Ds1 : 1h	MATHEMATIQUES	14/10/2013

Barème possible : 4+8+8

1. VRAI-FAUX (on note D.E. la division euclidienne)
Répondre par V ou F puis justifier votre réponse sur votre copie.

A. Dans la D.U.de 1600 par 93, le quotient est 17 et le reste 19.	
B. Le reste de la D.E. de 27359 par 237 est 104.	
C. L'égalité 9552 = 251 x 37 + 265 traduit une D.E.	
D. Pour tout entier naturel N non nul, il y a exactement n valeurs possibles pour le reste dans la D.E. de N par n.	

2. Soit a, b, c, d des entiers relatifs, n et p des naturels non nuls.

2.1. Restitution organisée de connaissance
Montrer que si $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$ alors $ac \equiv bd \pmod n$.

2.2. En déduire par récurrence que si $a \equiv b \pmod n$ alors $a^p \equiv b^b \pmod n$

2.3. Démontrer que pour tout entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ [mod 7]
En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{2012} par 7.

3. ***Dans ces exercices toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.***

3.1. Trouver tous les multiples de 7 dans l'ensemble des entiers naturels de quatre chiffres dont ceux des dizaines et des centaines sont nuls.
Ces nombres s'écrivent donc en base 10 : $\overline{a00b}$ avec $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$.

3.2. Soit un triangle rectangle dont les côtés ont des mesures entières.
Prouver que l'un de ces trois nombres est un multiple de 5.

Ds1co : 1h	MATHEMATIQUES	14/10/2013

Barème possible : 4+332+44

1.

A. $1600 = 93 \times 17 + 19$ et $0 \leq 19 < 93$	**V**
B. $27359 = 237 \times 115 + 104$ et $0 \leq 104 < 115$	**V**
C. $265 > 251$ et $265 > 37$	**F**
D. les n entiers naturels strictement inférieurs à n $\{0, 1, \ldots, n-1\}$	**V**

2.

2.1. Si $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$, alors il existe des entiers k et k' tels que $a = b + kn$ et $c = d + k'n$ d'où $ac = bd + (kd + k'b + kk'n)n$ et donc $ac \equiv bd \pmod n$.

2.2. **Init :** trivial pour p = 1. **Héréd :** si $[a \equiv b \pmod n \Rightarrow a^p \equiv b^b \pmod n]$
alors d'après 2.1. $a \equiv b \Rightarrow a.a^p \equiv b.b^p$ donc $a^{p+1} \equiv b^{p+1}$.
Concl : I et H donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $[a \equiv b \pmod n \Rightarrow a^p \equiv b^b \pmod n]$

2.3. $\forall k \in \mathbb{N}$, $2^{3k} = 8^k$ or $8 \equiv 1$ donc $8^k \equiv 1^k$ [mod 7] soit $\mathbf{2^{3k} \equiv 1}$ [mod 7]
$2^{2012} = 8^{670} * 4$ or $8^{670} \equiv 1$ donc $\mathbf{2^{2012} \equiv 4}$ [mod 7]

3. ***Recherche libre***

3.1. $1000 = 7*143 - 1 \equiv -1$ [mod 7].
$\forall n \in N$: $n = 1000a + b$ donc $n \equiv b - a$ [mod 7] soit $b - a \in \{7 ; 0 ; -7\}$
Les nombres de N divisibles par 7 sont donc :
pour b = a : 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008, 9009,
pour b – a = 7 : 1008, 2009 et pour a – b = 7 : 7000, 8001, 9002.

3.2. Les carrés d'entiers ont un chiffre des unités égal à 0, 1, 4, 5, 6, 9.
Or l'addition de deux nombres terminés par 1, 4, 6, 9 est un nombre terminé par 0, 5 ou par 2, 3, 7, 8
et 2, 3, 7, 8 ne terminent jamais un carré d'entier.