

1. Soit  $n$  un entier naturel quelconque. (libre choix de la méthode)

1.1. Prouver que  $a = n(n^2 - 1)$  est un multiple de 6.

1.2. Prouver que  $b = n(5n^2 + 1)$  est divisible par 6.

1.3. Prouver que  $c = n(2n + 1)(n + 1)$  est congru à 0 modulo 6.

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  on a :  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$

En déduire le reste de la division euclidienne de  $2^{2012}$  par 7.

3. Soit l'équation (E) :  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$

où  $n$  est un entier naturel non nul donné et  $x$  et  $y$  des entiers naturels.

3.1. Montrer que  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .

En déduire que si  $(x ; y)$  est solution de (E) alors  $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .

3.2. Reproduire et compléter le tableau des restes des divisions euclidiennes :

de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
de $3x^2$ par 7							

3.3. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7 (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ )

(on pourra raisonner par disjonction en trois cas selon la valeur de  $n$ )

En conclure que l'équation (E) n'a pas de solution (dans  $\mathbb{N}$ ).

1.

1.1.  $a = (n - 1)n(n + 1)$  or parmi 3 entiers consécutifs il y a toujours un multiple de 2 et un multiple de 3 donc  $a$  est bien multiple de 6.

1.2. Si  $n$  est pair, alors  $b$  est pair et si  $n$  est impair  $5n^2 + 1$  donc  $b$  est pair.

Si  $n = 3k$ ,  $b$  est divisible par 3,

sinon  $n \equiv 1$  ou  $n \equiv -1 \pmod{3}$  et alors

$n^2 \equiv 1$  donc  $5n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$  donc

$b$  est divisible par 3 et donc par 6.

1.3.  $n(n+1)$  est toujours pair ; de plus soit  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,

soit  $n \equiv 1 \pmod{3}$  alors  $2n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

soit  $n \equiv 2 \pmod{3}$  alors  $(n + 1) \equiv 0 \pmod{3}$

donc  $c$  est divisible par 2 et par 3

donc par 6. Soit  $c \equiv 0 \pmod{6}$ .

Ou par tableau de congruence

$n$	0	1	2	3	4	5
$n^2$	0	1	4	3	4	1
$n^2 - 1$	5	0	3	2	3	0
$5n^2 + 1$	1	0	3	4	3	0
$2n + 1$	1	3	5	1	3	5
$n + 1$	1	2	3	4	5	0
$a$	0	0	6	6	12	0
$b$	0	0	6	12	12	0
$c$	0	6	30	12	60	0

2.  $\forall k \in \mathbb{N}, 2^{3k} = 8^k$  or  $8 \equiv 1$  donc  $8^k \equiv 1^k \pmod{7}$  soit  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$   
 $2^{2012} = 8^{670} * 4$  or  $8^{670} \equiv 1$  donc  $2^{2012} \equiv 4 \pmod{7}$

3.

3.1.  $100 = 7*14 + 2$  donc  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .

$3x^2 + 7y^2 \equiv 3x^2$  et  $10^{2n} = 100^n$  d'où  $10^{2n} \equiv 2^n \pmod{7}$

d'où  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \Rightarrow 3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$

3.2. Restes des divisions euclidiennes :

de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
de $3x^2$ par 7	0	3	5	6	6	5	3
car $3x^2 \equiv$	0	3	12	27	48	75	108

3.3.  $2^1 \equiv 2 ; 2^2 \equiv 4 ; 2^3 \equiv 1$ . Dès lors le résultat est cyclique :

$2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k = 1 ; 2^{3k+1} = 2*2^{3k} \equiv 2 ; 2^{3k+2} = 4*2^{3k} \equiv 4 \pmod{7}$

$\forall x \in \mathbb{N}, 3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$  est faux donc (E) n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}$ .