

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Cet exercice devra être rédigé sur une feuille indépendante, à remettre séparément

1. On considère l'équation (E) :  $11x - 7y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs  $(u ; v)$  tels que  $11u - 7v = 1$ . Trouver un tel couple et en déduire une solution particulière de l'équation (E).
  - b. Résoudre l'équation (E).
  - c. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  
 $D$  est la droite d'équation cartésienne :  $11x - 7y - 5 = 0$ ,  
 $\mathcal{C}$  est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan tels que  $0 \leq x \leq 50$  et  $0 \leq y \leq 50$ .  
 Déterminer le nombre de points de la droite  $D$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{C}$  et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. On considère l'équation (F) :  $11x^2 - 7y^2 = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Soient  $x$  et  $y$  des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux de congruence modulo 5 :

|              |   |   |   |   |   |
|--------------|---|---|---|---|---|
| $x \equiv$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $x^2 \equiv$ |   |   |   |   |   |

|               |   |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|---|
| $y \equiv$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $2y^2 \equiv$ |   |   |   |   |   |

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de  $x^2$  et de  $2y^2$  par 5 ?

- b. Démontrer que si le couple  $(x ; y)$  est solution de (F), alors  $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ .  
 En déduire qu'alors  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si  $x$  et  $y$  sont des multiples de 5, alors le couple  $(x ; y)$  n'est pas solution de (F).  
 Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?