

Divisibilité et congruences

SÉQUENCE 1

Divisibilité et division euclidienne (page 8)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 1

A 1. a) Le numéro du premier samedi 2012 est 7 ; celui du deuxième samedi est 14 ; et celui du treizième samedi est 91.

b) Le numéro n d'un samedi quelconque de l'année 2012 s'écrit $n = 7k$, avec k entier naturel non nul. Dans ce cas, n est un multiple de 7.

2. a) Les numéros du deuxième et du troisième dimanche de 2012 sont respectivement 8 et 15.

b) La forme générale du numéro d'un dimanche de 2012 est $n = 7k + 1$, avec k entier naturel.

c) $141 = 7 \times 20 + 1$; $153 = 21 \times 7 + 6$; $179 = 7 \times 25 + 4$; $344 = 49 \times 7 + 1$.

Les jours de l'année 2012 dont les numéros sont 141 et 344 tombent un dimanche ; ce n'est pas le cas des jours dont les numéros sont 153 et 179.

d) Le premier jour et le dernier jour du mois d'avril 2012 portent respectivement les numéros 92 et 121. Comme $92 = 7 \times 13 + 1$, le premier jour d'avril est un dimanche.

Il en résulte que les dimanches du mois d'avril ont pour numéros 92, 99, 106, 113 et 120.

e) La différence $n - p$ des numéros n et p de deux dimanches de 2012 est un multiple de 7.

f) La réciproque n'est pas vraie. En effet, la différence $100 - 93$ est un multiple de 7 alors que 93 et 100 ne sont pas les numéros de deux dimanches de 2012.

3. a) 7 divise $n - 1$ signifie que $n - 1 = 7k$ (avec k entier naturel), soit : $n = 7k + 1$.

Le jour de numéro n est donc un dimanche de 2012.

b) 7 divise $n - 2$ signifie que $n = 7k + 2$, avec k entier naturel. Le jour de numéro n est donc un lundi.

c) Le numéro d'un jour qui tombe un mardi s'écrit $n = 7k + 3$, avec k entier naturel.

Le numéro d'un jour qui tombe un mercredi s'écrit $n = 7k + 4$, avec k entier naturel.

B 1.

Reste	0	1	2	3	4	5	6
Jour de la semaine	S	D	L	Ma	Me	J	V

2. Les jours numérotés n et p tombent le même jour de la semaine si, et seulement si, $n - p$ est un multiple de 7. En effet, d'après le tableau ci-dessus, n et p tombent le même jour de la semaine si, et seulement si, n et p ont le même reste dans la division euclidienne par 7. Cela signifie que $n = 7k + r$ et $p = 7k' + r$ avec $0 \leq r < 7$, k et k' étant des entiers naturels. Il en résulte que $n - p = 7(k - k')$ est un multiple de 7.

Réciproquement, supposons que $n - p = 7q$, avec q entier naturel. La division euclidienne de p par 7 s'écrit :

$$p = 7s + r,$$

où s est un entier naturel et $0 \leq r < 7$.

On déduit que :

$$n = 7q + p = 7q + (7s + r) = 7(q + s) + r.$$

Comme $q + s$ est un entier naturel et $0 \leq r < 7$, alors r est le reste de la division euclidienne de n par 7. Il en résulte que n et p ont le même reste dans la division euclidienne par 7.



b) Le numéro du 15 mars 2013 est 74 ; celui du 17 octobre est 290. On saisit dans l'algorithme $n = 290$ et $p = 74$. L'algorithme affiche « Les jours de numéros n et p ne tombent pas le même jour de la semaine ».

Problème 2

$$\begin{aligned}
 3\ 259 &= 407 \times 8 + 3 \\
 &= (50 \times 8 + 7) \times 8 + 3 \\
 &= 50 \times 8^2 + 7 \times 8 + 3 \\
 &= (6 \times 8 + 2) \times 8^2 + 7 \times 8 + 3 \\
 &= 6 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 7 \times 8 + 3.
 \end{aligned}$$

Donc, le nombre A s'écrit, en base 8, sous la forme $A = (6\ 273)_8$.

Problème 3

1. Le numéro ISBN du livre sans la clé est 97820917266.

On obtient :

$$S = (9 + 8 + 0 + 1 + 2 + 6) + 3(7 + 2 + 9 + 7 + 6 + 4)$$

$$S = 131 = 13 \times 10 + 1,$$

d'où $c_{13} = 10 - 1 = 9$.

Il en résulte que la clé est 9.

2. b) On conjecture que la somme S' est un multiple de 10.

c) $S = 10q + r$, avec $0 \leq r < 10$.

• Si $r \neq 0$, alors $c_{13} = 10 - r$; d'où :

$$S' = S + c_{13} = 10q + r + 10 - r = 10(q + 1),$$

donc S' est un multiple de 10.

• Si $r = 0$, alors $c_{13} = 0$; d'où :

$$S' = S = 10q \text{ est un multiple de } 10.$$

3. a) En modifiant un seul chiffre, on constate que S' n'est plus un multiple de 10. On détecte la présence d'une erreur dans le numéro ISBN saisi si la somme pondérée S' ne se termine pas avec 0.

b) Supposons que le chiffre d'indice k_0 est modifié.

• Si k_0 est *impair*, alors $|S'' - S'| = |c'_1 - c_{k_0}|$.

$c_1 \neq c_{k_0}$, donc $0 < |S'' - S'| \leq 9$.

S' étant un multiple de 10, S'' ne peut pas l'être.

• Si k_0 est *pair*, alors $|S'' - S'| = 3|c'_2 - c_{k_0}|$.

Sachant que $0 < |c'_2 - c_{k_0}| \leq 9$, $3|c'_2 - c_{k_0}|$ n'est pas un multiple de 10. S' étant un multiple de 10, S'' ne peut pas l'être.

EXERCICES

Application (page 14)

1 $1. -2n(n + 2) + 6 = -2n^2 - 4n + 6.$

2. $a = -2nb + 6$ équivaut à $a + 2nb = 6.$

On a b divise a si, et seulement si, b divise $a + 2nb$, ce qui équivaut à b divise 6.

On déduit que b divise a si, et seulement si, b est égal à $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ ou 6.

Dans ce cas, les valeurs de n sont :

$$-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1 \text{ ou } 4.$$

2 Pour n entier relatif différent de 4, $\frac{35}{n-4}$ est entier si, et seulement si, $n - 4$ divise 35.

Les diviseurs de 35 sont :

$$-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7 \text{ ou } 35.$$

On déduit que $\frac{35}{n-4}$ est entier si, et seulement si, n est égal à :

$$-31, -3, -1, 3, 5, 9, 11 \text{ ou } 39.$$

3 $24n + 8 = 24(n + 2) - 40$, donc $a = 24b - 40.$

On déduit que b divise a si, et seulement si, b divise 40.

Ce qui équivaut à b est égal à :

$$-40, -20, -10, -8, -5, -4, -2, -1,$$

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 \text{ ou } 40.$$

Autrement dit, n est égal à :

$$-42, -22, -12, -10, -7, -6, -4, -3, -1,$$

$$0, 2, 3, 6, 8, 18 \text{ ou } 38.$$

4 On a $(x + 2)(y - 3) = 15$, avec x entier naturel ; donc $x + 2 \geq 2$ et $y - 3 > 0$.

L'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} x + 2 = 3 \\ y - 3 = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2 = 5 \\ y - 3 = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + 2 = 15 \\ y - 3 = 1 \end{cases},$$

$$\text{soit } \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 13 \\ y = 4 \end{cases}.$$

5 $a^2 - b^2 = 20$ équivaut à $(a - b)(a + b) = 20$.
On remarque que $a - b < a + b$, $a - b$ et $a + b$ ont la même parité.

On déduit que l'équation donnée est équivalente à :

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 10 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}.$$

6 On a $A = \frac{n^2 - 2n + 9}{n - 3} = n + 1 + \frac{12}{n - 3}$;

donc A est entier si, et seulement si, $n - 3$ divise 12 ; ce qui équivaut à n est égal à :

-9, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 ou 15.

7 On pose $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$. Si un entier positif d divise a et b , alors d divise $3a - 3b = 5$; donc, les seules valeurs possibles de d sont 1 et 5.

8 a) On a $n^2 + 3n + 2 = (n + 2)(n + 1)$; donc, quel que soit l'entier n , $n + 2$ divise $n^2 + 3n + 2$.

b) On a $4n^2 + 12n + 20 = 4(n^2 + 3n + 2) + 12$.

Comme $n + 2$ divise $n^2 + 3n + 2$, on déduit que $n + 2$ divise $4n^2 + 12n + 20$ si, et seulement si, $n + 2$ divise 12 ; ce qui équivaut à n est égal à :

0, 1, 2, 4 ou 10.

9 $3n + 12 = 3(n - 2) + 18$. On déduit que $n - 2$ divise $3n + 12$ si, et seulement si, $n - 2$ divise 18. Ce qui équivaut à n est égal à :

1, 3, 4, 5, 8, 11 ou 20.

10 1. Si 37 divise $n - 11m$, alors 37 divise $10(n - 11m)$.

$$\begin{aligned} 10(n - 11m) &= 10n - 110m \\ &= 10n + m - 111m \\ &= a - 37 \times 3m \end{aligned}$$

Donc 37 divise $10(n - 11m) + 37 \times 3m = a$.

2. La réciproque est fautive.

Pour $n = 5$ et $m = 19$, on a $a = 74 = 37 \times 2$;
donc $n - 11m = -204$ n'est pas divisible par 37.

11 $a = 13k + 1$ et $b = 4 - 26k$.

Soit d un diviseur positif commun à a et b .

d divise a et b , donc il divise $2a + b = 6$. Il en résulte que les valeurs possibles de d sont :

1, 2, 3 ou 6.

12 Si a divise $n^2 + 5n + 17$ et $n = +3$, alors a divise $n^2 + 5n + 17 - (n + 3)(n + 2) = 11$.

13 Les hypothèses se traduisent par :

$$\begin{cases} n = 4q + 3 \\ n = 5q + 1 \end{cases}$$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 5q + 1 = 4q + 3 \\ n = 4q + 3 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} q = 2 \\ n = 11 \end{cases}.$$

L'entier recherché est 11.

14 $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
 $= n^2(n + 3) + 3n + 1$;

donc $3n + 1$ est le reste de la division euclidienne de $(n + 1)^3$ par n^2 si, et seulement si, $0 \leq 3n + 1 < n^2$.

On cherche donc les entiers naturels n , tels que :

$$n^2 - 3n - 1 > 0.$$

$$n^2 - 3n - 1 = \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}.$$

On cherche les entiers naturels n , tels que :

$$\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{13}{4} \text{ soit } n - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

D'où $n \geq 4$.

15 $2n^2 + n = 2n(n + 1) - n$
 $= 2n(n + 1) - n - 1 + 1$
 $= (2n - 1)(n + 1) + 1.$

Si $n \geq 1$, alors le quotient et le reste de la division euclidienne de $2n^2 + n$ par $n + 1$ sont respectivement $2n - 1$ et 1. Si $n = 0$, alors $q = 0$ et $r = 0$.

16 1. $(4n - 3)^2 = 16n^2 - 24n + 9$
 $= 8(2n^2 - 3n) + 9$

2. L'écriture ci-dessus ne traduit pas la division euclidienne de $(4n - 3)^2$ par 8 car $9 > 8$.

$$(4n - 3)^2 = 8(2n^2 - 3n + 1) + 1,$$

$$2n^2 - 3n + 1 = (2n - 1)(n - 1) ;$$

donc, pour tout entier naturel n , $2n^2 - 3n + 1 \geq 0$.

On déduit que pour tout entier $n \geq 1$, $2n^2 - 3n + 1$ est le quotient de la division euclidienne de $(4n - 3)^2$ par 8 et le reste est 1.

3. $(4n - 3)^2 = 8(2n^2 - 3n) + 9$ est l'écriture de la division euclidienne de $(4n - 3)^2$ par $(2n^2 - 3n)$ si, et seulement si, $9 < 2n^2 - 3n$, soit $2n^2 - 3n - 9 > 0$.

Comme $2n^2 - 3n - 9 = (2n + 3)(n - 3)$ alors, pour tout $n > 3$, $2n^2 - 3n - 9 > 0$. Il en résulte que, pour tout $n \geq 4$, l'écriture $(4n - 3)^2 = 8(2n^2 - 3n) + 9$ est celle de la division euclidienne de $(4n - 3)^2$ par $(2n^2 - 3n)$.

17 $a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$.

- Une paire de deux entiers consécutifs contient un entier pair ; donc, le produit de deux entiers consécutifs est pair. D'où $a(a^2 - 1)$ est pair.

- Dans la division euclidienne de a par 3, les restes possibles sont 0, 1 ou 2. L'entier a s'écrit $3p$, $3p + 1$ ou $3p + 2$, avec p entier naturel.

Si $a = 3p$, alors a est multiple de 3, donc $a(a^2 - 1)$ l'est aussi.

Si $a = 3p + 1$, alors $a - 1$ est multiple de 3, donc $a(a^2 - 1)$ l'est aussi.

Si $a = 3p + 2$, alors $a + 1 = 3(p + 1)$ est multiple de 3, donc $a(a^2 - 1)$ l'est aussi.

En définitive, quel que soit l'entier a , le nombre $a(a^2 - 1)$ est divisible par 3.

18 • Si $n = 2p$, alors $A = 2(24p^4 + 5p) + 1$ est impair.

- Si $n = 2p + 1$, alors son carré est impair.

En effet $n^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.

n^2 étant impair, n^4 l'est aussi ; donc :
 $n^4 = 2q + 1$ avec q entier.

On déduit que :

$$3n^4 + 5n + 1 = 3(2q + 1) + 5(2p + 1) + 1 \\ = 2(3q + 5p + 4) + 1 ;$$

donc A est impair.

En définitive, pour tout entier naturel n , A est impair.

Comme $n(n + 1)$ est pair, alors A n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

19 a) Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel n par 5 est égal à :

$$0, 1, 2, 3 \text{ ou } 4 ;$$

donc n s'écrit sous la forme :

$$5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3 \text{ ou } 5k + 4.$$

b) $n^2 + n = n(n + 1)$. Soit r le reste de la division euclidienne de $n^2 + n$ par 5.

• Si $n = 5k$, alors 5 divise n , d'où 5 divise $n(n + 1)$.

Donc $r = 0$.

• Si $n = 5k + 1$, alors $5(5k^2 + 3k) + 2$.

Donc $r = 2$.

• Si $n = 5k + 2$, alors $n^2 + n = 5(5k^2 + 5k + 1) + 1$.

Donc $r = 1$.

• Si $n = 5k + 3$, alors $n^2 + n = 5(5k^2 + 7k + 2) + 2$.

Donc $r = 2$.

• Si $n = 5k + 4$, alors $n + 1 = 5(k + 1)$ est divisible par 5.

Donc $n(n + 1)$ l'est aussi. Dans ce cas $r = 0$.

En conclusion, $r = 2$ si, et seulement si :

$$n = 5k + 1 \text{ ou } n = 5k + 3.$$

20 Si $n = 3p$, alors n est multiple de 3 ; donc $n(5n^2 + 1)$ l'est aussi.

• Si $n = 3p + 1$, alors $5n^2 + 1 = 3(15p^2 + 10p + 2)$ est divisible par 3 ;

donc $n(5n^2 + 1)$ l'est aussi.

• Si $n = 3p + 2$, alors $5n^2 + 1 = 3(15p^2 + 20p + 7)$ est divisible par 3 ;

donc $n(5n^2 + 1)$ l'est aussi.

En conclusion, pour tout entier naturel n , le nombre $n(5n^2 + 1)$ est divisible par 3.

21 On remarque que la somme et la différence de deux entiers ont toujours la même parité.

En effet $(a + b) + (a - b) = 2a$ est pair ; donc, soit les deux termes sont pairs, soit ils sont impairs.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. D'après la remarque ci-dessus, si $a^2 - b^2$ est impair, alors $a - b$ et $a + b$ sont impairs ;

ils s'écrivent donc sous la forme :

$$a + b = 2p + 1 \text{ et } a - b = 2q + 1$$

avec p et q entiers.

D'où $a = p + q + 1$ et $b = p - q$.

Comme $p + q$ et $p - q$ ont la même parité, alors $p + q + 1$ et $p - q$ n'ont pas la même parité.

SÉQUENCE 2

Congruences (page 18)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Problème 4

A 1. a) La première année dont le millésime est divisible par 4 après 1789 est 1792.

Comme $\frac{2012 - 1792}{4} + 1 = 56$, le nombre d'années dont

le millésime est divisible par 4 entre 1789 et 2012 est 56.

b) Entre 1789 et 2012, il y a trois années dont le millésime est divisible par 100.

c) Entre 1789 et 2012, seule l'année 2000 est divisible par 400.

2. On déduit de ce qui précède qu'il y a 54 années bissextiles entre 1789 et 2012. Par conséquent, le nombre de jours écoulés entre le 14 juillet 1789 et le 14 juillet 2012 est :

$$N = (2012 - 1789) \times 365 + 54 = 81\,449.$$

Le reste de la division euclidienne de N par 7 est 4.

3. a) $N = 7 \times 11\,635 + 4$ et $r = 7 \times 0 + 4$; donc N et r ont le même reste dans la division euclidienne par 7. Cela veut dire que $N \equiv r \pmod{7}$.

b) Une semaine compte 7 jours ; donc, lorsque le nombre de jours écoulés entre deux dates données est un multiple de 7, alors ces deux dates correspondent au même jour de la semaine. La connaissance de r permet donc de connaître le décalage à effectuer pour trouver le jour de la semaine d'une date donnée.

c) Entre le 14 juillet 1789 et le 14 juillet 2012, 81 449 jours se sont écoulés, soit 11 635 semaines et 4 jours. On déduit que, abstraction faite sur les semaines, le 14 juillet 1789 était 4 jours avant le samedi 14 juillet 2012, c'est-à-dire un mardi.

B 1. La division euclidienne de a par b s'écrit $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$; donc $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

$0 \leq r < b$ implique $0 \leq \frac{r}{b} < 1$, d'où $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$.

Cela veut dire que $E\left(\frac{a}{b}\right) = q$.

2. a) Les entiers $E\left(\frac{A-1}{4}\right)$, $E\left(\frac{A-1}{100}\right)$ et $E\left(\frac{A-1}{400}\right)$ représentent respectivement le nombre de millésimes qui précède l'année A , divisible par 4, divisible par 100 et divisible par 400. On déduit que le nombre d'années bissextiles écoulées entre ces deux dates est :

$$B = E\left(\frac{A-1}{4}\right) - E\left(\frac{A-1}{100}\right) + E\left(\frac{A-1}{400}\right).$$

b) Le nombre d'années qui précèdent l'année A est $A - 1$. Chaque année contient au moins 365 jours. Quand elle est bissextile, elle contient un jour de plus. Comme B est le nombre d'années bissextiles qui précède l'année A , alors le nombre de jours dans les années qui précède l'année A est :

$$N(A) = B + 365(A - 1).$$

3. N est le nombre de jours entre les dates (1 ; 1 ; 1) et (J ; M ; A), donc :

$$N = N(A) + R = 365(A - 1) + B + R.$$

Comme $365 \equiv 1 \pmod{7}$, alors :

$$N \equiv A - 1 + B + R \pmod{7}.$$

a) Le nombre N associé à la date du 1^{er} janvier 2013 est tel que :

$$N \equiv 2\,501 \equiv 2 \pmod{7}.$$

b) Le nombre N associé à la date du 14 juillet 1789 est tel que :

$$N \equiv 2\,417 \equiv 2 \pmod{7};$$

donc, ces deux nombres ont le même reste dans la division euclidienne par 7. On déduit que ces deux dates tombent le même jour de la semaine. Comme le 1^{er} janvier 2013 est un mardi, il en était de même pour le 14 juillet 1789.

Problème 5

A 2. a) $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$, donc $(10^2)^3 \equiv 3^3 \pmod{97}$, soit : $10^6 \equiv 27 \pmod{97}$.

On en déduit que $10^6 \times B + C \equiv 27B + C \pmod{97}$.

Autrement dit $A \equiv 27B + C \pmod{97}$.

b) Pour rendre le calcul exécutable, on cherche le reste r de la division euclidienne de $27B + C$ par 97. On aura $A \equiv r \pmod{97}$, r étant aussi le reste de la division euclidienne de A par 97. On calcule ensuite la clé $K = 97 - r$.

3. a) $B2 = \text{ENT}(A2/10^6)$

$$C2 = A2 - B2 * 10^6$$

$$D2 = 27 * B2 + C2$$

$$E2 = 97 - \text{MOD}(D2; 97)$$

b) et c)

	A	B	C	D	E
1	Numéro A	B	C	27B + C	Clé
2	2 82 05 17 300 945	2 820 517	300 945	76 454 904	11
3	1 78 12 17 300 853	1 781 217	300 853	48 393 712	73
4	2 68 03 13 200 472	2 680 313	200 472	72 568 923	75
5	1 92 01 38 185 357	1 920 138	185 357	52 029 083	68
6	1 98 09 97 411 183	1 980 997	411 183	53 898 102	45
7	2 69 12 97 105 994	2 691 297	105 994	72 771 013	36

d)

Variables

A, B, C, R, clé de type entier naturel

Entrée

Lire A

Traitement

B prend la valeur Quotient

de la division de A par 10^6

C prend la valeur Reste

de la division de A par 10^6

R prend la valeur Reste

de la division de $27B + C$ par 97

Clé prend la valeur $97 - R$

B 1. $A \equiv r \pmod{97}$ et $K = 97 - r$, donc :

$$A + K \equiv r + 97 - r \pmod{97},$$

soit $S \equiv 0 \pmod{97}$.

2. a) et b) En utilisant les écritures en base 10 des nombres S et S' , on a :

• Si $5 \leq n \leq 15$, alors :

$$|S' - S| = |c'_n - c_n| \times 10^{n-3} = a \times 10^m$$

avec $a = |c'_n - c_n|$ et $m = n - 3$.

• Si $n = 2$ ou $n = 4$, alors :

$$|S' - S| = |c'_n - c_n| \times 10 = a \times 10.$$

• Si $n = 1$ ou $n = 3$, alors :

$$|S' - S| = |c'_n - c_n| = a \times 10^0.$$

Comme $c'_n \neq c_n$, on a $1 \leq a \leq 9$.

c) $0 \leq m \leq 12$.

d) Le tableur permet de vérifier que $a \times 10^m$ n'est pas divisible par 97 quelles que soient les valeurs de a et de m trouvées.

e) S est divisible par 97 et $S' - S$ ne l'est pas ; donc S' n'est pas divisible par 97.

3. a) Supposons que dans l'écriture de N le bloc $\overline{c_{n+1}c_n}$ a été transformé par erreur en $\overline{c_n c_{n+1}}$.

Trois cas sont possibles :

• Les deux chiffres sont dans la clé.

• Un chiffre est dans la clé et l'autre non.

• Les deux chiffres ne sont pas dans la clé.

Dans les trois cas, on obtient :

$$\begin{aligned} |S'' - S| &= |\overline{c_{n+1}c_n} - \overline{c_n c_{n+1}}| \times 10^m \\ &= |10c_{n+1} + c_n - 10c_n - c_{n+1}| \times 10^m \\ &= 9|c_{n+1} - c_n| \times 10^m. \end{aligned}$$

Comme $1 \leq |c_{n+1} - c_n| \leq 9$, alors :

$$9 \leq |c_{n+1} - c_n| \leq 81.$$

En définitive, $|S'' - S| = b \times 10^m$, avec $9 \leq b \leq 81$.

b) $b \times 10^m$ n'est pas divisible par 97 et S l'est ; donc S'' n'est pas divisible par 97.

c) Pour détecter ces deux types d'erreurs, il suffit de vérifier la divisibilité du numéro saisi par 97.

4. En ajoutant à A un multiple de 97, S se transforme en un nombre qui est aussi multiple de 97. Ainsi, le test trouvé ne peut pas détecter ce genre d'erreur.

22 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1
$2n^2 \equiv$	0	2	4	6	1	3	5
$n^2 - 2n \equiv$	0	6	0	3	1	1	3

On déduit que $n^2 - 2n$ est divisible par 7 si, et seulement si :
 $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 2 \pmod{7}$.

Il en résulte que $n^2 - 2n$ est divisible par 7 si, et seulement si :
 $n = 7k$ ou $n = 7k + 2$, avec k entier naturel.

23 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^3 \equiv$	0	1	3	2	4
$2n^2 - 1 \equiv$	4	1	2	2	1
$n^3 + 2n^2 - 1 \equiv$	4	2	0	4	0

On déduit que $n^3 + 2n^2 - 1$ est divisible par 5 si, et seulement si :
 $n \equiv 2 \pmod{5}$ ou $n \equiv 4 \pmod{5}$.

Il en résulte que $n^3 + 2n^2 - 1$ est divisible par 5 si, et seulement si :

$$n = 5k + 2 \text{ ou } n = 5k + 4, \text{ avec } k \text{ entier naturel.}$$

24 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 11.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3n \equiv$	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8

On déduit que $3n \equiv 7 \pmod{11}$ équivaut à $n \equiv 6 \pmod{11}$.
 L'ensemble \mathcal{C} est constitué des entiers naturels n tels que :

$$n = 11k + 6, \text{ avec } k \text{ entier naturel.}$$

25 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 6.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$2n + 1 \equiv$	1	3	5	1	3	5
$n + 1 \equiv$	1	2	3	4	5	0
$n(2n + 1)(n + 1) \equiv$	0	0	0	0	0	0

On déduit que pour tout entier naturel n , $n(2n + 1)(n + 1)$ est divisible par 6.

26 a) $a \equiv 5 \pmod{7}$ et $b \equiv 3 \pmod{7}$; donc :

$$2a + 5b \equiv 25 \pmod{7}, \text{ soit } 2a + 5b \equiv 4 \pmod{7}.$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de $2a + 5b$ par 7 est 4.

b) $a^2 + 11b \equiv 2 \pmod{7}$. Le reste de la division euclidienne de $a^2 + 11b$ par 7 est égal à 2.

c) $a^2 + 3b^2 \equiv 3 \pmod{7}$.

Le reste de la division euclidienne de $a^2 + 3b^2$ par 7 est égal à 3.

27 a) $6^2 \equiv 1 \pmod{7}$ et $943 = 2 \times 471 + 1$, donc :
 $(6^2)^{471} \times 6 \equiv 6 \pmod{7}$, soit $6^{943} \equiv 6 \pmod{7}$.

Le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 est égal à 6.

b) $247 \equiv 2 \pmod{7}$, donc $247^{349} \equiv 2^{349} \pmod{7}$.

$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$; $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ donc :

$$(2^3)^{116} \times 2 \equiv 2 \pmod{7}, \text{ soit } 2^{349} \equiv 2 \pmod{7}.$$

Comme $247^{349} \equiv 2^{349} \pmod{7}$, alors :

$$247^{349} \equiv 2 \pmod{7}.$$

Le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 est égal à 2.

28 $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, donc :

$$(2^4)^n \times 2 \equiv 2 \pmod{5}, \text{ soit } 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{5}.$$

D'autre part, $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$, donc :

$$(3^4)^n \times 3 \equiv 3 \pmod{5}, \text{ soit } 3^{4n+1} \equiv 3 \pmod{5}.$$

On déduit que :

$$2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 2 + 3 \pmod{5},$$

soit $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 0 \pmod{5}$.

Cela veut dire que, pour tout entier naturel n , $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5.

29 1. $3^3 = 27 = 13 \times 2 + 1$, donc :

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13}.$$

On déduit que, pour tout entier naturel n , $(3^3)^n \equiv 1 \pmod{13}$, ce qui s'écrit $3^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$.

2. D'après **1.**, $(3^{3n})^2 \equiv 1 \pmod{13}$, soit $3^{6n} \equiv 1 \pmod{13}$.

On déduit que :

$$3^{6n} \times 3^2 + 3^{3n} \times 3 + 1 \equiv 3^2 + 3 + 1 \pmod{13},$$

ce qui s'écrit $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

Il en résulte que, pour tout entier naturel n , $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.

30 1. $3^2 \equiv 9 \pmod{11}$; $3^3 \equiv 5 \pmod{11}$;

$$3^4 \equiv 4 \pmod{11} ; 3^5 \equiv 1 \pmod{11} ;$$

donc, pour tout entier naturel k :

$$(3^5)^k \equiv 1^k \pmod{11}, \text{ soit } 3^{5k} \equiv 1 \pmod{11}.$$

On déduit que :

$$3^{5k+1} \equiv 3 \pmod{11} ; 3^{5k+2} \equiv 9 \pmod{11} ;$$

$$3^{5k+3} \equiv 5 \pmod{11} ; 3^{5k+4} \equiv 4 \pmod{11}.$$

Comme le reste de la division euclidienne de tout entier naturel n par 5 est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors tout entier naturel n s'écrit sous la forme :

$$5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3 \text{ ou } 5k + 4.$$

On déduit, de ce qui précède, que les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 11 sont :

$$1, 3, 4, 5 \text{ et } 9.$$

2. $3^n + 7 \equiv 0 \pmod{11}$ s'écrit :

$$3^n \equiv -7 \pmod{11}$$

ou encore :

$$3^n \equiv 4 \pmod{11},$$

ce qui équivaut, d'après la question précédente, à $n = 5k + 4$, avec k entier naturel.

31 $2^n - 1$ est divisible par 9 si, et seulement si, $2^n \equiv 1 \pmod{9}$. Cherchons les restes possibles de la division euclidienne de 2^n par 9.

$$2^2 \equiv 4 \pmod{9}; 2^3 \equiv 8 \pmod{9};$$

$$2^4 \equiv 7 \pmod{9}; 2^5 \equiv 5 \pmod{9};$$

$$2^6 \equiv 1 \pmod{9};$$

donc, pour tout entier naturel k :

$$(2^6)^k \equiv 1 \pmod{9}, \text{ ce qui s'écrit } 2^{6k} \equiv 1 \pmod{9}.$$

On déduit que :

$$2^{6k+1} \equiv 2 \pmod{9}; 2^{6k+2} \equiv 4 \pmod{9};$$

$$2^{6k+3} \equiv 8 \pmod{9}; 2^{6k+4} \equiv 7 \pmod{9};$$

$$2^{6k+5} \equiv 5 \pmod{9}.$$

Comme tout entier naturel n s'écrit sous la forme $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ ou $6k+5$ alors les restes possibles de la division euclidienne de 2^n par 9 sont 1, 2, 4, 5, 7 et 8.

Le cas du reste 1 est obtenu uniquement lorsque $n = 6k$.

Il en résulte que $2^n - 1$ est divisible par 9 si, et seulement si, n est un multiple de 6.

32 a) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1

b) • L'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ implique $x^2 \equiv 3 \pmod{5}$. Or, les restes possibles dans la division euclidienne du carré d'un entier par 5 sont 0, 1 et 4. On en déduit que l'équation donnée n'a pas de solution.

EXERCICES

sur l'ensemble des séquences (page 26)

EXERCICES

Activités de recherche (page 90)

37 Divisibilité

A. 1. $4^0 \equiv 1 \pmod{9}; 4^1 \equiv 4 \pmod{9}; 4^2 \equiv 7 \pmod{9}; 4^3 \equiv 1 \pmod{9}$.

On déduit que :

$$r_0 = 1; r_1 = 4; r_2 = 7 \text{ et } r_3 = 1.$$

2. a) $4^3 \equiv 1 \pmod{9}$, donc $(4^3)^p \equiv 1^p \pmod{9}$ qui s'écrit $4^{3p} \equiv 1 \pmod{9}$.

D'où $4^{3p} \times 4 \equiv 4 \pmod{9}$, c'est-à-dire $4^{3p+1} \equiv 4 \pmod{9}$,

ce qui implique que $4^{3p+1} \times 4 \equiv 4 \times 4 \pmod{9}$.

Comme $4^2 \equiv 7 \pmod{9}$, alors $4^{3p+2} \equiv 7 \pmod{9}$.

On a montré que, pour tout entier naturel p :

- $4^{3p} \equiv 1 \pmod{9};$

- $4^{3p+1} \equiv 4 \pmod{9};$

- $4^{3p+2} \equiv 7 \pmod{9}.$

b) $A_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1.$

- Si $n = 3p$, alors :

$$A_n = 3p4^{3p+1} - (3p+1)4^{3p} + 1,$$

donc : $A_n \equiv 3p \times 4 - (3p+1) \times 1 + 1 \pmod{9}.$

Autrement dit $A_n \equiv 9p \pmod{9}.$

Comme $9p \equiv 0 \pmod{9}$, alors $A_n \equiv 0 \pmod{9}.$

- Si $n = 3p + 1$, alors :

$$A_n = (3p+1)4^{3p+2} - (3p+2)4^{3p+1} + 1;$$

donc :

$$A_n \equiv (3p+1) \times 7 - (3p+2) \times 4 + 1 \pmod{9}.$$

Autrement dit, $A_n \equiv 9p \pmod{9}.$

Comme $9p \equiv 0 \pmod{9}$, alors $A_n \equiv 0 \pmod{9}.$

- Si $n = 3p + 3$, alors :

$$A_n = (3p+2)4^{3(p+1)} - (3p+3)4^{3p+2} + 1;$$

donc :

$$A_n \equiv (3p+2) \times 1 - (3p+3) \times 7 + 1 \pmod{9}.$$

Autrement dit $A_n \equiv -18p - 18 \pmod{9}.$

Comme $-18p - 18 \equiv 0 \pmod{9}$, alors $A_n \equiv 0 \pmod{9}.$

Quel que soit l'entier naturel n , nous avons trouvé que $A_n \equiv 0 \pmod{9}$. Cela veut dire que, pour tout entier naturel n , A_n est divisible par 9.

B. 1. $A_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$

$$= 4^n(4n - n - 1) + 1$$

$$= 4^n(3n - 1) + 1;$$

donc $A_n \equiv 0 \pmod{9}$ s'écrit :

$$4^n(3n - 1) + 1 \equiv 0 \pmod{9},$$

ou, ce qui équivaut à :

$$4^n(3n - 1) \equiv -1 \pmod{9}.$$

2. Posons $B_n = 4^n(3n - 1).$

- Si $n = 3p$, alors $B_n = 4^{3p}(9p - 1).$

Comme $9p - 1 \equiv -1 \pmod{9}$ et $4^{3p} \equiv 1 \pmod{9}$, alors :

$$B_n \equiv -1 \pmod{9}.$$

• Si $n = 3p + 1$, alors $B_n = 4^{3p} [9(4p + 1) - 1]$.

Comme $9(4p + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{9}$ et $4^{3p} \equiv 1 \pmod{9}$, alors :
 $B_n \equiv -1 \pmod{9}$.

• Si $n = 3p + 2$, alors $B_n = 4^{3p} [9(16p + 9) - 1]$.

Comme $9(16p + 9) - 1 \equiv -1 \pmod{9}$ et $4^{3p} \equiv 1 \pmod{9}$, alors $B_n \equiv -1 \pmod{9}$.

Pour tout entier naturel n , $B_n \equiv -1 \pmod{9}$. Cela équivaut à $A_n \equiv 0 \pmod{9}$, ce qui veut dire que, pour tout entier naturel n , A_n est divisible par 9.

C. 1.

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= (n+1)4^{n+2} - (n+2)4^{n+1} - n4^{n+1} + (n+1)4^n \\ &= 4^n [16(n+1) - 4(n+2) - 4n + n + 1] \\ &= 4^n (9n + 9) \\ &= 4^n \times 9 (n + 1). \end{aligned}$$

2. Montrons, par récurrence, que A_n est divisible par 9.

• $A_0 = 0$ est divisible par 9.

• Supposons que A_n est divisible par 9.

Comme $A_{n+1} = A_n + 4^n \times 9(n + 1)$, alors A_{n+1} est divisible par 9.

• La propriété « A_n est divisible par 9 » étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n .

38 Suite et convergence

1. a) $u_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

b) Si $u_n \equiv 0 \pmod{7}$ alors $2u_n \equiv 0 \pmod{7}$;
donc $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

2. a) $3^n - 1 = 2u_n$ donc, si $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$,
alors $2u_n \equiv 0 \pmod{7}$.

b) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$2u_n \equiv$	0	2	4	6	1	3	5

On déduit que $2u_n \equiv 0 \pmod{7}$ implique $u_n \equiv 0 \pmod{7}$.

En utilisant le résultat du **2. a)**, on déduit que si :

$$3^n - 1 \equiv 0 \pmod{7} \text{ alors } u_n \equiv 0 \pmod{7}.$$

3. On a montré, dans la question **2.**, l'équivalence entre $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ et $u_n \equiv 0 \pmod{7}$.

a) $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$; $3^3 \equiv 6 \pmod{7}$;

$$3^4 \equiv 4 \pmod{7} ; 3^5 \equiv 5 \pmod{7} ;$$

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}.$$

b) L'ordre de 3 modulo 7 est égal à 6.

Pour tout entier naturel p , on a :

$$(3^6)^p \equiv 1^p \pmod{7}, \text{ c'est-à-dire } 3^{6p} \equiv 1 \pmod{7}.$$

D'où :

$$3^{6p+1} \equiv 3 \pmod{7} ; 3^{6p+2} \equiv 2 \pmod{7} ;$$

$$3^{6p+3} \equiv 6 \pmod{7} ; 3^{6p+4} \equiv 4 \pmod{7} ;$$

$$3^{6p+5} \equiv 5 \pmod{7}.$$

On déduit que $3^n \equiv 1 \pmod{7}$ équivaut à $n = 6k$, d'après l'équivalence démontrée dans la question **2.** On déduit que u_n est divisible par 7 si, et seulement si, n est un multiple de 6.

39 Narration de recherche

Soit n la longueur du côté du plus petit carré. Ainsi, l'aire de la figure est :

$$A(n) = n^2 + (n + 16)^2 + (n + 32)^2,$$

$$\text{soit } A(n) = 3n^2 + 96n + 1280.$$

Comme :

$$96 \equiv -4 \pmod{10} \text{ et } 1280 \equiv 0 \pmod{10},$$

$$\text{alors } A(n) \equiv 3n^2 - 4n \pmod{10}.$$

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 10.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3n^2 - 4n \equiv$	0	9	4	5	2	5	4	9	0	7

On déduit que l'aire $A(n)$ est multiple de 10 si, et seulement si : $n \equiv 0 \pmod{10}$ ou $n \equiv 8 \pmod{10}$.

D'autre part, $A(n) \leq 5000$ se traduit par :

$$3n^2 + 96n + 1280 \leq 5000, \text{ soit } n^2 + 32n \leq 1240.$$

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 + 32x.$$

• À l'aide d'un tableau de valeurs de f , cherchons les images des nombres qui s'écrivent sous la forme $10k$, k étant un entier naturel non nul :

$$f(10) = 420 ; f(20) = 1040 ; f(30) = 1860.$$

Les images ne dépassant pas 1240 correspondent à $n = 10$ et $n = 20$.

• Cherchons maintenant les images des nombres qui s'écrivent sous la forme $10k + 8$, k étant un entier naturel non nul :

$$f(8) = 320 ; f(18) = 900 ; f(28) = 1680.$$

Les images ne dépassant pas 1240 correspondent à $n = 8$ et $n = 18$.

• Les entiers n solutions du problème sont 8, 10, 18 et 20.

• Si $n = 8$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 8 cm, 24 cm et 40 cm. L'aire de la figure est 2240 cm².

• Si $n = 10$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 10 cm, 26 cm et 42 cm. L'aire de la figure est 2540 cm².

• Si $n = 18$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 18 cm, 34 cm et 50 cm. L'aire de la figure est 3980 cm².

• Si $n = 20$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 20 cm, 36 cm et 52 cm. L'aire de la figure est 4400 cm².

40 Narration de recherche

Soit n un entier relatif différent de -1 .

Le point d'abscisse n appartient à la courbe représentative de f si, et seulement si, $f(n)$ est entier :

$$f(n) = \frac{3n+1}{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1} ;$$

d'où $f(n)$ est entier si, et seulement si, $n + 1$ divise 2.

Les diviseurs de 2 sont $-2, -1, 1$ et 2 .

Les valeurs de n recherchées sont $-2, -3, 0$ et 1 . Les points de la courbe représentative de f dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont :

$$A(-3 ; 4), B(-2 ; 5), C(0 ; 1) \text{ et } D(1 ; 2).$$

41 TD – Critères de divisibilité

1. a) • Le reste de la division euclidienne de 10 par 9 est 1 ; donc $10 \equiv 1 \pmod{9}$.

• En utilisant la propriété des puissances dans les congruences, on déduit que, pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 \pmod{9}$.

• Dans l'écriture de A en base 10, chaque puissance de 10 est congrue à 1 modulo 9 ; donc, en utilisant la propriété sur l'addition dans les congruences, on déduit que :

$$A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}.$$

b) On sait que deux entiers sont congrus modulo 9 si, et seulement si, ils ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

Dans le cas où ce reste est nul, ce résultat donne le critère de divisibilité par 9 :

Un entier naturel est divisible par 9 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

2. Le reste de la division euclidienne de 10 par 3 est 1 ; donc $10 \equiv 1 \pmod{3}$.

• En utilisant la propriété des puissances dans les congruences, on déduit que, pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 1 \pmod{3}$.

• Dans l'écriture de A en base 10, chaque puissance de 10 est congrue à 1 modulo 3 ; donc, en utilisant la propriété sur l'addition dans les congruences, on déduit que :

$$A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}.$$

On obtient ainsi le critère de divisibilité par 3 :

Un entier naturel est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

3. $10 \equiv 0 \pmod{5}$; donc, pour tout entier naturel n , $10^n \equiv 0 \pmod{5}$. Ainsi, tous les termes de l'addition, dans l'écriture

de A en base 10, sont congrus à 0 modulo 5 sauf le chiffre des unités. On obtient $A \equiv a_0 \pmod{5}$ qui signifie : *A est divisible par 5 si, et seulement si, son chiffre des unités est divisible par 5, c'est-à-dire l'écriture décimale de A se termine par 0 ou 5.*

4. $10^2 \equiv 0 \pmod{4}$; donc, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $10^{2n} \equiv 0 \pmod{4}$. On déduit que $A \equiv a_1 \times 10 + a_0 \pmod{4}$. Le nombre $a_1 \times 10 + a_0$ a pour écriture décimale $\overline{a_1 a_0}$.

On obtient ainsi le critère de divisibilité par 4 :

Un entier naturel est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre formé avec ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Comme $10^2 \equiv 0 \pmod{25}$, on obtient de la même façon le critère de divisibilité par 25.

5. a) • $10 - (-1)$ est un multiple de 11, donc $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

• En mettant à la puissance n chacun des membres de la congruence ci-dessus, on obtient $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.

b) Si n est pair, alors $10^n \equiv 1 \pmod{11}$;

Si n est impair, alors $10^n \equiv -1 \pmod{11}$.

c) En appliquant le résultat précédent à l'écriture de A en base 10, on obtient :

$$A \equiv (-1)^n a_n + \dots + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}.$$

On obtient ainsi le critère de divisibilité par 11 :

Un entier naturel est divisible par 11 si, et seulement si, la somme alternée de ses chiffres est un multiple de 11.

d) • La somme alternée des chiffres du nombre 954 823 056 est égale à 0 ; donc ce nombre est un multiple de 11.

• Le nombre 123 456 789 181 est divisible par 11.

DE TÊTE

- 42** L'ensemble des diviseurs de 12, dans \mathbb{Z} , est :
 $\{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
- L'ensemble des diviseurs de 18, dans \mathbb{Z} , est :
 $\{-18; -9; -6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.
- 43** Voici huit diviseurs, dans \mathbb{N} , de $n(n-1)(n+1)$:
 $1, n, n-1, n+1, n(n-1), n(n+1), (n-1)(n+1)$
et $n(n-1)(n+1)$.
- 44** **a)** $r = 2$; **b)** $r = 4$;
c) $r = 4$; **d)** $r = 2$.
- 45** Si on divise cinq entiers naturels consécutifs par 5, les restes obtenus sont 0, 1, 2, 3 et 4.
- 46** $2867 = 150 \times 19 + 17$.
- 47** **a)** La congruence $37 \equiv 17 \pmod{4}$ est exacte.
b) La congruence $37 \equiv -1 \pmod{4}$ n'est pas exacte.
c) La congruence $17 \equiv -3 \pmod{5}$ est exacte.

DIVISIBILITÉ DANS \mathbb{Z}

- 48** **a)** Les entiers a et b tels que $ab = 15$ sont :
- $$\begin{cases} a = -15 \\ b = -1 \end{cases}; \begin{cases} a = -5 \\ b = -3 \end{cases}; \begin{cases} a = -3 \\ b = -5 \end{cases}; \begin{cases} a = -1 \\ b = -15 \end{cases};$$
- $$\begin{cases} a = 1 \\ b = 15 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}; \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 15 \\ b = 1 \end{cases}.$$
- b)** $a^2 - b^2 = 20$ équivaut à $(a-b)(a+b) = 20$. Les diviseurs de 20 sont : $-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10$ et 20 . La somme de $a-b$ et $a+b$ est paire ; donc, ces deux nombres ont la même parité réduisant les cas possibles à quatre :
- $$\begin{cases} a-b = -10 \\ a+b = -2 \end{cases}; \begin{cases} a-b = -2 \\ a+b = -10 \end{cases}; \begin{cases} a-b = 2 \\ a+b = 10 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a-b = 10 \\ a+b = 2 \end{cases}.$$
- On obtient les couples $(a; b)$ suivants :
 $(-6; 4), (-6; -4), (6; 4)$ et $(6; -4)$.
- c)** $(a+2b)(2a-3b) = 15$.
Les couples possibles pour $a+2b$ et $2a-3b$ sont :
 $(-15; -1), (-5; -3), (-3; -5), (-1, -15), (1; 15),$
 $(3; 5), (5; 3)$ et $(15; 1)$.
- On obtient ainsi huit systèmes dont seulement le deuxième et le septième admettent des solutions entières :
- $$(a; b) = (-3; -1) \text{ ou } (3; 1).$$

- 49** Les multiples de 29 s'écrivent sous la forme $29k$ avec k entier. On cherche le nombre d'entiers k tels que :
- $$-241 \leq 29k \leq 375,$$
- ce qui équivaut à $-\frac{241}{29} \leq k \leq \frac{375}{29}$.
- Les deux fractions de l'encadrement sont respectivement environ égales à $-8,3$ et $12,9$. On trouve 21 valeurs possibles de k . On déduit qu'il y a 21 multiples de 29 entre -241 et 375 .

- 50** Les diviseurs positifs de 120 sont :
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60$ et 120 .
- 51** Deux entiers relatifs impairs consécutifs s'écrivent sous la forme $2k+1$ et $2k+3$, avec k entier :
- $$2k+1 + 2k+3 = 4(k+1).$$
- Cette somme est un multiple de 4.
- 52** **a)** 9 divise $n+4$ si, et seulement si, $n+4 = 9k$, avec k entier, ce qui équivaut à $n = 9k - 4$.
b) On remarque que $2n+7$ est un nombre impair. $2n+7$ divise 10 signifie qu'il est égal à $-5, -1, 1$, et 5 . Ainsi les entiers n tels que $2n+7$ divise 10 sont $-6, -4, -3$ et -1 .
- 53** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. $2ab$ étant pair, si 2 divise $a^2 + b^2$, alors 2 divise $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.
- 54** **a)** Si d divise $3n+4$ et $9n-5$, alors d divise $3(3n+4) - (9n-5) = 17$.
b) Les valeurs possibles de d sont 1 et 17.
- 55** *Corrigé sur le site élève.*
- 56** $n^2 + 3n + 1 = (n-1)(n+4) + 5$. Ainsi $n-1$ divise $n^2 + 3n + 1$ si, et seulement si, $n-1$ divise 5. Les valeurs possibles pour $n-1$ sont $-5, -1, 1$ et 5 . On déduit que les entiers n tels que $n-1$ divise $n^2 + 3n + 1$ sont $-4, 0, 2$ et 6 .

DIVISION EUCLIDIENNE

- 57** **a) Vraie** : en effet, $1600 = 93 \times 17 + 19$ et $0 \leq 19 < 93$.
b) Vraie : en effet, $27359 = 237 \times 115 + 104$ et $0 \leq 104 < 237$.
c) Fausse : l'égalité $9552 = 251 \times 37 + 265$ ne traduit pas une division euclidienne : 265 est supérieur à la fois à 251 et à 37.
d) Vraie : en effet, la division euclidienne d'un entier naturel a par n s'écrit $a = nq + r$, avec q et r entiers naturels tels que $0 \leq r < n$. Le reste r peut prendre n valeurs.
- 58** **1. a) Fausse** : contre exemple ; la division euclidienne de 34 par 7 s'écrit $34 = 7 \times 4 + 6$; donc $r = 6$.
Mais la division euclidienne de 35 par 7 admet un reste égal à 0.
b) Fausse : contre-exemple ; la division euclidienne de 14 par 5 s'écrit $14 = 5 \times 2 + 4$, donc $r = 4$ et la division euclidienne de 14^2 par 5 s'écrit $14^2 = 5 \times 39 + 1$. Le reste $r' = 1 \neq r^2$.
- 2. Vraie** : en effet si a et b ont le même reste dans leurs divisions euclidiennes par c , alors :
- $$a = cq + r \text{ et } b = ck' + r, \text{ avec } 0 \leq r < c.$$
- En élevant au carré, on trouve des égalités de type :
- $$a^2 = ck + r^2 \text{ et } b^2 = ck' + r^2, \text{ avec } k \text{ et } k' \text{ entiers.}$$
- La division de r^2 par c s'écrit $r^2 = cs + r_0$ avec $0 \leq r_0 < c$. On déduit que $a^2 = c(k+s) + r_0$ et $b^2 = c(k'+s) + r_0$ avec $0 \leq r_0 < c$. Donc r_0 est le reste dans les deux divisions euclidiennes de a^2 et b^2 par c .

59 Le problème se traduit par l'égalité $63 = dq + 17$, avec $17 < d$.

On déduit que $dq = 46$. Les diviseurs positifs de 46 sont 1, 2, 23 et 46. Comme $17 < d$, les valeurs possibles de d sont 23 et 46.

Si $d = 23$, alors $q = 2$;

Si $d = 46$, alors $q = 1$.

60 Le problème se traduit par l'égalité $495 = b \times 17 + r$, avec $0 \leq r < b$. On déduit que $0 \leq 495 - 17b < b$, d'où $\frac{495}{18} < b \leq \frac{495}{17}$. Les valeurs possibles pour b sont 28 et 29.

• Si $b = 28$, alors $r = 19$. Dans ce cas $495 = 28 \times 17 + 19$.

• Si $b = 29$, alors $r = 2$. Dans ce cas $495 = 29 \times 17 + 2$.

61 Le problème se traduit par :
$$n = 152q + 13 = 147q + 98.$$

On obtient $q = 17$ et $n = 2597$.

62 *Corrigé sur le site élève.*

63 Le problème se traduit par :
$$a = b \times 47 + 23, \text{ avec } a < 1500 \text{ et } 23 < b.$$

On conclut que $23 < b < \frac{1477}{47}$.

Les valeurs possibles du diviseur b sont :

24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 et 31.

Les valeurs possibles du dividende a sont :

1151, 1198, 1245, 1292, 1339, 1386, 1433 et 1480.

64 Le problème se traduit par $a = bq + r$, avec $q \leq r < b$. Ainsi :

$$a = bq + q - q + r = (b+1)q + r - q.$$

Comme $q \leq r < b$, alors $0 \leq r - q < b - q < b + 1$.

On déduit que l'égalité $a = (b+1)q + (r-q)$ traduit la division euclidienne de a par $b+1$. On obtient donc le même quotient et le reste est égal à $r-q$.

65 1. **b)** La division euclidienne de a par b s'écrit $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$; d'où $a + h = bq + r + h$. Il en résulte que le quotient de $a + h$ par b reste égal à q si, et seulement si, $0 \leq r + h < b$, c'est-à-dire $-r \leq h < b - r$.

2. **a)** $a = 61$ et $b = 17$. On a $61 = 17 \times 3 + 10$; donc le quotient de $61 + h$ par 17 reste égal à 3 pour les valeurs de h situées dans l'intervalle $[-10 ; 7[$.

b) $a = 240$ et $b = 39$. On a $240 = 39 \times 6 + 6$; donc le quotient de $240 + h$ par 39 reste égal à 6 pour les valeurs de h situées dans l'intervalle $[-6 ; 33[$.

66 1. **a)** La division euclidienne de 99 par 43 s'écrit $99 = 43 \times 2 + 13$; donc le terme u_{99} se trouve à la troisième ligne et à la 13^e colonne.

b) $738 = 43 \times 17 + 7$; donc le terme u_{738} se trouve à la 18^e ligne et à la 7^e colonne.

c) $2012 = 43 \times 46 + 34$; donc le terme u_{2012} se trouve à la 47^e ligne et à la 34^e colonne.

2. Le terme u_m se trouve à la i -^e ligne et à la j -^e colonne, donc :

$$m = 43(i-1) + j.$$

67 *Corrigé sur le site élève.*

$$\begin{aligned} \mathbf{68} \quad 8n - 5 &= 4(2n + 1) - 9 \\ &= 4(2n + 1) - (2n + 1) + (2n + 1) - 9 \\ &= 3(2n + 1) + 2n - 8. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 4$, alors $0 \leq 2n - 8 < 2n + 1$; donc, le reste de la division euclidienne de $8n - 5$ par $2n + 1$ est égal à $2n - 8$.

69 **a)** $3n + 17 = 3(n + 4) + 5$.

Lorsque $5 < n + 4$, le reste est 5.

• Autrement dit, si $n > 1$, le reste de la division euclidienne de $3n + 17$ par $n + 4$ est 5.

• Si $0 \leq n \leq 1$, alors :

$$\begin{aligned} 3n + 17 &= 3(n + 4) + 5 \\ &= 3(n + 4) + (n + 4) - (n + 4) + 5 \\ &= 4(n + 4) + 1 - n. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq n \leq 1$, alors $0 \leq 1 - n \leq n + 4$; donc, le reste de la division euclidienne de $3n + 17$ par $n + 4$ est $1 - n$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad 3n + 17 &= 3(n + 6) - 1 \\ &= 3(n + 6) - 1(n + 6) + (n + 6) - 1 \\ &= 2(n + 6) + n + 5. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq n + 5 < n + 6$, alors le reste de la division euclidienne de $3n + 17$ par $n + 6$ est $n + 5$.

70 $n^2 + 5n + 7 = (n + 3)(n + 2) + 1$. Le nombre 1 étant strictement inférieur à $n + 3$, il représente le reste de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 7$ par $n + 3$. Il est donc indépendant de n .

71 *Corrigé sur le site élève.*

CALENDRIERS

72 **a)** On applique le résultat trouvé dans la partie **B**. du Problème 4 pages 18 et 19.

$$\bullet B = E\left(\frac{A-1}{4}\right) - E\left(\frac{A-1}{100}\right) + E\left(\frac{A-1}{400}\right).$$

• $N \equiv A - 1 + B + R \pmod{7}$.

• Le nombre N associé à la date du 14 juillet 1789 est congru à 2 modulo 7. Comme cette date constitue notre référence, notons ce nombre N_0 ; donc $N_0 \equiv 2 \pmod{7}$.

a) Pour $A = 1805$, on trouve $B = 437$ et $N \equiv 2577 \pmod{7}$, soit $N \equiv 1 \pmod{7}$.

Il en résulte que la date du 2 décembre 1805 tombe un jour de la semaine avant celle du mardi 14 juillet 1789. On conclut que le 2 décembre 1805 était un lundi.

b) Pour $A = 1944$, on trouve $B = 470$ et $N \equiv 2571 \pmod{7}$, soit $N \equiv 2 \pmod{7}$.

Il en résulte que la date du 6 juin 1944 tombe le même jour de la semaine que celle du mardi 14 juillet 1789. On déduit que le 6 juin 1944 était un mardi.

c) Pour $A = 1940$, on trouve $B = 469$ et $N \equiv 2578 \pmod{7}$, soit $N \equiv 2 \pmod{7}$.

Il en résulte que la date du 18 juin 1940 tombe le même jour de la semaine que celle du mardi 14 juillet 1789. On déduit que le 18 juin 1940 était un mardi.

73 Les années du XXI^e siècle correspondent à :

$$2000 \leq A \leq 2099.$$

À partir de cet encadrement, on obtient celui du nombre B qui s'écrit :

$$483 \leq B \leq 510.$$

Le nombre R correspondant au jour de Noël est 359 ou 360 selon que l'année est bissextile ou non.

Ainsi, on obtient l'encadrement suivant :

$$2840 \leq A - 1 + B + R \leq 2969.$$

Ainsi, le nombre N associé aux différentes dates des jours du XXI^e siècle est congru aux entiers compris entre 2841 et 2969. Le calcul du nombre N associé à la date du dimanche 25 décembre 2011 aboutit à $N \equiv 0 \pmod{7}$. Le problème revient donc à chercher le nombre des multiples de 7 compris entre 2841 et 2969. Le premier de la liste est 2842, le dernier est 2968. Cherchons k tel que : $2842 \leq 2842 + 7k \leq 2968$.

On obtient $0 \leq k \leq 18$. Il y a donc 19 valeurs possibles qui répondent à la question. On déduit qu'au cours du XXI^e siècle, il y aura 19 dimanches de Noël.

74 Pour $A = 2008$, on trouve $B = 486$ et $N \equiv 2730 \pmod{7}$, soit $N \equiv 0 \pmod{7}$.

Comme le nombre N_0 associé à la date du mardi 14 juillet est congru à 2 modulo 7, alors la date du 24 août 2008 tombe deux jours de la semaine avant celle du mardi 14 juillet 1789. On déduit que le 24 août 2008 était un dimanche.

CONGRUENCES

75
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{9} \\ y \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$$

a) $3x + 4y = 37 \pmod{9}$ et $37 \equiv 1 \pmod{9}$, donc :

$$3x + 4y \equiv 1 \pmod{9}.$$

Il en résulte que le reste de la division euclidienne de $3x + 4y$ par 9 est égal à 1.

b) $x^2 + y^2 \equiv 65 \pmod{9}$ et $65 \equiv 2 \pmod{9}$, donc :

$$x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{9}.$$

Il en résulte que le reste de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 9 est égal à 2.

c) $2x^2 - 5y^2 \equiv 18 \pmod{9}$ et $18 \equiv 0 \pmod{9}$, donc :

$$2x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Il en résulte que le reste de la division euclidienne de $2x^2 - 5y^2$ par 9 est égal à 0.

76 *Corrigé sur le site élève.*

77 $n \equiv 50 \pmod{7}$ et $50 \equiv 1 \pmod{7}$, donc $n \equiv 1 \pmod{7}$. Cela signifie que le reste de la division euclidienne par 7 est égal à 1.

78 a) $n + 5 \equiv 3 \pmod{9}$ équivaut à $n \equiv -2 \pmod{9}$. Cela signifie que n s'écrit sous la forme $n = 9k - 2$, avec k entier. On déduit que l'ensemble des entiers n tels que :

$$n + 5 \equiv 3 \pmod{9}$$

est constitué des entiers $n = 9k - 2$, avec k entier.

b) $n \geq 100$ équivaut à $9k - 2 \geq 100$, soit $k \geq \frac{102}{9}$; donc, le plus petit entier supérieur à 100, tel que $n + 5 \equiv 3 \pmod{9}$, est : $n_0 = 9 \times 12 - 2 = 106$.

79 *Corrigé sur le site élève.*

80 a) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv$	0	1	2	3
$x^2 \equiv$	0	1	0	1

b) $-4y^2 \equiv 0 \pmod{4}$, donc $7x^2 - 4y^2 \equiv 7x^2 \pmod{4}$. Comme x^2 est congru à 0 ou 1 modulo 4, alors $7x^2$ est congru à 0 ou 7 modulo 4, c'est-à-dire $7x^2$ est congru à 0 ou 3 modulo 4. Il en résulte que $7x^2 - 4y^2$ ne peut pas être congru à 1 modulo 4 ; ainsi, l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ n'a pas de solution.

81 1.a) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$x^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6

b) $a^3 + b^3$

$b^3 \backslash a^3$	0	1	6
0	0	1	6
1	1	2	0
6	6	0	5

$a^3 + b^3 + c^3$

$c^3 \backslash a^3 + b^3$	0	1	2	5	6
0	0	1	2	5	6
1	1	2	3	6	0
6	6	0	1	4	5

2. $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod{7}$ dans les trois cas suivants :

1^{er} cas :
$$\begin{cases} a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{7} \\ c^3 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

2^e cas :
$$\begin{cases} a^3 + b^3 \equiv 1 \pmod{7} \\ c^3 \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

3^e cas :
$$\begin{cases} a^3 + b^3 \equiv 6 \pmod{7} \\ c^3 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

• **Étude du 1^{er} cas :** d'après le résultat de la question **1. a)** : $c^3 \equiv 0 \pmod{7}$ équivaut à $c \equiv 0 \pmod{7}$.

On a alors $abc \equiv 0 \pmod{7}$.

• **Étude du 2^e cas :** d'après le tableau de $a^3 + b^3$, si :

$$a^3 + b^3 \equiv 1 \pmod{7} ;$$

on a alors $a^3 \equiv 0 \pmod{7}$ ou $b^3 \equiv 0 \pmod{7}$;

donc $a \equiv 0 \pmod{7}$ ou $b \equiv 0 \pmod{7}$.

Dans les deux cas, on obtient $abc \equiv 0 \pmod{7}$.

• **Étude du 3^e cas :** d'après le tableau de $a^3 + b^3$, si :

$$a^3 + b^3 \equiv 6 \pmod{7} ;$$

on a alors $a^3 \equiv 0 \pmod{7}$ ou $b^3 \equiv 0 \pmod{7}$;

donc $a \equiv 0 \pmod{7}$ ou $b \equiv 0 \pmod{7}$.

Dans les deux cas, on obtient $abc \equiv 0 \pmod{7}$.

• Dans tous les cas, on a obtenu $abc \equiv 0 \pmod{7}$.

Ainsi, on a donc démontré que si $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod{7}$ alors $abc \equiv 0 \pmod{7}$.

82 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 - 3n + 6 \equiv$	1	4	4	1	0

On conclut que $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod{5}$ si, et seulement si, $n \equiv 4 \pmod{5}$; ce qui équivaut à $n = 5k + 4$ avec k entier.

83 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 13.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 - 5n^2 + 6 \equiv$	6	2	2	3	0	12	4

$n \equiv$	7	8	9	10	11	12
$n^4 - 5n^2 + 6 \equiv$	4	12	0	3	2	2

On conclut que $n^4 - 5n^2 + 6 \equiv 0 \pmod{13}$ si, et seulement si, $n \equiv 4 \pmod{13}$ ou $n \equiv 9 \pmod{13}$. Cela veut dire que $n^4 - 5n^2 + 6$ est divisible par 13 pour les entiers n qui s'écrivent sous la forme $n = 13k + 4$ ou $n = 13k + 9$.

84 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$z \equiv$	0	1	2	3	4
$z^2 \equiv$	0	1	4	4	1

Dressons un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2$ dans la congruence modulo 5.

$y^2 \backslash x^2$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

• L'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ implique la congruence :
 $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{5}$.

Cette congruence est possible uniquement si $x^2 + y^2$ prend les valeurs prises par z^2 , soit 0, 1 ou 4.

• $x^2 + y^2$ prend les valeurs 1 et 4 uniquement lorsque :
 $x^2 \equiv 0 \pmod{5}$ ou $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$,
 ce qui équivaut à $x \equiv 0 \pmod{5}$ ou $y \equiv 0 \pmod{5}$.

• Lorsque $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ et $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{5}$, cela implique que $z^2 \equiv 0 \pmod{5}$, d'où $z \equiv 0 \pmod{5}$.

• En conclusion, l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ implique que :
 $x \equiv 0 \pmod{5}$ ou $y \equiv 0 \pmod{5}$ ou $z \equiv 0 \pmod{5}$.

Cela veut dire que si $x^2 + y^2 = z^2$ alors au moins l'un des entiers x , y ou z est divisible par 5.

85 a) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 3.

$X \equiv$	0	1	2
$X^4 \equiv$	0	1	1

On déduit que $X^4 \equiv 0 \pmod{3}$ si, et seulement si :
 $X \equiv 0 \pmod{3}$.

Les solutions de l'équation $X^4 \equiv 0 \pmod{3}$ sont les entiers multiples de 3.

b) $(x - 2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

On a les congruences modulo 3 suivantes :

$$-8 \equiv 1; 24 \equiv 0; -32 \equiv 1 \text{ et } 16 \equiv 1;$$

donc $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \equiv x^4 + x^3 + x + 1 \pmod{3}$.

Cela veut dire que :

$$(x - 2)^4 \equiv x^4 + x^3 + x + 1 \pmod{3}.$$

c) $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ si, et seulement si :

$$(x - 2)^4 \equiv 0 \pmod{3},$$

ce qui équivaut, d'après le résultat de la question **a)**, à :

$$x - 2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

On déduit que les entiers x tels que $x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ sont les entiers qui s'écrivent sous la forme $x = 3k + 2$, avec k entier.

86 a) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 9.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 \equiv$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b) On déduit que $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ si, et seulement si :

$$x \equiv 0 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 3 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 6 \pmod{9},$$

c'est-à-dire $x = 9k$ ou $x = 9k + 3$ ou $x = 9k + 6$, avec k entier.

Les trois cas montrent que x est un multiple de 3, donc :

$$x \equiv 0 \pmod{3}.$$

Réciproquement, si $x \equiv 0 \pmod{3}$, alors $x = 3k$, avec k entier ; donc $x^3 = 9(3k^3)$, d'où $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$.

En définitive, on a montré que :

$$x^3 \equiv 0 \pmod{9} \text{ équivaut à } x \equiv 0 \pmod{9}.$$

• $x^3 \equiv 1 \pmod{9}$ si, et seulement si :

$$x \equiv 1 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 4 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 7 \pmod{9},$$

c'est-à-dire :

$$x = 9k + 1 = 3(3k) + 1$$

$$\text{ou } x = 9k + 4 = 3(3k + 1) + 1$$

$$\text{ou } x = 9k + 7 = 3(3k + 2) + 1,$$

avec k entier.

Les trois cas montrent que $x \equiv 1 \pmod{3}$.

Réciproquement, si $x \equiv 1 \pmod{3}$, alors :

$$x = 3k + 1, \text{ avec } k \text{ entier ;}$$

donc $x^3 = (3k + 1)^3 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$, d'où $x^3 \equiv 1 \pmod{9}$.

En définitive, on a montré que :

$$x^3 \equiv 1 \pmod{9} \text{ équivaut à } x \equiv 1 \pmod{3}.$$

• $x^3 \equiv 8 \pmod{9}$ si, et seulement si :

$$x \equiv 2 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 5 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 8 \pmod{9},$$

c'est-à-dire :

$$x = 9k + 2 = 3(3k) + 2$$

$$\text{ou } x = 9k + 5 = 3(3k + 1) + 2$$

$$\text{ou } x = 9k + 8 = 3(3k + 2) + 2,$$

avec k entier.

Les trois cas montrent que $x \equiv 2 \pmod{3}$.

Réciproquement, si $x \equiv 2 \pmod{3}$, alors :

$$x = 3k + 2, \text{ avec } k \text{ entier,}$$

donc $x^3 = (3k + 2)^3 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$, d'où $x^3 \equiv 8 \pmod{9}$.

En définitive, on a montré que :

$$x^3 \equiv 8 \pmod{9} \text{ équivaut à } x \equiv 2 \pmod{3}.$$

c) • $x^3 + y^3 \pmod{9}$

$y^3 \backslash x^3$	0	1	8
0	0	1	8
1	1	2	0
8	8	0	7

- $x^3 + y^3 + z^3$ (modulo 9)

$z^3 \backslash x^3 + y^3$	0	1	2	7	8
0	0	1	2	7	8
1	1	2	4	8	0
8	8	0	1	6	7

- $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0 \pmod{9}$ dans trois cas :

1^{er} cas : $x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod{9}$ et $z^3 \equiv 0 \pmod{9}$.

Comme $z^3 \equiv 0 \pmod{9}$ équivaut à $z \equiv 0 \pmod{3}$, alors dans ce cas z est divisible par 3.

2^e cas : $x^3 + y^3 \equiv 1 \pmod{9}$ et $z^3 \equiv 8 \pmod{9}$.

3^e cas : $x^3 + y^3 \equiv 8 \pmod{9}$ et $z^3 \equiv 1 \pmod{9}$.

La somme $x^3 + y^3$ est congru à 1 ou 8 modulo 9 uniquement lorsque $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ ou $y^3 \equiv 0 \pmod{9}$, ce qui équivaut d'après **b)** à $x \equiv 0 \pmod{3}$ ou $y \equiv 0 \pmod{3}$;

donc, ces deux derniers cas montrent que x ou y est multiple de 3.

On déduit que si la somme $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9 alors l'un des nombres x , y ou z est divisible par 3.

87 a) $7 \equiv -1 \pmod{4}$, donc $7^2 \equiv 1 \pmod{4}$, d'où :
 $(7^2)^n \equiv 1 \pmod{4}$, c'est-à-dire $7^{2n} \equiv 1 \pmod{4}$.

Cela implique $7^{2n} + 3 \equiv 4 \pmod{4}$.

Comme $4 \equiv 0 \pmod{4}$, alors $7^{2n} + 3 \equiv 0 \pmod{4}$.

Cela veut dire que, pour tout entier n , $7^{2n} + 3$ est divisible par 4.

b) $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$ donc $(3^2)^n \equiv 2^n \pmod{7}$, c'est-à-dire $3^{2n} \equiv 2^n \pmod{7}$.

Comme $2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 4 \times 2^n + 3 \times 3^{2n}$, alors :

$$2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 4 \times 2^n + 3 \times 2^n \pmod{7},$$

ce qui donne $2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 7 \times 2^n \pmod{7}$.

Puisque $7 \times 2^n \equiv 0 \pmod{7}$, alors $2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod{7}$.

Cela veut dire que, pour tout entier naturel n , $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

88 a) $17^4 - 1 = 83\,520$ est un multiple de 10, donc :
 $17^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

b) $17^{97} = (17^4)^{24} \times 17$.

$17^4 \equiv 1 \pmod{10}$ implique $(17^4)^{24} \equiv 1 \pmod{10}$, donc :

$$(17^4)^{24} \times 17 \equiv 17 \pmod{10},$$

ce qui signifie que $17^{97} \equiv 17 \pmod{10}$.

Comme $17 \equiv 7 \pmod{10}$, alors $17^{97} \equiv 7 \pmod{10}$.

On déduit que le chiffre des unités de 17^{97} est 7.

89 Corrigé sur le site élève.

90 Posons $A_n = n \times 7^n + 4n + 1$, avec n entier naturel non nul.

$7^2 \equiv 1 \pmod{8}$, donc $7^{2n} \equiv 1 \pmod{8}$.

- **Si n est pair**, alors $n = 2p$; d'où :

$$A_n = 2p \times 7^{2p} + 8p + 1,$$

donc $A_n \equiv 2p + 1 \pmod{8}$.

Comme $2p + 1$ est impair, il n'est jamais divisible par 8 ; donc A_{2p} n'est jamais divisible par 8.

- **Si n est impair**, alors $n = 2p + 1$; d'où :

$$A_n = (2p + 1) \times 7^{2p+1} + 4(2p + 1) + 1,$$

donc $A_n \equiv (2p + 1) \times 7 + 8p + 5 \pmod{8}$.

On obtient $A_n \equiv 22p + 12 \pmod{8}$.

Comme $22 \equiv -2 \pmod{8}$ et $12 \equiv 4 \pmod{8}$, alors :

$$A_n \equiv -2p + 4 \pmod{8}.$$

D'autre part, $-2p + 4 = -(2p + 1) + 5 = -n + 5$.

On déduit que lorsque n est impair, alors :

$$A_n \equiv -n + 5 \pmod{8} ;$$

donc A_n est divisible par 8 si, et seulement si, $n = 5 - 8k$, avec k entier négatif ou nul. On remarque que le nombre $5 - 8k$ est impair.

91 Soit n le nombre de marches de l'escalier. Les données du problème se traduisent par :

$$240 \leq n \leq 260, n = 3p + 2 \text{ et } n = 4q + 1,$$

avec p et q des entiers naturels.

- $240 \leq n \leq 260$ équivaut à $240 \leq 4q + 1 \leq 260$, d'où $60 \leq q \leq 64$.

On obtient cinq valeurs possibles pour q :

$$60, 61, 62, 63 \text{ et } 64.$$

- Si $q = 60$, alors $n = 241$ mais $n - 2$ n'est pas divisible par 3.

- Si $q = 61$, alors $n = 245$ et $n - 2 = 243$ est divisible par 3, donc $p = 81$.

- Si $q = 62$, alors $n = 249$ mais $n - 2$ n'est pas divisible par 3.

- Si $q = 63$, alors $n = 253$ mais $n - 2$ n'est pas divisible par 3.

- Si $q = 64$, alors $n = 257$, $n - 2 = 255$ est divisible par 3, donc $p = 85$.

Le problème admet deux solutions :

$$245 = 61 \times 4 + 1 = 81 \times 3 + 2 ;$$

$$257 = 64 \times 4 + 1 = 85 \times 3 + 2.$$

92 A. 1. $a = 20041010160$; $b = 758926$ et $c = 104500$.

2. a) $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$, donc $(10^2)^3 \equiv 3^3 \pmod{97}$,

c'est-à-dire $10^6 \equiv 27 \pmod{97}$,

ce qui entraîne $(10^6)^2 \equiv 27^2 \pmod{97}$.

Comme $27^2 \equiv 50 \pmod{97}$, alors $10^{12} \equiv 50 \pmod{97}$.

b) $100A = a \times 10^{12} + b \times 10^6 + c$,

donc $100A \equiv 50a + 27b + c \pmod{97}$.

3. La valeur de la clé est 96.

B. 1. Les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de N constituent la clé, donc $N = 100A + K$.

2. a) $100A \equiv 97 - K \pmod{97}$;

donc $100A + K \equiv 97 - K + K \pmod{97}$,

soit :

$$N \equiv 97 \pmod{97} \text{ ou encore } N \equiv 0 \pmod{97} ;$$

ce qui signifie que N est divisible par 97.

b) Supposons qu'un des chiffres de A et un seul soit erroné. Soit A' le numéro obtenu erroné, alors il existe deux entiers naturels m et n tels que :

$$|A' - A| = m \times 10^n \text{ et } 1 \leq m \leq 9$$

(cf. solution du Problème 5).

Le nombre $m \times 10^n$ n'est pas divisible par 97, et comme A est divisible par 97, A' ne peut pas l'être. Ainsi l'erreur est détectée.

c) Supposons que deux chiffres x et y distincts consécutifs de A soient permutés.

On note le nombre modifié (erroné) A'' .

Alors, il existe un entier p , tel que :

$$|A'' - A| = |\overline{xy} - \overline{yx}| \times 10^p = 9|x - y| \times 10^p$$

où \overline{xy} est le bloc des deux chiffres consécutifs permutés écrit en base 10. Le nombre $9|x - y| \times 10^p$ n'est pas divisible par 97 et A est divisible par 97 ; donc le numéro erroné n'est pas divisible par 97. Ainsi l'erreur est détectée.

93 1. « Si $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$ »

Vraie : Démonstration :

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 9.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^3 \equiv$	0	1	8	0	1	8	0	1	8

On déduit que $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ si, et seulement si :

$$x \equiv 0 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 3 \pmod{9} \text{ ou } x \equiv 6 \pmod{9},$$

c'est-à-dire $x = 9k$ ou $x = 9k + 3$ ou $x = 9k + 6$, avec k entier.

Les trois cas montrent que x est un multiple de 3, donc :

$$x \equiv 0 \pmod{3}.$$

• **Implication réciproque :**

« Si $x \equiv 0 \pmod{3}$ alors $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ »

Vraie : en effet, si $x \equiv 0 \pmod{3}$, alors $x = 3k$, avec k entier ; donc $x^3 = 9(3k^3)$, d'où $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$.

2. a) « Si d divise ab alors d divise a ou d divise b »

Fausse : 4 divise 6×2 et 4 ne divise ni 6 ni 2.

• **Implication réciproque :**

« Si d divise a ou d divise b alors d divise ab »

Vraie : si d divise a alors $a = dq$, avec q entier ; donc $ab = d(bq)$, d'où d divise ab .

On procède de la même façon si d divise b .

b) « Si d divise a et b , alors d divise $a + b$ »

Vraie : en effet, si $a = dq$ et $b = dq'$ avec q et q' entiers, alors $a + b = d(q + q')$; donc d divise $a + b$.

• **Implication réciproque :**

« Si d divise $a + b$, alors d divise a et d divise b »

Fausse : 4 divise $9 + 3$ et 4 ne divise ni 9 ni 3.

c) « Si a divise b et a divise c , alors a^2 divise bc »

Vraie : en effet, si $b = ak$ et $c = ak'$, avec k et k' entiers, alors $bc = a^2(kk')$, donc a^2 divise bc .

• **Implication réciproque :**

« Si a^2 divise bc alors a divise b et a divise c »

Fausse : 2^2 divise 4×3 et 2 ne divise pas 3.

94 Corrigé sur le site élève.

95 On cherche les nombres α, β, γ et δ tels que, pour tout réel x , on ait :

$$x^4 + 4 = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + \delta).$$

On trouve :

$$x^4 + 1 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Ainsi, on a :

$$999^4 + 1 = ab,$$

avec $a = 999^2 + 2 \times 999 + 2 = 1000001$

et $b = 999^2 - 2 \times 999 + 2 = 996005$.

On voit rapidement que b est divisible par 5 ; donc, le nombre $999^4 + 4$ s'écrit sous la forme d'un produit de trois entiers naturels :

$$999^4 + 1 = 1000001 \times 199201 \times 5.$$

96 Les quatre manières de ranger les pièces de Mara permettent d'écrire :

$$n = 5p + 3 = 7q + 2 = 9s + 1 = 11t,$$

avec p, q, s et t des entiers naturels.

En calculant $2n - 11$, en remplaçant chaque fois n par l'une des quatre expressions, on trouve que la mère de Mara a raison.

En effet :

• $2n - 11 = 2(5p + 3) - 11 = 10p - 5$, donc :

$2n - 11$ est divisible par 5.

• $2n - 11 = 2(7q + 2) - 11 = 14q - 7$, donc :

$2n - 11$ est divisible par 7.

• $2n - 11 = 2(9s + 1) - 11 = 18s - 9$, donc :

$2n - 11$ est divisible par 9.

• $2n - 11 = 2(11t) - 11 = 22t$, donc :

$2n - 11$ est divisible par 1.

On cherche n tel que :

$$2n - 11 = 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times k,$$

avec k entier naturel non nul, c'est-à-dire : $2n = 3465k + 11$.

Comme le nombre de pièce est inférieur à 2000, alors $k = 1$, donc $2n = 3476$, d'où $n = 1738$.

On a bien :

$$1738 = 5 \times 347 + 3$$

$$1738 = 7 \times 248 + 2$$

$$1738 = 9 \times 193 + 1$$

$$1738 = 11 \times 158.$$

AVEC LES TICE

97 A. 1.

<pre>***Algorithme lancé*** Saisir a = 4 Saisir b = 7 n = 0 ; rn = 1 n = 1 ; rn = 4 n = 2 ; rn = 2 n = 3 ; rn = 1 n = 4 ; rn = 4 n = 5 ; rn = 2 n = 6 ; rn = 1 n = 7 ; rn = 4 n = 8 ; rn = 2 n = 9 ; rn = 1 n = 10 ; rn = 4 n = 11 ; rn = 2 n = 12 ; rn = 1 n = 13 ; rn = 4 n = 14 ; rn = 2 n = 15 ; rn = 1 n = 16 ; rn = 4 n = 17 ; rn = 2 n = 18 ; rn = 1 n = 19 ; rn = 4 n = 20 ; rn = 6 ***Algorithme terminé***</pre>	<pre>***Algorithme lancé*** Saisir a = 3 Saisir b = 11 n = 0 ; rn = 1 n = 1 ; rn = 3 n = 2 ; rn = 9 n = 3 ; rn = 5 n = 4 ; rn = 4 n = 5 ; rn = 1 n = 6 ; rn = 3 n = 7 ; rn = 9 n = 8 ; rn = 5 n = 9 ; rn = 4 n = 10 ; rn = 1 n = 11 ; rn = 3 n = 12 ; rn = 9 n = 13 ; rn = 5 n = 14 ; rn = 4 n = 15 ; rn = 1 n = 16 ; rn = 3 n = 17 ; rn = 9 n = 18 ; rn = 5 n = 19 ; rn = 4 n = 20 ; rn = 1 ***Algorithme terminé***</pre>
--	---

Prendre toutes les initiatives

98 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$a \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$a^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1

Dressons un tableau des restes de la somme $a^2 + b^2$ dans la congruence modulo 7.

$b^2 \backslash a^2$	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

On déduit que $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{7}$ si, et seulement si :

$$a^2 \equiv 0 \pmod{7} \text{ et } b^2 \equiv 0 \pmod{7};$$

ce qui équivaut, d'après le premier tableau, à $a \equiv 0 \pmod{7}$ et $b \equiv 0 \pmod{7}$.

On déduit que si $a^2 + b^2$ est divisible par 7, alors a et b sont divisibles par 7.

99 $x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 3$ équivaut à :

$$x^2 - 3y^2 - 3 = 4z^2,$$

ce qui implique $x^2 - 3y^2 - 3 \equiv 0 \pmod{4}$.

Comme $-3 \equiv 1 \pmod{4}$, alors $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$.

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv$	0	1	2	3
$x^2 \equiv$	0	1	0	1
$x^2 + 1 \equiv$	1	2	1	2

Dressons un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2 + 1$ dans la congruence modulo 4.

$y^2 + 1 \backslash x^2$	0	1
1	1	2
2	2	3

On déduit que $x^2 + y^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Il en résulte que l'équation $x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 3$ n'a pas de solutions dans l'ensemble des entiers relatifs.

100 On cherche les entiers naturels n tels que $11n + 5 = m^2$, avec m entier naturel.

Cette égalité se traduit par $m^2 \equiv 5 \pmod{11}$.

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 11.

$m \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

On déduit que $m^2 \equiv 5 \pmod{11}$ si, et seulement si :

$$m \equiv 4 \pmod{11} \text{ ou } m \equiv 7 \pmod{11}.$$

• **1^{er} cas** : $m \equiv 4 \pmod{11}$ équivaut à $m \equiv 11k + 4$, avec k entier.

L'égalité $m^2 = 11n + 5$ s'écrit $(11k + 4)^2 = 11n + 5$, ce qui donne $121k^2 + 88k + 16 = 11n + 5$.

Après simplification par 11, on obtient $n = 11k^2 + 8k + 1$.

2. On conjecture que, dans les deux cas traités, la suite des restes est périodique.

• Lorsque $a = 4$ et $b = 7$, la période est égale à 3 avec la répétition du triplet (1 ; 4 ; 2).

• Lorsque $a = 3$ et $b = 11$, la période est égale à 5 avec la répétition de la séquence (1 ; 3 ; 9 ; 5 ; 4).

B. 1. a) $a^m \equiv r_m \pmod{b}$ et $a^n \equiv r_n \pmod{b}$;
donc $a^m a^n \equiv r_m r_n \pmod{b}$, d'où $a^{m+n} \equiv r_m r_n \pmod{b}$.

Comme on a aussi $a^{m+n} \equiv r_{m+n} \pmod{b}$, alors :

$$r_m r_n \equiv r_{m+n} \pmod{b}.$$

b) Pour $m = 1$, la relation précédente s'écrit :

$$r_{n+1} \equiv r_n r_1 \pmod{b}.$$

2. a) et b) Si $a = 4$ et $b = 7$, alors $r_1 = 4$. En appliquant le résultat de la question **1. b)**, on a :

$$r_2 \equiv r_1^2 \pmod{7} \text{ et } 4^2 \equiv 2 \pmod{7}, \text{ donc } r_2 \equiv 2 \pmod{7}.$$

On répète le même procédé :

$$r_3 \equiv r_1 r_2 \pmod{7} \text{ d'où } r_3 \equiv 8 \pmod{7}, \text{ soit } r_3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

On trouve ainsi les résultats donnés par l'algorithme dans la question **1.**

c) Si $r_i = r_j$, alors $r_1 r_i = r_1 r_j$. Comme $r_{i+1} \equiv r_i r_1 \pmod{b}$ et $r_{j+1} \equiv r_j r_1 \pmod{b}$, alors $r_{i+1} \equiv r_{j+1} \pmod{b}$.

Puisque $0 \leq r_{i+1} < b$ et $0 \leq r_{j+1} < b$, alors $r_{i+1} = r_{j+1}$.

d) Dans le cas $a = 4$ et $b = 7$, on a trouvé que $r_3 \equiv r_0 \pmod{7}$.

Le résultat de la question **B. 1. b)** entraîne que pour tout entier naturel k :

$$r_{3+k} \equiv r_3 r_k \pmod{7}, \text{ c'est-à-dire que } r_{3+k} \equiv r_0 r_k \pmod{7}, \text{ soit } r_{3+k} \equiv r_k \pmod{7}.$$

Les trois premiers restes étant distincts, on déduit que la suite est périodique de période 3.

• Dans le cas $a = 3$ et $b = 11$, on a trouvé que $r_5 \equiv r_0 \pmod{11}$. Le résultat de la question **B. 1. a)** entraîne que pour tout entier naturel k :

$$r_{5+k} \equiv r_5 r_k \pmod{11}, \text{ c'est-à-dire que } r_{5+k} \equiv r_0 r_k \pmod{11}, \text{ soit } r_{5+k} \equiv r_k \pmod{11}.$$

Les cinq premiers restes étant distincts, on déduit que la suite est périodique de période 5.

3. L'ensemble des restes $\{r_n \text{ avec } n \text{ entier naturel}\}$ est fini car pour tout entier naturel n , $0 \leq r_n < b$. Il contient au plus b éléments ; donc, en calculant les restes successifs, on tombera sur un reste déjà obtenu. La séquence recommencera grâce au résultat de la question **2. c)** « si $r_i = r_j$, alors $r_{i+1} = r_{j+1}$ ». Ainsi, la suite des restes est périodique.

4. $4^2 \equiv 2 \pmod{7}$; $4^3 \equiv 1 \pmod{7}$; donc la période de la suite des restes est 3.

$$2975 = 3 \times 991 + 2, \text{ donc } 4^{2975} \equiv 4^2 \pmod{7}, \text{ soit :}$$

$$4^{2975} \equiv 2 \pmod{7}.$$

On déduit que le reste de la division euclidienne de 4^{2975} par 7 est égal à 2.

$$\bullet 9^2 \equiv 4 \pmod{11} ; 9^3 \equiv 3 \pmod{11} ;$$

$$9^4 \equiv 5 \pmod{11} ; 9^5 \equiv 1 \pmod{11} ;$$

donc la période de la suite des restes est 5.

$$6723 = 5 \times 1344 + 3, \text{ donc } 9^{6723} \equiv 9^3 \pmod{11}, \text{ soit :}$$

$$9^{6723} \equiv 3 \pmod{11}.$$

On déduit que le reste de la division euclidienne de 9^{6723} par 11 est égal à 3.

Ce premier cas, nous fournit 14 solutions qui sont tous les termes de rang :

1, 20, 61, 124, 209, 316, 445, 796, 769, 964,
1181, 1420, 1681 et 1964.

• **2° cas :** $m \equiv 7 \pmod{11}$ équivaut à $m \equiv 11k + 7$, avec k entier. L'égalité $m^2 = 11n + 5$ s'écrit $(11k + 7)^2 = 11n + 5$, ce qui donne $121k^2 + 154k + 49 = 11n + 5$.

Après simplification par 11, on obtient $n = 11k^2 + 14k + 4$. Ce deuxième cas, nous fournit 13 solutions qui sont tous les termes de rang :

4, 29, 76, 145, 236, 349, 484, 641, 820,
1021, 1244, 1489 et 1756.

• En conclusion, parmi les termes de la suite dont le rang est inférieur à 2012, il y a 27 termes qui sont des carrés parfaits.

EXERCICES

Le jour du BAC (page 34)

101 Corrigé sur le site élève.

102 A. 1. $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$; $2^2 - 1 = 3$.

On a bien $35 \equiv 3 \pmod{2^2}$, donc 1, 3 et 5 satisfont la condition donnée.

2. a)

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

b) Dressons un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2$ dans la congruence modulo 8.

$y^2 \backslash x^2$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

Dressons maintenant un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2 + z^2$ dans la congruence modulo 8.

$y^2 \backslash x^2 + y^2$	0	1	2	4	5
0	0	1	2	4	5
1	1	2	3	5	6
4	4	5	6	0	1

On déduit qu'il n'existe pas trois entiers x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}$.

B. 1. Si $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$, alors :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times k + 2^n - 1 = 2^n(k + 1) - 1,$$

donc la somme $x^2 + y^2 + z^2$ est impair. Les trois termes de cette somme ne peuvent pas être tous pairs, et on ne peut pas non plus avoir deux impairs et un pair ; donc, soit ils sont tous les trois impairs, soit deux sont pairs et un est impair.

Le tableau des restes dans la congruence modulo 2 suivant :

$x \equiv$	0	1
$x^2 \equiv$	0	1

permet d'affirmer qu'un nombre et son carré ont la même parité. On déduit que le résultat ci-dessus sur les termes de la somme $x^2 + y^2 + z^2$ s'exprime en disant que x, y et z sont tous impairs ou deux d'entre eux sont pairs.

2. a) $x^2 + y^2 + z^2 = (2q)^2 + (2r)^2 + (2s + 1)^2$
 $= 4(q^2 + r^2 + s^2 + 1) + 1.$

Il en résulte que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$ signifie que :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times k + 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

$$= 2^n(k + 1) - 1$$

$$= 4 \times 2^{n-2}(k + 1) - 1$$

donc, $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{4}$;

or dans **2. a)**, on a obtenu $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$, ce qui est impossible car -1 et 1 ne sont pas congrus modulo 4. Cette contradiction nous permet d'affirmer qu'on ne peut pas avoir deux des trois entiers x, y et z pair et le troisième impair.

3. a) $k^2 + k = k(k + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs ; donc, on aura forcément un facteur pair et l'autre impair, d'où le produit est divisible par 2.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = (2q + 1)^2 + (2r + 1)^2 + (2s + 1)^2$
 $= 4[(p^2 + p) + (q^2 + q) + (s^2 + s)] + 3$

On a vu que, pour tout entier naturel k , $k^2 + k$ est pair, donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 4(2t) + 1 = 8t + 3, \text{ avec } t \text{ entier.}$$

Il en résulte que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{8}$.

D'autre part, $n \geq 3$ donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$$

signifie que :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times k + 2^n - 1$$

$$= 2^n(k + 1) - 1$$

$$= 8 \times 2^{n-3}(k + 1) - 1,$$

d'où $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod{8}$; ce résultat est impossible car -1 et 3 ne sont pas congrus modulo 8.

Conclusion : lorsque $n \geq 3$, il n'existe pas d'entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}.$$

103 1. $u_0 = 14$; $u_1 = 64$; $u_2 = 314$; $u_3 = 1564$; $u_4 = 7814$.

On conjecture que l'écriture décimale des termes de la suite de rang pair se termine par 14 et celle de rang impair se termine par 64.

2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6$
 $= 5(5u_n - 6) - 6$
 $= 25u_n - 36.$

Comme $25 \equiv 1 \pmod{4}$ et $36 \equiv 0 \pmod{4}$, alors :

$$u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}.$$

- Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel k , $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$.

$$u_0 = 14, \text{ donc } u_0 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Supposons que $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$. On a :

$$u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \text{ et } u_{2k+2} \equiv u_{2k} \pmod{4};$$

on déduit, d'après l'hypothèse de récurrence, que :

$$u_{2k+2} \equiv 2 \pmod{4}.$$

La propriété « $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ » étant vraie pour $k = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel k .

- Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel k , $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.

$$u_1 = 64, \text{ donc } u_1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Supposons que $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$. On a :

$$u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3} \text{ et } u_{2k+3} \equiv u_{2k+1} \pmod{4};$$

on déduit, d'après l'hypothèse de récurrence, que :

$$u_{2k+3} \equiv 0 \pmod{4}.$$

La propriété « $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ » étant vraie pour $k = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel k .

- 3.** Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

$$2u_0 = 28 = 5^2 + 3.$$

Supposons que $2u_n = 5^{n+2} + 3$. On a :

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5(2u_n) - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12$$

soit $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$.

La propriété « $2u_n = 5^{n+2} + 3$ » étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n .

- 4.** $2u_n - 28 = 5^{n+2} + 3 - 28 = 5^2(5^n - 1)$ et $5 \equiv 1 \pmod{4}$; donc, pour tout entier naturel n , $5^n \equiv 1 \pmod{4}$; cela veut dire que $5^n - 1 = 4k$, avec k entier.

Il en résulte que $2u_n - 28 = 5^2(5^n - 1) = 5^2 \times 4k = 100k$, d'où $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

- 5.** Si $n = 2k$, alors :

$$\begin{aligned} 2u_{2k} &= 5^{2k+2} + 3 \\ &= 5^2 \times 5^{2k} + 28 - 25 \\ &= 25(25^k - 1) + 28. \end{aligned}$$

$25 \equiv 1 \pmod{24}$, donc $25^k \equiv 1 \pmod{24}$; d'où $25^k - 1$ est multiple de 24 donc est multiple de 8; ce qui entraîne $25^k - 1 = 8q$, avec q entier.

On déduit que $2u_{2k} = 25(8q) + 28 = 200q + 28$, d'où : $u_{2k} = 100q + 14$, ce qui veut dire que $u_{2k} \equiv 14 \pmod{100}$.

L'écriture décimale de u_{2k} se termine donc par 14.

- Si $n = 2k + 1$, alors :

$$\begin{aligned} 2u_{2k+1} &= 5^{2k+3} + 3 \\ &= 5^3 \times 5^{2k} + 128 - 125 \\ &= 125(25^k - 1) + 128. \end{aligned}$$

On a vu que $25^k - 1 = 8q$, avec q entier.

On déduit que $2u_{2k+1} = 125(8q) + 128 = 1000q + 128$, d'où $u_{2k+1} = 500q + 64$; qui implique $u_{2k+1} \equiv 64 \pmod{100}$.

L'écriture décimale de u_{2k+1} se termine donc par 64.

- 104 1. a)** $a^2 + 9 = 2^n$ et $n \geq 4$, donc $a^2 + 9 \equiv 0 \pmod{2}$.

Comme $9 \equiv -1 \pmod{2}$, alors $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, soit :

$$a^2 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 2.

a	0	1
a^2	0	1

Ce tableau montre que si $a^2 \equiv 1 \pmod{2}$ alors $a \equiv 1 \pmod{2}$.

On déduit que a est impair.

- b)** Le nombre a étant impair, il s'écrit sous la forme $2p + 1$:

$$a^2 + 9 = (2p + 1)^2 + 9 = 4p^2 + 4p + 10,$$

donc $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod{4}$.

D'autre part, $a^2 + 9 = 2^n = 4 \times 2^{n-2}$ ($n \geq 4$), donc :

$$a^2 + 9 \equiv 0 \pmod{4};$$

ce qui est impossible car 2 et 0 ne sont pas congrus modulo 4.

On déduit que l'équation proposée n'a pas de solution.

- 2. a)** $3^2 \equiv 1 \pmod{4}$; donc pour tout entier naturel k :

$$(3^2)^k \equiv 1 \pmod{4}, \text{ soit } 3^{2k} \equiv 1 \pmod{4},$$

ce qui entraîne $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod{4}$.

Comme tout entier naturel, n s'écrit sous la forme $2k$ ou $2k + 1$, alors 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

- b)** $a^2 + 9 = 3^n$ et 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4, donc :

$$a^2 + 9 \equiv 1 \pmod{4} \text{ ou } a^2 + 9 \equiv 3 \pmod{4}.$$

- $a^2 + 9 \equiv 1 \pmod{4}$ implique $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$; donc a^2 est pair, d'où a l'est aussi.

- $a^2 + 9 \equiv 3 \pmod{4}$ implique $a^2 \equiv 2 \pmod{4}$; donc a^2 est pair, d'où a l'est aussi.

Dans les deux cas, on a trouvé que a est pair.

a s'écrit sous la forme $2q$:

$$a^2 + 9 = (2q)^2 + 9 = 4q^2 + 9.$$

Comme $4q^2 \equiv 0 \pmod{4}$ et $9 \equiv 1 \pmod{4}$, alors :

$$a^2 + 9 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Comme $a^2 + 9 = 3^n$ et $3^n \equiv 1 \pmod{4}$ uniquement lorsque $n = 2k$, alors nécessairement n est pair.

- c)** On pose $n = 2p$ avec $p \geq 2$.

$$3^n - a^2 = 3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a);$$

donc $9 = (3^p - a)(3^p + a)$;

d'où $3^p + a$ est un diviseur positif de 9, ce qui entraîne :

$$3^p + a = 1 \text{ ou } 3^p + a = 3 \text{ ou } 3^p + a = 9.$$

D'autre part, n est pair et $n \geq 3$ implique que $n \geq 4$, donc $p \geq 2$, d'où $3^p \geq 9$.

Les trois égalités ci-dessus ne sont pas possibles car a est un entier naturel non nul.

- 3. a)** $a^2 + 9 = 5^n$ et $n \geq 2$.

Si n est impair, $n = 2p + 1$, donc :

$$a^2 + 9 = 5^{2p+1} = 5 \times 25^p.$$

Comme $25 \equiv 1 \pmod{3}$, alors $25^p \equiv 1 \pmod{3}$.

On a $9 \equiv 0 \pmod{3}$ et $5 \equiv 2 \pmod{3}$; ainsi l'égalité $a^2 + 9 = 5^{2p+1} = 5 \times 25^p$ entraîne $a^2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 3.

a	0	1	2
a^2	0	1	1

Il en résulte que $a^2 \equiv 2 \pmod{3}$ est impossible, donc l'équation n'a pas de solution.

- b)** Si n est pair, on pose $n = 2p$ avec $p \geq 1$.

$$5^n - a^2 = 5^{2p} - a^2 = (5^p - a)(5^p + a)$$

donc $9 = (5^p - a)(5^p + a)$;

d'où $5^p + a$ est un diviseur positif de 9, ce qui entraîne :

$$5^p + a = 1 \text{ ou } 5^p + a = 3 \text{ ou } 5^p + a = 9.$$

a étant un entier naturel non nul et $p \geq 1$, la seule solution existe pour $p = 1$, dans la troisième égalité; on obtient $a = 4$.

On a bien $4^2 + 9 = 5^2$.

105 B. 1. a)
$$\begin{cases} 3x + y \equiv 1 \pmod{6} \\ x - y \equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

En additionnant membre à membre ces deux congruences, on obtient $4x \equiv 4 \pmod{6}$.

b) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 6.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5
$4x \equiv$	0	4	2	0	4	2

On déduit que $4x \equiv 4 \pmod{6}$ si, et seulement si, $x \equiv 1 \pmod{6}$ ou $x \equiv 4 \pmod{6}$.

2. $y \equiv x - 3 \pmod{6}$.

• Si $x \equiv 1 \pmod{6}$, alors $y \equiv 4 \pmod{6}$.

Dans ce cas, $3x + y \equiv 7 \pmod{6}$ et $x - y \equiv 3 \pmod{6}$.

Comme $7 \equiv 1 \pmod{6}$, le système est vérifié.

On déduit que les couples d'entiers $(6k + 1 ; 6k + 4)$ sont solutions du système.

• Si $x \equiv 4 \pmod{6}$, alors $y \equiv 1 \pmod{6}$.

Dans ce cas, $3x + y \equiv 13 \pmod{6}$ et $x - y \equiv 3 \pmod{6}$.

Comme $13 \equiv 1 \pmod{6}$, le système est vérifié.

On déduit que les couples d'entiers $(6k + 4 ; 6k + 1)$ sont solutions du système.

L'ensemble des solutions du système est :

$S = \{(6k + 1 ; 6k + 4) ; (6k + 4 ; 6k + 1), \text{ avec } k \text{ entier relatif}\}.$

EXERCICES

Pour aller plus loin (page 36)

106 Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $x^2 + y^2 = z^2$.

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$z \equiv$	0	1	2	3	4
$z^2 \equiv$	0	1	4	4	1

Dressons un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2$ dans la congruence modulo 5.

$y^2 \backslash x^2$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

• L'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ implique la congruence $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{5}$. Cette congruence est possible uniquement si $x^2 + y^2$ prend les valeurs prises par z^2 , soit 0, 1 ou 4.

• $x^2 + y^2$ prend les valeurs 1 et 4 uniquement lorsque $x^2 \equiv 0 \pmod{5}$ ou $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$, ce qui équivaut à $x \equiv 0 \pmod{5}$ ou $y \equiv 0 \pmod{5}$.

• Lorsque $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ et $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{5}$, cela implique que $z^2 \equiv 0 \pmod{5}$, d'où $z \equiv 0 \pmod{5}$.

• En conclusion, l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ implique que $x \equiv 0 \pmod{5}$ ou $y \equiv 0 \pmod{5}$ ou $z \equiv 0 \pmod{5}$. Cela veut dire que si $x^2 + y^2 = z^2$ alors l'un au moins des entiers x , y ou z est divisible par 5.

107 1. Si $0 \leq 2a_i \leq 9$, alors $m(a_i) = 2a_i$ est compris entre 0 et 9.

• Si $2a_i = \overline{\alpha\beta}$, alors $5 \leq a_i \leq 9$.

D'où $10 \leq 2a_i \leq 18$, soit $10 \leq \overline{\alpha\beta} \leq 18$.

On déduit que $\alpha = 1$ et $0 \leq \beta \leq 8$, donc $1 \leq \alpha + \beta \leq 9$, soit $1 \leq m(a_i) \leq 9$.

• Dans les deux cas, on a trouvé que $0 \leq m(a_i) \leq 9$.

2. a) La somme associée au numéro : 4 978 210 033 328 383 est égale à 72 qui est un multiple de 12 ; donc, la règle de Luhn est respectée.

b) Supposons qu'on a modifié par erreur le chiffre a_i en a_i' . Soit S la somme associée au bon numéro et S' celle associée au numéro erroné.

• **Si i est pair**, alors $|S - S'| = |a_i - a_i'| \leq 9$.

S étant un multiple de 12, S' ne peut pas l'être ; l'erreur est donc détectée.

• **Si i est impair**, alors $|S - S'| = |m(a_i) - m(a_i')| \leq 9$ car $1 \leq m(a_i) \leq 9$.

S étant un multiple de 12, S' ne peut pas l'être ; l'erreur est donc détectée.

c) Supposons que le bloc $\overline{a_i a_{i+1}}$ est permuté.

• **Si i est pair**, alors $S' - S = (a_{i+1} - m(a_{i+1})) + (m(a_i) - a_i)$. Comme $|m(a_i) - a_i| \leq 4$, alors :

$$|S' - S| \leq |a_{i+1} - m(a_{i+1})| + |m(a_i) - a_i| \leq 4 + 4 = 8.$$

Le seul cas où l'erreur ne pourrait pas être détectée est lorsque $S' - S = 0$. L'étude de cette différence dans les quatre cas selon que a_i et a_{i+1} soient compris ou non entre 0 et 4, montre que la différence $S' - S$ s'annule si a_i est égal à 0 et le suivant à 9 ou vice versa.

• **Si i est impair**, on aboutit à la même conclusion.

108 1. a) Le nombre (6, 4, 3, 1) est égal à :

$$2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = 90.$$

b) 463 s'écrit (8, 7, 6, 3, 2, 1, 0) ;

327 s'écrit (8, 6, 2, 1, 0) ;

179 s'écrit (7, 5, 4, 1, 0).

c) Un nombre écrit en code CLE est impair si son dernier chiffre est égal à 1. Il est pair si son dernier chiffre est égal à 0.

2. a) $(7) + (7) = (8)$; $(n) + (n) = (n + 1)$.

b) • (13, 10, 7, 4) + (15, 11, 10, 7) = (15, 13, 12, 8, 4).

• (21, 13, 12, 7, 5) + (19, 13, 5) = (21, 19, 14, 12, 7, 6).

Un nombre n présent dans les deux termes de l'addition se transforme en $n + 1$. Un nombre n présent une seule fois ne change pas, sauf si $n - 1$ est présent deux fois ; dans ce cas il se changera en $n + 1$.

3. a) $(m) \times (m) = (m + n)$.

b) $(7, 3, 1) \times (4) = (11, 7, 1)$;

$(9, 2) \times (10, 5, 3) = (19, 14, 13, 7, 5)$.

c) Dans un produit, chaque nombre n du premier facteur est additionné à chaque nombre du deuxième facteur.

109 1. a) La division euclidienne de A par b s'écrit :

$$A = bq_0 + a_0, \text{ avec } 0 \leq a_0 \leq b - 1.$$

Comme a_0 est positif et $b \geq 2$, alors $q_0 \leq A$.

Si $q_0 < b$, alors :

$$A = bq_0 + a_0 = q_0b + a_0 \overline{(a_1 a_0)}_b, \text{ avec } a_1 = q_0.$$

b) • Si $q_0 \geq b$, la division euclidienne de q_0 par b s'écrit :

$$q_0 = bq_1 + a_1, \text{ avec } 0 \leq a_1 \leq b - 1.$$

Pour les mêmes raisons que dans le **a)**, $q_1 < q_0$.

• Si $q_0 < b$, alors :

$$\begin{aligned} A &= bq_0 + a_0 \\ &= b(q_1 + a_1) + a_0 \\ &= q_1b^2 + a_1b + a_0 \\ &= a_2b^2 + a_1b + a_0 \text{ avec } a_2 = q_1 \\ &= \overline{(a_2 a_1 a_0)}_b \end{aligned}$$

c) Si $q_1 \geq b$, on réitère le procédé.

Le procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations car la suite des quotients (q_n) est strictement décroissante dans \mathbb{N} ; il existe donc un rang n_0 tel que $q_{n_0-1} \geq b$ et $q_0 < b$.

On déduit que :

$$\begin{aligned} A &= q_{n_0}b^{n_0+1} + a_{n_0}b^{n_0} + \dots + a_1b + a_0 \\ &= \overline{(a_{n_0+1} a_{n_0} \dots a_1 a_0)}_b \text{ avec } a_{n_0+1} = q_{n_0}. \end{aligned}$$

2. L'unicité de l'écriture se déduit de l'unicité du couple (q, r) dans la division euclidienne d'un entier par b .

3. a) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

b) $\overline{(10101)}_b = b^4 + b^2 + 1$
 $= (b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$
 $= \overline{(111)}_b \times (b^2 - b + 1).$

c) Le quotient est $b^2 - b + 1$.

110 1. $N_1 = \overline{(\beta 1 \alpha)}_{12}$
 $= \beta \times 12^2 + 12 + \alpha$
 $= 11 \times 12^2 + 12 + 10$
 $= 1606.$

2. $N_2 = 1131$
 $= 94 \times 12 + 3$
 $= (7 \times 12 + 10) \times 12 + 3$
 $= 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3$
 $= \overline{(7 \alpha 3)}_{12}.$

3. a) $N = \overline{(a_n \dots a_1 a_0)}_{12} = a_n \times 12^n + \dots + a_1 \times 12 + a_0.$

Pour tout entier naturel non nul k , on a :

$$12^k \equiv 0 \pmod{3},$$

donc $a_k \times 12^k \equiv 0 \pmod{3}$, d'où :

$$a_n \times 12^n + \dots + a_1 \times 12 + a_0 \equiv a_0 \pmod{3}.$$

On déduit qu'un nombre écrit en base 12 est divisible par 3 si, et seulement si, il se termine par 0, 3, 6 ou 9.

b) $N_2 = \overline{(7 \alpha 3)}_{12}$ se termine par 3 ; donc il est divisible par 3.

En base 10, $N_2 = 1131$ est divisible par 3.

4. a) $12 \equiv 1 \pmod{11}$; donc pour tout entier naturel k :

$$12^k \equiv 1 \pmod{11}.$$

Il en résulte que :

$$a_n \times 12^n + \dots + a_1 \times 12 + a_0 \equiv a_n + \dots + a_0 \pmod{11}.$$

On déduit qu'un nombre écrit en base 12 est divisible par 11 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est un multiple de 11.

b) $N_1 = \overline{(\beta 1 \alpha)}_{12}$ et $\beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22$.

En base 10, $N_1 = 1606 = 11 \times 146$ est divisible par 11.

5. Si $N = \overline{(x4y)}_{12}$ est multiple de 33 ; alors il est multiple de 11 et 3 ; d'où, d'après **3.** et **4.**, y est égal à 0, 3, 6 ou 9, et $x + 4 + y = 11k$, k entier. Ainsi :

• Si $y = 0$, alors $x = 7$;

• Si $y = 3$, alors $x = 4$;

• Si $y = 6$, alors $x = 1$;

• Si $y = 9$, alors $x = 9$

Réciproquement, on vérifie facilement que les nombres $\overline{(740)}_{12}$, $\overline{(443)}_{12}$, $\overline{(146)}_{12}$ et $\overline{(949)}_{12}$ sont divisibles par 33.

111 1. On trouve :

m	1	2	3	4	5	6
m^*	1	25	33	37	10	41

2. $1^* + 2^* + 3^* + 4^* + 5^* + 6^* = 147$ et $147 \equiv 0 \pmod{7^2}$; donc $1^* + 2^* + 3^* + 4^* + 5^* + 6^* \equiv 0 \pmod{7^2}$.

112 1. Le point H a pour coordonnées $(x; y; -\frac{1}{4})$; donc $MH^2 = MF^2$ si, et seulement si :

$$\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 ;$$

ce qui équivaut, après simplification, à $x^2 + y^2 = z$.

2. a) L'intersection de l'ensemble \mathcal{E} et du plan d'équation $z = 2$ est le cercle de centre $A(0; 0; 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ a pour équation $x = 0$; donc, l'intersection de l'ensemble \mathcal{E} avec le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ est, dans le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$, la parabole d'équation est $y^2 = z$.

3. a) Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1

Par conséquent $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{7}$.

Dressons un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2$ dans la congruence modulo 7.

$y^2 \backslash x^2$	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

On déduit que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ si, et seulement si, $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$ et $y^2 \equiv 0 \pmod{7}$; ce qui équivaut à $x \equiv 0 \pmod{7}$ et $y \equiv 0 \pmod{7}$.

Cela veut dire que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ si, et seulement si, 7 divise x et 7 divise y .

b) Un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ appartient à l'intersection du plan \mathcal{P} d'équation $z = 98$ et à l'ensemble \mathcal{C} si, et seulement si,
$$\begin{cases} z = 98 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

Ce sont les points du plan \mathcal{P} dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 98$.

Cherchons les points de cette intersection dont les coordonnées sont des entiers naturels.

L'égalité $x^2 + y^2 = 98$ implique $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$; donc, d'après **3. a)**, $x = 7p$ et $y = 7q$, avec p et q entiers naturels. Ainsi, l'égalité $x^2 + y^2 = 98$ s'écrit $(7p)^2 + (7q)^2 = 98$, soit $p^2 + q^2 = 2$.

Cette équation admet une seule solution : le couple d'entiers naturels $(1 ; 1)$. Cette solution correspond au point de coordonnées $(7 ; 7 ; 98)$. L'ensemble recherché est constitué d'un seul point.