

Partie A Cours

Citer les théorèmes de Bézout et de Gauss.

Partie B une équation diophantienne

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7; -3)$ est solution de (E).
2. Démontrer que les solutions de (E) sont les couples de la forme $(-7 + 26k; -3 + 11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u; v)$ solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

Partie C le code secret

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 par un nombre y lui aussi entre 0 et 25 de la façon suivante : y est le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26.

On dit alors que x est « codé » par y .

Ainsi, par exemple, la lettre D est assimilée au nombre 3 et $11 \times 3 + 8 = 41$

or $41 = 26 \times 1 + 15$ donc 15 est le reste de la division euclidienne de 41 par 26.

Au nombre 15 correspond la lettre P. La lettre D est donc codée par la lettre P.

1. Coder la lettre W.

Le but des questions suivantes est de déterminer la fonction de décodage.

2. En utilisant **B.3.**, montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et z , on a :

$$11x \equiv z \pmod{26} \quad \text{équivaut à} \quad x \equiv 19z \pmod{26}.$$

3. Soit deux entiers x et y tels que $0 \leq x \leq 25$ et $0 \leq y \leq 25$.

Déduire de **C.2.** l'équivalence des deux propositions suivantes :

- y est le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26.
- x est le reste de la division euclidienne de $19y + 4$ par 26.

4. Décoder la lettre W.