Barème possible : 331333+13

Un appartement est formé de deux pièces A et B reliées entre elles par une porte ouverte ; seule la pièce B possède une fenêtre ouverte. Une guêpe qui s'était endormie dans la pièce A se réveille à l'instant 0.

On estime que :

- Si la guêpe est dans la pièce A à l'instant n, (en minutes) elle est encore dans la pièce A une minute après avec une probabilité 1/3.
- Si la guêpe est dans la pièce B à l'instant n, une minute après elle y est encore avec une probabilité 1/2 et elle est revenue dans la pièce A avec une probabilité 1/4.

1. Dans cette question, si la guêpe est sortie, elle ne revient plus.

1.1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

1.2. Déterminer la matrice de transition M de cette marche aléatoire, les états A "la guêpe est en A", B "la guêpe est en B" et C "la guêpe est sortie" étant pris dans l'ordre alphabétique.

1.3. Soit $(a_n \;\; b_n \;\; c_n)$ l'état probabiliste de cette marche aléatoire à l'instant n. On note $X_n = (a_n \;\; b_n)$. Déterminer la matrice Q telle que $X_{n+1} = X_n \times Q$

1.4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $Q^n = \frac{1}{10}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\times\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

1.5. En déduire la probabilité p que la guêpe soit sortie de l'appartement n minutes après son réveil.

1.6. Au bout de combien de temps cette probabilité est-elle supérieure à 0.999 ?

2. Dans cette question, si la guêpe est sortie, elle revient dans la pièce B avec une probabilité de 0.1.

2.1. Que devient la matrice de transition ?

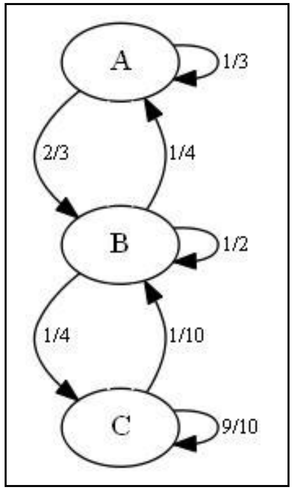
2.2. Montrer que cette marche aléatoire possède un état stable. L'interpréter.

Ds6 : 1h MATHEMATIQUES 27/05/2013

Barème possible : 331333+13

1.

1.1. --→



1.2. $M = \begin{pmatrix}\mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{12}\end{pmatrix}$

1.3. $Q = \begin{pmatrix}\mathbf{1/3} & \mathbf{2/3}\\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2}\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{8}\\ \mathbf{3} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$

1.4. Par récurrence :

Initialisation : vrai pour n=1 car $\frac{1}{10}\times\frac{5}{6} = \frac{1}{12}$

Hérédité : (HR) $= Q^n = \frac{1}{10}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\times\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ alors

$Q^{n+1} = \frac{1}{120}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\times\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}^2 = \frac{1}{120}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\times\begin{pmatrix}40 & 80\\ 30 & 60\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\times\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

Propriété initialisée et héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\; Q^n = \frac{1}{10}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\times\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

1.5. $X_0 = (1 \;\; 0)$ et $X_{n+1} = X_n \times Q$ donc $X_n = (1 \;\; 0)\, Q^n$

donc $a_n + b_n = \frac{1}{10}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n(4+8) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ et $\mathbf{p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$

1.6. $p > 0.999 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < 0.001 \Leftrightarrow n > 1 + \ln(0.001)/\ln(5/6) \approx 38.88$ **: n = 39**

2.

2.1. $M = \begin{pmatrix}\mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1/10} & \mathbf{9/10}\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{60}}\begin{pmatrix}\mathbf{20} & \mathbf{40} & \mathbf{0}\\ \mathbf{15} & \mathbf{30} & \mathbf{15}\\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{54}\end{pmatrix}$

2.2. Soit $X = (a \;\; b \;\; c)$ l'éventuel état stable ; X vérifie : $X = X\times M$, soit :

$$\boxed{\begin{cases}8a = 3b\\ 2c = 5b\\ a+b+c = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{a = 3/31}\\ \mathbf{b = 8/31}\\ \mathbf{c = 20/31}\end{cases}}$$

Au bout d'un certain temps il y aura : 20 chances sur 31 que la guêpe soit sortie, 8 sur 31 qu'elle soit en B et 3 sur 31 qu'elle soit en A.