

1. Soit les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1.1. Expliquer pourquoi l'un des produits AB ou BA n'est pas défini et calculer l'autre en détaillant les calculs.

1.2. Rappeler la définition de l'inverse d'une matrice carrée.  
Vérifier que C est l'inverse de B.

1.3. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice carrée et  $N = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$  son inverse.

Prouver que w, x, y, z sont les solutions des systèmes :

$$S1 = \begin{cases} aw + by = 1 \\ cw + dy = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S2 = \begin{cases} ax + bz = 0 \\ cx + dz = 1 \end{cases}$$

En déduire que  $M^{-1}$  existe si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ .

2.

2.1. Soit le système linéaire d'inconnues x, y, z :  $S = \begin{cases} 3x + 2y + 4z = 67 \\ 2x + y + 2z = 36 \\ x + 3y + 3z = 59 \end{cases}$

a. Déterminer une matrice carrée M, d'ordre 3 et une matrice colonne D telles que le système S soit équivalent à l'équation matricielle :  $MX = D$ .  
où X est une matrice colonne, transposée de la matrice ligne  $(x \ y \ z)$ .

b. Exprimer (en le justifiant) la matrice X en fonction de D et de  $M^{-1}$ .

c. Déterminer  $M^{-1}$  à l'aide de la calculatrice et résoudre le système S.

2.2. Une usine fabrique chaque jour trois produits X, Y, Z à partir de pièces de modèle A, B, C.

Le nombre de pièces nécessaires à la fabrication de ces produits est donné dans le tableau suivant :

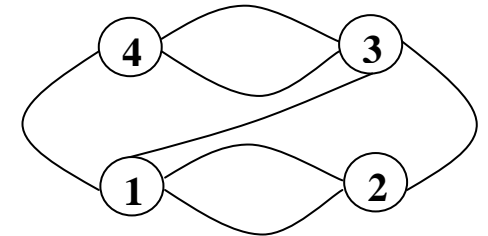
	X	Y	Z
A	3	2	4
B	2	1	2
C	1	3	3

La production journalière s'écrit sous forme d'une matrice colonne  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   
où x (resp y, z) représente le nombre de produits X (resp Y, Z) fabriqués.  
P s'appelle le "Programme de Production" du jour considéré.

a. Ecrire un produit de matrices pour calculer, le nombre de pièces de chaque modèle nécessaire à un programme de production  $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b. On dispose ce jour d'un stock de 67 pièces A, 63 pièces B, 59 pièces C.  
On cherche le programme de production qui épuisera ce stock.  
Expliquer comment on peut déduire la réponse de la partie 2.1.  
Et conclure.

3. Le graphe ci-contre représente sept pistes de ski de fond reliant quatre sommets notés 1, 2, 3, 4. Chaque piste mesure 2 km.



3.1. Ecrire la matrice M carrée d'ordre 4 dont le coefficient  $m_{i,j}$  est égal au nombre de pistes reliant les sommets i et j.  
Calculer  $M^2$ ,  $M^3$  à l'aide de la calculatrice.

3.2. On suppose que le nombre de circuits reliant les sommets i et j, en parcourant n pistes est donné par le terme  $m_{i,j}(n)$  placé sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $M^n$ .

Déduire de 3.1. le nombre de circuit :

(on peut passer plusieurs fois par le même sommet) :

- de 4 km, reliant ① et ③
- de 6 km, reliant ③ et ③.
- d'au plus 6 km, reliant ④ et ①.
- Comment trouver le nombre de circuits de 8 km, reliant ② et ② ?

**1. 2+2+3 = 7**

**1.1.** AB impossible car A a 3 colonnes et B a 2 lignes.  $BA = \begin{pmatrix} 7 & 20 & -18 \\ 1 & 14 & -13 \end{pmatrix}$

**1.2.**  $M^{-1}$  est l'inverse de M ssi  $M.M^{-1} = M^{-1}.M = \text{Id}$  (carrées de même ordre).

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } CB = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1.3.} \quad MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aw + by = 1 \\ cw + dy = 0 \\ ax + bz = 0 \\ cx + dz = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{a}{\delta}, y = \frac{-c}{\delta}, x = \frac{-b}{\delta}, z = \frac{d}{\delta} \text{ avec } \delta = ad - bc$$

De même pour NM. Donc  $M^{-1}$  existe si et seulement si  $\delta = ad - bc \neq 0$ .

**2. 1+1+2+2+1 = 7**

**2.1.**

**a.** Avec  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 67 \\ 36 \\ 59 \end{pmatrix}$ ,  $S \Leftrightarrow MX = D$ .

**b.**  $M.X = D \Leftrightarrow M^{-1}MX = M^{-1}D \Leftrightarrow X = M^{-1}D$ .

**c.**  $M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$  d'où  $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

**2.2.**

**a.** En appelant N la matrice donnant le nombre de pièces A, B, C nécessaires et en utilisant la matrice M du **2.1.** on écrit :  $N = M.P$ .

Pour  $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  on obtient  $N = \begin{pmatrix} 50 \\ 27 \\ 40 \end{pmatrix}$

**b.** Cette fois  $N = D$  et on cherche P tel que  $MP = D$  soit  $P = M^{-1}D$  (cf **2.1.**)

Donc  $x = 5, y = 10, z = 8$ .

**3. 2+4 = 6**

$$\mathbf{3.1.} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \underline{1} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ \underline{1} & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; A = M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & \underline{2} \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \\ \underline{2} & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; B = M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 11 & \underline{14} \\ 16 & 4 & 14 & 5 \\ 11 & 14 & 8 & 16 \\ \underline{14} & 5 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

**3.2.** Le nombre de circuits de longueur  $2n$  (en km) reliant les sommets  $i$  et  $j$  est donné par le terme  $a_{i,j}$  de la matrice  $M^n$ .

**a.**  $a_{1,3} = 4$  donc il y a 4 circuits de 4 km, reliant ① et ③.

**b.**  $b_{3,3} = 8$  donc il y a 8 circuits de 6 km, reliant ③ et ③.

**c.** il y a  $m_{4,1} + a_{4,1} + b_{4,1} = 17$  circuits d'au plus 6 km, reliant ④ et ①.

**d.**  $C = M^4$  et  $c_{2,2} = 1^2 + 5^2 + 2^2 + 4^2 = 46$  circuits de 8 km, reliant ② et ②.