Sujet A

Capacités mises en œuvre

- *Étudier une marche aléatoire à trois états*
- *Étudier une suite de matrices vérifiant $X_{n+1} = AX_n + B$*

Trois marques X, Y et Z d'un dentifrice occupent un secteur de consommation.
Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.
Soit n un entier naturel. Pour un consommateur pris au hasard, on désigne par X l'état « la marque X est utilisée un mois donné », Y l'état « la marque Y est utilisée un mois donné » et Z l'état « la marque Z est utilisée un mois donné ».
Au cours du mois d'essai ($n = 0$), on a observé l'état initial de ce processus : $E_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.
Les probabilités des événements X, Y et Z le mois n sont respectivement notées x_n, y_n et z_n.
On suppose le processus sans mémoire.
D'autre part, en déterminant par sondage les intentions des consommateurs que l'on supposera constantes, on a obtenu la matrice de transition de cette marche aléatoire :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

1. a. Exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
b. À quoi est égal $x_n + y_n + z_n$?

2. Soit les matrices colonnes $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n + B$.

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
b. Calculer $D = P^{-1}AP$.
c. En déduire, pour n entier naturel, la matrice D^n, puis la matrice A^n en fonction de n.

4. a. Montrer qu'il existe une matrice C telle que $C = AC + B$. Calculer C.
b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

5. a. Exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n.
b. Que conclure de l'utilisation, à long terme, des marques X, Y et Z ?

Savoir-faire

Question 1. ➤ Savoir-faire 3, p. 119
Question 4. ➤ Savoir-faire 2, p. 115

Sujet B

Capacités mises en œuvre

- *Étudier une suite de matrices vérifiant $X_{n+1} = AX_n$*
- *Étudier la convergence d'une suite de matrices colonnes*

Un biologiste souhaite déterminer, sur une durée assez longue, l'évolution de la population d'une famille d'insectes insulaires.
Des observations ont montré que l'espèce possède trois stades de développement : les larves, les adultes et les insectes âgés.
On a observé que, sur une unité de temps, seuls les adultes se reproduisaient et que leur taux de natalité est de 225 %.
On sait aussi que le taux de mortalité des larves et des adultes est de 25 % et que celui des individus âgés est de 75 %.
On sait enfin que le temps moyen passé au stade de larves est de 4 unités de temps, comme le temps moyen passé au stade d'adultes (on peut supposer donc qu'au bout d'un an, 25 % des larves deviennent adultes).
À l'instant initial de l'étude, les effectifs (en milliers) des populations de larves, d'adultes et d'insectes âgés sont respectivement égaux à a, b et c.

On note N (t) la matrice colonne $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ donnant la population de larves, d'adultes et d'insectes à l'instant t, où t est un entier naturel.

1. Montrer que $N(t+1) = A \times N(t)$, où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 2{,}25 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose dans cette question $a = 100$, $b = 200$ et $c = 50$.
Combien y a-t-il d'adultes au bout de 10 unités de temps (à une unité près) ?

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a. Calculer P^{-1}, puis la matrice $D = P^{-1}AP$.
b. Pour t entier naturel, déterminer D^t, puis A^t.

4. Exprimer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de a, b, c et t.

5. a. Ce modèle prédit-il la pérennité de l'espèce ?
b. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{x(t)}{y(t)}\right)$. Interpréter ce résultat.

Savoir-faire

Question 3. ➤ Savoir-faire 1, p. 115

Sujet C

Capacités mises en œuvre

- *Étudier une suite de matrices vérifiant $X_{n+1} = AX_n$*
- *Étudier asymptotiquement une marche aléatoire*

Un appartement est formé de deux pièces A et B reliées entre elles par une porte ouverte ; seule la pièce B possède une fenêtre ouverte.

Une guêpe qui s'était endormie dans la pièce A se réveille à l'instant 0.

On estime que :

– quand la guêpe est dans la pièce A à l'instant n (exprimé en minutes), elle est encore dans la pièce A une minute après avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$.

– quand la guêpe est dans la pièce B à l'instant n, alors une minute après, elle est retournée dans la pièce A avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et elle est restée dans la pièce B avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Dans cette question, quand la guêpe est sortie, elle ne revient plus.

a. Déterminer la matrice de transition M de cette marche aléatoire, les états A « la guêpe est en A », B « la guêpe est en B » et E « la guêpe est sortie » étant pris dans l'ordre alphabétique.

b. Soit $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de cette marche aléatoire à l'instant n. On note : $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice Q telle que $X_{n+1} = X_n \times Q$.

c. Montrer que pour n entier supérieur ou égal à 1 :

$$Q^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\left(\frac{2}{6}\right)^n & \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \frac{3}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n & \frac{3}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix}.$$

d. En déduire la probabilité que la guêpe soit sortie de l'appartement n minutes après son réveil.

e. Au bout de combien de temps cette probabilité est-elle supérieure à 0,999 ?

2. Dans cette question, quand la guêpe est sortie, elle revient dans la pièce B avec la probabilité 0,1.

a. Que devient la matrice de transition ?

b. Montrer que cette marche aléatoire possède un état stable. Le déterminer, puis l'interpréter.

Savoir-faire

Question 1. ➤ Savoir-faire 4, p. 119
Question 2. ➤ Savoir-faire 6, p. 121

Sujet D ALGO

Capacités mises en œuvre

- *Étudier une suite de matrices vérifiant $X_{n+1} = AX_n$*
- *Écrire un algorithme de recherche d'un terme d'une suite récurrente*

Corentin a trouvé dans son grenier un plan conduisant à un trésor. Il est dit ceci :

> ***« Plante un bâton A au pied du puits et un bâton B au pied du figuier, puis plante un bâton C au milieu du chemin reliant ces deux bâtons, puis un bâton D au milieu du chemin reliant A et C, et ainsi de suite… Tu trouveras le trésor au bout de tes efforts ».***

Le figuier est à 200 mètres du puits. Peut-on aider Corentin à trouver le trésor ?

Pour tout entier naturel n, on note u_n la distance du n-ième bâton planté au puits. Ainsi $u_0 = 0$ et $u_1 = 200$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$.

2. Écrire un algorithme permettant le calcul du terme u_n de cette suite, avec comme entrée l'entier n.

3. On note $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice que l'on déterminera.

4. a. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis $D = P^{-1}AP$.

b. Calculer D^n, puis A^n en fonction de n.

5. a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (u_n). Conclure.

Savoir-faire

Question 4. ➤ Savoir-faire 1, p. 115

Pour se préparer à l'oral BAC

88 Soit la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $X_{n+1} = AX_n + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'expression de X_n en fonction de n.

2. La suite (X_n) est-elle convergente ?

89 Dans une ville donnée, si une année, un habitant pratique le covoiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité de 0,6 ; si une année, il se déplace seul dans sa voiture, il pratique le covoiturage l'année suivante avec une probabilité de 0,35.

Déterminer, s'il existe, l'état stable de cette marche aléatoire.

Savoir-faire 1 — Étudier une suite vérifiant $U_{n+1} = AU_n$

➤ Voir les exercices 29 et 30

Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définies par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n$, avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^n = 0{,}1^n \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

2. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Solution

1. On fait un raisonnement par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété : « $A^n = 0{,}1^n \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation.** On vérifie que $P(0)$ est vraie : $0{,}1^0 \begin{pmatrix} 2^{0+1}-1 & 1-2^0 \\ 2^{0+1}-2 & 2-2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^0$.
- **Hérédité.** On suppose $P(n)$ vraie pour un entier naturel n. Alors :

$A^{n+1} = 0{,}1^n \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n \end{pmatrix} \times 0{,}1 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0{,}1^{n+1} \begin{pmatrix} 2\times 2^{n+1}-1 & 1-2^{n+1} \\ 2\times 2^{n+1}-2 & 2-2^{n+1} \end{pmatrix}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

On en déduit que $U_n = 0{,}1^n \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1+1-2^n \\ 2^{n+1}-2+2-2^n \end{pmatrix} = 0{,}1^n \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2^n \\ 0{,}2^n \end{pmatrix}$.

2. La suite (U_n) converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, car $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}2^n) = 0$.

Méthode
Pour déterminer la limite d'une suite de matrices, on détermine la limite de chaque élément de la matrice.

Savoir-faire 2 — Étudier une suite de matrices vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$

➤ Voir les exercices 39 et 40

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$. On définit la suite de matrices (U_n) par $U_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Montrer que $A = PDQ$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Calculer QP et en déduire A^n en fonction de n.

2. Exprimer U_n en fonction de n, puis étudier la convergence de la suite (U_n).

Solution

1. On calcule d'abord $PD = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, puis $(PD)Q = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} = A$.

Alors $A^n = (PDQ)(PDQ)\ldots(PDQ) = PD^nQ$, car $QP = I_2$. D'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 0{,}2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0{,}5^n + 2\times 0{,}2^n & 2\times 0{,}5^n - 2\times 0{,}2^n \\ 0{,}5^n - 0{,}2^n & 2\times 0{,}5^n + 0{,}2^n \end{pmatrix}.$$

2. Si $U_n = C$ pour tout entier naturel n, alors $C = AC + B$, soit $(I_2 - A)C = B$.

$I_2 - A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$: cette matrice est inversible et la calculatrice donne $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1{,}75 \end{pmatrix}$.

On vérifie que c'est bien l'inverse. D'où $C = (I_2 - A)^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1{,}75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On en déduit : $U_{n+1} - C = A(U_n - C)$, et ainsi $U_n - C = A^n(U_0 - C)$.

D'où $U_n = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0{,}5^n + 2\times 0{,}2^n & 2\times 0{,}5^n - 2\times 0{,}2^n \\ 0{,}5^n - 0{,}2^n & 2\times 0{,}5^n + 0{,}2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 2\times 0{,}5^n + 4\times 0{,}2^n \\ 3 + 2\times 0{,}5^n - 2\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$.

La limite de $0{,}5^n$ est 0, comme celle de $0{,}2^n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} (18 + 2\times 0{,}5^n + 4\times 0{,}2^n) = 18$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + 2\times 0{,}5^n - 2\times 0{,}2^n) = 3$: la suite (U_n) converge vers la matrice $U^* = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Méthode
Pour déterminer le terme général d'une suite telle que $U_{n+1} = AU_n + B$, on commence par trouver une suite constante solution.

Savoir-faire 3

➤ Voir l'exercice 53

Modéliser une marche aléatoire

Un couple part en voyage chaque année. S'il est resté en France une année donnée, la probabilité que ce couple voyage à l'étranger l'année suivante est 0,4. Dans le cas contraire, la probabilité qu'il voyage à nouveau à l'étranger est 0,7. En 2012, ce couple est allé à l'étranger.

1. Représenter cette marche aléatoire à l'aide d'un graphe.

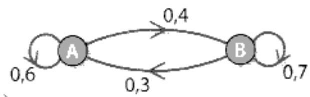
2. Écrire la matrice de transition M de cette marche aléatoire.

3. Quelle est la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2017 ?

Méthode

Pour déterminer l'état probabiliste à l'étape n d'une marche aléatoire de matrice de transition M, on calcule d'abord M^n.

Solution



1. On note A l'état « le couple reste en France » et B l'état « le couple part à l'étranger ».

2. $P_{X_n=A}(X_{n+1}=B)=0{,}4$ et $P_{X_n=B}(X_{n+1}=B)=0{,}7$; $M=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, avec comme ordre des états : A, B.

3. L'état initial est modélisé par $U_0=(0\ \ 1)$. L'état en 2017 est donné par la matrice U_5, avec $U_5=U_0M^5$. Avec la calculatrice, on trouve à 10^{-3} près : $M^5=\begin{pmatrix} 0{,}430 & 0{,}570 \\ 0{,}428 & 0{,}572 \end{pmatrix}$ et $U_5=(0{,}428\ \ 0{,}572)$.

La probabilité cherchée est donc 0,572 (à 10^{-3} près).

Savoir-faire 4

➤ Voir l'exercice 60

Étudier une marche aléatoire

Une puce saute d'un sommet d'un triangle ABC à un autre : elle choisit indifféremment l'un ou l'autre des sommets restants. Elle part du sommet A à l'instant 0.

1. Écrire la matrice de transition M de cette marche aléatoire.

2. Soit la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer P^{-1}, puis $D=P^{-1}MP$.

En déduire M^n en fonction de n, où n est un entier naturel.

3. Quelle est la probabilité que la puce soit à nouveau en A à l'instant n ?

Conseil

Pour écrire la matrice de transition d'une marche aléatoire, faire attention à l'ordre des états.

Solution

1. La probabilité pour la puce de sauter sur un autre sommet est $\frac{1}{2}$, donc on obtient :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ l'ordre des états étant A, B, C.}$$

2. On trouve après calculs : $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $M^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

3. $U_0=(1\ \ 0\ \ 0)$ et $U_n=U_0\times M^n$, d'où $U_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ \ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ \ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Donc la probabilité que la puce soit en A à l'instant n est $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Savoir-faire 5

➤ Voir l'exercice 67

Étudier la convergence d'une marche aléatoire à deux états

Deux joueurs de tennis A et B décident de jouer une partie toutes les semaines.
La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7. Si A gagne la partie de la semaine *n*, la probabilité qu'il gagne la semaine suivante est seulement de 0,4. Si A perd la partie de la semaine *n*, il change de stratégie et la probabilité qu'il gagne la semaine suivante est de 0,9. On note S_1 l'état « A gagne la semaine *n* » et S_2 l'état « B gagne la semaine *n* ».

1. Écrire la matrice de transition associée à cette marche aléatoire, en considérant les états dans l'ordre S_1, S_2.

2. Déterminer l'état stable de cette marche aléatoire. Conclure.

Solution

Méthode
Pour déterminer l'état stable $(x \ \ y)$ d'une marche aléatoire de matrice M, on résout l'équation :
$(x \ \ y) \times M = (x \ \ y)$,
avec $x + y = 1$.

1. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

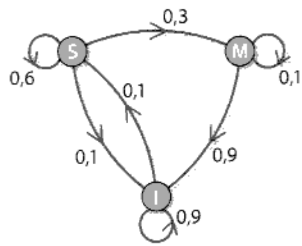
2. L'état stable de cette marche aléatoire existe, car la matrice A ne contient pas de 0. Cet état stable est défini par la matrice $\pi = (x \ \ y)$ telle que $\pi M = \pi$, soit $\begin{cases} 0{,}4\,x + 0{,}9\,y = x \\ 0{,}6\,x + 0{,}1\,y = y \end{cases}$ qui équivaut à $2x = 3y$.
Or $x + y = 1$, donc $2x = 3(1 - x)$, soit $5x = 3$ et $x = \frac{3}{5}$. L'état stable est donc $\left(\frac{3}{5} \ \ \frac{2}{5}\right)$: lorsque *n* tend vers l'infini, la probabilité que A gagne se stabilise à 0,6.

Savoir-faire 6

➤ Voir l'exercice 69

Étudier la convergence d'une marche aléatoire à plusieurs états

Un individu susceptible de contracter une maladie peut être dans un des trois états suivants : S (susceptible de tomber malade), M (infecté par la maladie) et I (immunisé).
Son état peut changer tous les trois mois selon certaines probabilités données dans le graphe ci-contre.



1. Déterminer la matrice de transition de cette marche aléatoire, en considérant les états dans l'ordre S, M, I.

2. Faire une étude asymptotique de cette marche aléatoire.

Solution

Méthode
Pour assurer l'existence d'un état stable, il suffit qu'une puissance de la matrice de transition soit sans 0.

1. $P_{X_n=S}(X_{n+1} = S) = 0{,}6$; $P_{X_n=S}(X_{n+1} = M) = 0{,}3$ et $P_{X_n=S}(X_{n+1} = I) = 0{,}1$. La première ligne de la matrice de transition est donc : 0,6 0,3 0,1. On a aussi $P_{X_n=M}(X_{n+1} = M) = 0{,}1$ et $P_{X_n=M}(X_{n+1} = I) = 0{,}9$.
Enfin $P_{X_n=I}(X_{n+1} = S) = 0{,}1$ et $P_{X_n=I}(X_{n+1} = I) = 0{,}9$. D'où la matrice de transition : $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

2. $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}21 & 0{,}42 \\ 0{,}09 & 0{,}01 & 0{,}9 \\ 0{,}15 & 0{,}03 & 0{,}82 \end{pmatrix}$. Puisque la matrice P^2 ne contient pas de 0, il existe un état stationnaire.
Pour le déterminer, on résout :
$(x \ \ y \ \ z) \times P = (x \ \ y \ \ z)$, soit $\begin{cases} 0{,}6\,x + 0{,}1\,z = x \\ 0{,}3\,x + 0{,}1\,y = y \\ 0{,}1\,x + 0{,}9\,y + 0{,}9\,z = z \end{cases}$, soit $\begin{cases} z = 4x \\ x = 3y \\ 4x = z \end{cases}$, soit $z = 4x$ et $y = \frac{1}{3}x$.
Comme $x + y + z = 1$, on en déduit : $x + \frac{1}{3}x + 4x = 1$, soit $x = \frac{3}{16}$. Enfin : $y = \frac{1}{16}$ et $z = \frac{3}{4}$.
Quand le nombre de mois tend vers l'infini, la population tend vers la répartition $\left(\frac{3}{16} \ \ \frac{1}{16} \ \ \frac{3}{4}\right)$: à terme, la proportion de personnes immunisées tend vers 75 %.