MATHEMATIQUES

Mardi 19 mars 2013

EXERCICE 4 **4442222 = 20 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** 11 et 7 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $11u - 7v = 1$. Par ailleurs $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$, le couple $(2\ ;\ 3)$ répond alors à la question.

   $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1 \Leftrightarrow 11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$. Le couple $(10\ ;\ 15)$ est donc une solution particulière de (E).

   b. Soit $(x\ ;\ y)$ une solution de (E), alors $11x - 7y = 11 \times 10 - 7 \times 15$, d'où : $11(x - 10) = 7(y - 15)$.

   7 divise $11(x - 10)$ et est premier avec 11, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x - 10$: il existe donc un entier relatif k tel que $x - 10 = 7k$.

   En remplaçant $x - 10$ par $7k$ dans (1), puis en simplifiant, on en déduit que $y - 15 = 11k$.

   Ainsi, si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors nécessairement $(x\ ;\ y) = (10 + 7k\ ;\ 15 + 11k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Réciproquement, on vérifie aisément que de tels couples sont bien solutions de (E).

   c. Un point de D à coordonnées entières appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si

   $$\begin{cases} 11x - 7y = 5\ ;\ x \in \mathbb{Z}\ ;\ y \in \mathbb{Z} \\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x\ ;\ y) \text{ solution de (E)} \\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \end{cases}$$

   On cherche donc tous les entiers relatifs k tels que $0 \leqslant 10+7k \leqslant 50$ et $0 \leqslant 15+11k \leqslant 50$, ce qui équivaut à $-\dfrac{10}{7} \leqslant k \leqslant \dfrac{50}{7}$ et $-\dfrac{15}{11} \leqslant k \leqslant \dfrac{35}{11}$. Les seules valeurs possibles de k sont -1, 0, 1, 2 et 3.

   Il y a donc cinq points de $\mathscr{C}$ donc les coordonnées sont entières :

   $$A(3\ ;\ 4) \quad B(10\ ;\ 15) \quad C(17\ ;\ 26) \quad D(24\ ;\ 37) \quad E(31\ ;\ 48).$$

2. **a.** On calcule modulo 5 :

$x \equiv$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1

$y \equiv$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv$	0	2	3	3	2

   Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont donc 0, 1 et 4.

   De même, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 et 3.

   b. $11x^2 - 7y^2 = 5$ donc $11x^2 - 7y^2 \equiv 0[5] \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow x^2 \equiv 2y^2\ [5]$

   et $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$ n'est possible, d'après les tableaux **2.a.** que si $x \equiv 0\ [5]$ et $y \equiv 0\ [5]$, c'est-à-dire si x et y sont des multiples de 5.

3. Supposons que x et y sont deux entiers multiples de 5. Alors il existe des entiers a et b tels que $x = 5a$ et $y = 5b$. En « réinjectant » cela dans l'équation (F) on a alors : $11 \times 25a^2 - 7 \times 25b^2 = 5$, c'est-à-dire $25(11a^2 - 7b^2) = 5$, ce qui est impossible (5 n'est pas multiple de 25 !). L'équation (F) ne possède donc aucune solution.