Ds4co : 1h	MATHEMATIQUES	12/03/2013

Barème possible : 234+24+346 = 28

1. 2+3+4 = 9

1.1. 1+1 = 2

a. Avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$, $S \Leftrightarrow AX = D$.

b. $A.X = D \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}D \Leftrightarrow X = A^{-1}D$

1.2. 1+2 = 3

a. B est l'inverse de A signifie que : AB = BA = I

b. $AA^{-1} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aw + by = 1 \\ ax + bz = 0 \\ cw + dy = 0 \\ cx + dz = 1 \end{cases}$

Ce système a une solution unique ssi $ad - bc \neq 0$

$w = \dfrac{d}{ad - bc}$; $x = \dfrac{-b}{ad - bc}$; $y = \dfrac{-c}{ad - bc}$; $z = \dfrac{a}{ad - bc}$

De même avec $A^{-1}A = I$

1.3. 2+2 = 4

a. $S = \begin{cases} x + y = 25 \\ 255x + 65y = 3335 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 255 & 65 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 25 \\ 3335 \end{pmatrix}$

b. A est inversible car $65 - 255 \neq 0$. $A^{-1} = -\dfrac{1}{190}\begin{pmatrix} 65 & -1 \\ -255 & 1 \end{pmatrix}$.

d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{190}\begin{pmatrix} 65 & -1 \\ -255 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 25 \\ 3335 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$

On a vendu 9 consoles et 16 jeux.

2. 2+4 = 6

2.1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A = M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 8 & 9 \\ 15 & 4 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 6 & 6 \\ 9 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

2.2. Le nombre de circuits de longueur 2n (en km) reliant les sommets i et j est donné par le terme $a_{i,j}$ de la matrice M^n.

a. $a_{1,3} = 3$ donc il y a 3 circuits de 4 km, reliant ① et ③.

b. $b_{3,3} = 4$ donc il y a 4 circuits de 6 km, reliant ③ et ③.

c. il y a $m_{4,1} + a_{4,1} + b_{4,1} = 11$ circuits d'au plus 6 km, reliant ④ et ①.

d. $C = M^4$ et $c_{2,2} = 39$ donc il y a 39 circuits de 8 km, reliant ② et ②.

3. 3+4+6 = 13

3.1. $J = A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\mathbf{J^2 = 3J}$ **et** $\mathbf{JI = IJ = J}$ **: ok.**

$\mathbf{A^2} = J^2 - 2IJ - 2JI + 4I = \mathbf{4I - J}$ et $\mathbf{A^3} = 4J - 8I - J^2 + 2J = \mathbf{3J - 8I}$.

3.2. Par récurrence : Init : $A = J - 2I$

Héréd : SQPUC n FMQ on ait $A^n = u_nI + v_nJ$ alors $A^{n+1} = -2u_nI + (u_n + v_n)J$

soit $A^{n+1} = u_{n+1}I + v_{n+1}J$ avec $u_{n+1} = -2u_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$

Concl : $\forall$**n>0,** $\mathbf{A^n = u_nI + v_nJ}$ **avec** $\mathbf{u_{n+1} = -2u_n}$ **et** $\mathbf{v_{n+1} = u_n + v_n}$**.**

Prouvons par récurrence que $\forall n>0$, $u_n + v_n = 1 - 2v_n$. Init : $-2 + 1 = 1 - 2*1$

Héréd : SQPUC n FMQ on ait $u_n + v_n = 1 - 2v_n$ alors : $u_n = 1 - 3v_n$ et

$u_{n+1} + v_{n+1} = -2u_n + (u_n + v_n) = -2u_n + 1 - 2v_n = 1 - 2(u_n + v_n) = 1 - 2v_{n+1}$

Concl : $\forall$**n>0,** $\mathbf{u_{n+1} = -2u_n}$ **et** $\mathbf{v_{n+1} = u_n + v_n = 1 - 2v_n}$**.**

3.3.

a. $u_n = (-2)^n$ et $v_n = \dfrac{1 - u_n}{3} = \dfrac{1 - (-2)^n}{3}$ et $\mathbf{A^n = (-2)^nI + \dfrac{1 - (-2)^n}{3}J}$

b. Si n = 0, $A^0 = 1.I + 0.J = I$ et si n = -1 : $A^{-1} = (-I + J)/2$

on vérifie que $(J + 2I)(J - I)/2 = I$ donc A^{-1} est bien l'inverse de A.

c. $A^nA^{-n} = \left((-2)^nI + \dfrac{1 - (-2)^n}{3}J\right)\left((-2)^{-n}I + \dfrac{1 - (-2)^{-n}}{3}J\right) = I$.

On peut donc généraliser à $n \in \mathbb{Z}$. A^n et A^{-n} sont inverses l'une de l'autre.

Complément : généralisation de : $\forall M$, MI = IM = M :

Soit $MA = N = (n_{ij})$: $n_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} m_{ik}a_{kj}$. Et avec $a_{kj} = 0$ si $k \neq j$ et $a_{jj} = 1$

le seul terme non nul de la somme est pour k = j soit $m_{ij}a_{jj} = m_{ij}$

donc $\forall i,j$ $n_{ij} = m_{ij}$ d'où N = MI = M ; de même IM = M.