

EXERCICE 4

5 points

Attention : et exercice devra être rédigé sur une copie séparée

La rédaction et la présentation seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

On étudie la population d'une région imaginaire.

Le 1^{er} janvier 2013, cette région comptait 300 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1^{er} janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n .
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b , les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Calculer PQ et QP . En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q .
 - b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
 - c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6} (1 + 5 \times 0,94^n) v_0 + \frac{1}{6} (1 - 0,94^n) c_0.$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

EXERCICE 4

5 points

1. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n$ et $c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$

Les réels c et d tels que $A \times X = Y$ sont : $c = 0,95a + 0,01b$ et $d = 0,05a + 0,99b$

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = (v_n c_n)$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

3. a. $P \times Q : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \left| \quad Q \times P : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right. \quad PQ = QP = (6I_2) \text{ donc } P^{-1} = \frac{1}{6} Q .$

b. $P^{-1}AP = \frac{1}{6}QAP$; $QA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix}$; $(QA)P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix} = D$ qui est bien diagonale.

c. Démontrons, par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : $P^{-1}AP = D$, donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_2AI_2 = A$ c'est vrai pour $n = 1$;

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel n on ait $A^n = PD^nP^{-1}$, alors :

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettant d'établir que : $v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n)v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n)c_0$,
et comme la suite géométrique $(0,94^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 0.94 tend vers 0 (car $-1 < 0.94 < 1$), alors
la suite $(v_n) \rightarrow \frac{1}{6}(v_0 + c_0) = 50000$ et la suite $(c_n) \rightarrow \frac{5}{6}(v_0 + c_0) = 250000$