Pour tout naturel n, $R_\theta^n = R_{n\theta}$.

2. a) D'après **1.** :

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) & -\sin(2\pi) \\ \sin(2\pi) & \cos(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $R^6 = I$.

b) D'après **2. a)**, $R \times R^5 = R^5 \times R = I$; donc R est inversible et :

$$R^{-1} = R^5 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) $2\,012 = 335 \times 6 + 2$, donc :

$$R^{2012} = R^{335\times6} \times R^2 = (R^6)^{335} \times R^2$$

Or, d'après **2. a)**, $R^6 = I$; donc :

$$R^{2012} = I^{335} \times R^2 = I \times R^2 = R^2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $R^{2012} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

64 **1. a)** L'affichage « Impossible » signifie que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

b) L'affichage des listes L_1 et L_2 donne la matrice inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque $ad - bc \neq 0$:

On peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{det} & \frac{-b}{det} \\ \frac{-c}{det} & \frac{a}{det} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{det} & \frac{-b}{det} \\ \frac{-c}{det} & \frac{a}{det} \end{pmatrix} = I.$$

c) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $det = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5 \neq 0$; donc l'algorithme affiche la matrice inverse M^{-1} : $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

2. a) D'après l'énoncé $\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 12 \\ \frac{2}{3}x + y = 13 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases}$

de la forme $AX = Y$; avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

b) D'après la question **1. c)** :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

c) D'après la question précédente, la distance entre le domicile et le lieu de travail de cette personne est $6 + 9 = 15$ km.

Pour aller plus loin (page 138)

65 **1.** $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$(a+d)M-(ad-bc)I =$

$= \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$(a+d)M-(ad-bc)I = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M^2 = (a+d)M-(ad-bc)I$.

2. Si $ad - bc \neq 0$ alors, d'après la question précédente :

$$M^2 = (a+d)M-(ad-bc)I.$$

D'où $M\left(\frac{1}{ad-bc}((a+d)I-M)\right) =$

$$= \left(\frac{1}{ad-bc}((a+d)I-M)\right)M = I.$$

Donc, M est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I-M) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

66 **1. a)** Si M est un point de $\mathscr{D}$, alors CHM est un triangle rectangle en H ; d'après le théorème de Pythagore, $CM^2 = CH^2 + HM^2$ donc $CH \leqslant CM$ pour tout point M de $\mathscr{D}$. Ainsi, CH est la distance de C à $\mathscr{D}$, notée $d(C, \mathscr{D})$.

b) $\det(G) = AB^2 \times AC^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2$, donc :

$$\frac{\det(G)}{AB^2} = AC^2 - \frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{AB^2} ;$$

or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$, donc :

$$\frac{\det(G)}{AB^2} = AC^2 - AH^2 = CH^2$$

(d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACH rectangle en H).

Ainsi, $d(C, \mathscr{D})^2 = \dfrac{\det(G)}{AB^2}$.

2. a) A(0 ; 3) et B(1 ; 5) appartiennent à $\mathscr{D}$.

$\overrightarrow{AB}(1 ; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(3 ; 3)$.

b) On a $\overrightarrow{AB}(1 ; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(3 ; 3)$; donc $G = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

c) D'après la question **1. b)** :

$$d(C, \mathscr{D})^2 = \frac{\det(G)}{AB^2} = \frac{5\times18-9\times9}{5} = \frac{9}{5}.$$

Donc $d(C, \mathscr{D}) = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

67 **1. a)** PP' = P'P = I donc P et P' sont des matrices inverses l'une de l'autre.

b) $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = T$.

2. a) $T^2 = (PDP')(PDP') = (PD)(P'P)(DP') = PDIDP' = PD^2P'$.

b) $P_n : T^n = PD^{0P'}$, $n \in \mathbb{N}$.

• P_0 est vraie car $T^0 = I$ et $D^0P' = PIP' = PP' = I$.

• En supposant P_n vraie ($n \in \mathbb{N}$), montrons alors que P_{n+1} est vraie :

$T^{n+1} = TT^n = (PDP')(PD^nP') = (PD)(P'P)(D^nP') = PD^{n+1}P'$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout naturel n, $T^n = PD^nP'$.

c) D est une matrice diagonale ; donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Donc $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6^{n-1} & 6^{n-1} & 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6^{n-1} & 6^{n-1} & 6^{n-1} \\ 2\times6^{n-1} & 2\times6^{n-1} & 2\times6^{n-1} \\ 3\times6^{n-1} & 3\times6^{n-1} & 3\times6^{n-1} \end{pmatrix} (n \in \mathbb{N}).$$

3. a) $D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ vérifie $D'^2 = D$.

b) Si on pose M = PD'P', alors $M^2 = PD'^2P' = PDP' = T$ (question **1. b)**).

68 **1.** $M - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$; son déterminant vaut :

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

L'équation $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$ admet au plus deux racines, donc $M - \lambda I$ est inversible sauf pour au maximum deux valeurs de distances algébriques.

2. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a - \frac{\lambda}{n^2+1},\ b_n = b,\ c_n = c \text{ et } d_n = d - \frac{1}{n^2+1}.$$

D'après **1.**, il existe au maximum deux naturels n pour lesquels M_n n'est pas inversible : on enlève ces éventuelles matrices de la suite (M_n) ; on a alors une suite de matrices inversibles convergeant vers la matrice M ; car les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) convergent respectivement vers a, b, c et d.

69 **1. a)** Les consommations intermédiaires relatives aux transports s'élèvent à 220 000 € sur la production de la branche industrie.

b) $C = \begin{pmatrix} 500\,000 \\ 800\,000 \\ 200\,000 \end{pmatrix}$.

2. $C_F = P - C = \begin{pmatrix} 500\,000 \\ 1\,200\,000 \\ 300\,000 \end{pmatrix}$.

3. a) $a_{11} = \dfrac{150\,000}{1\,000\,000} = 0{,}15$ $\quad a_{12} = \dfrac{300\,000}{2\,000\,000} = 0{,}15$

$a_{13} = \dfrac{50\,000}{500\,000} = 0{,}1$ $\quad a_{21} = \dfrac{130\,000}{1\,000\,000} = 0{,}13$

$a_{22} = \dfrac{450\,000}{2\,000\,000} = 0{,}225$ $\quad a_{23} = \dfrac{220\,000}{500\,000} = 0{,}44$

$a_{31} = \dfrac{100\,000}{1\,000\,000} = 0{,}1$ $\qquad a_{32} = \dfrac{80\,000}{2\,000\,000} = 0{,}04$

$a_{33} = \dfrac{20\,000}{500\,000} = 0{,}04.$

b) $\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 500\,000 \\ 800\,000 \\ 200\,000 \end{pmatrix} = \mathrm{C}.$

c) $(\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{P} = \mathrm{IP} - \mathrm{AP} = \mathrm{P} - \mathrm{C} = \mathrm{C_F}.$

4. a) Si $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 1\,800\,000 \\ 500\,000 \end{pmatrix}$ alors :

$$\mathrm{C_F} = (\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 530\,000 \\ 1\,045\,000 \\ 308\,000 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathrm{C_F} = (\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{P}$ et si $(\mathrm{I} - \mathrm{A})$ est inversible, alors :

$\mathrm{P} = (\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{C_F}$ et d'après la calculatrice, $\mathrm{P} \approx \begin{pmatrix} 1\,225\,000 \\ 2\,509\,000 \\ 649\,000 \end{pmatrix}.$

70 **1.** $\begin{cases} 2x + y + z = 8 \ (\mathrm{L_1}) \\ x - 2y - z = -6 \ (\mathrm{L_2}) \\ 4x - 3y - z = -4 \ (\mathrm{L_3}) \end{cases}$; or $(\mathrm{L_3}) = (\mathrm{L_1}) + 2(\mathrm{L_2})$;

donc ; cela revient à résoudre le système :

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x - 2y - z = -6 \end{cases}.$$

2. a) (S) s'écrit $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - z \\ -6 + z \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

b) $2 \times (-2) - 1 \times 1 = -5 \neq 0$; donc A est inversible et

$\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{-1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

c) Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1}\begin{pmatrix} 8 - z \\ -6 + z \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 - z \\ -6 + z \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} x = 2 - 0{,}2z \\ y = 4 - 0{,}6z \end{cases}.$

3. Une représentation paramétrique de l'intersection des trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ est :

$$\begin{cases} x = 2 - 0{,}2t \\ y = 4 - 0{,}6t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = t \end{cases}$$

droite passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} -0{,}2 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

71 **1.** Réflexion d'axe (Oy) :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \text{ donc } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Affinité orthogonale de base (Oy) et de rapport 0,5 :

$$\begin{cases} x' = 0{,}5x \\ y' = y \end{cases} \text{ donc } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$