

1.

1.1.  $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$  étant des réels donnés, soit le système linéaire d'inconnues  $x, y, z$  :  $S = \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

a. Déterminer une matrice carrée  $A$ , d'ordre 3 et une matrice colonne  $D$  telles que le système  $S$  soit équivalent à l'équation matricielle :  $AX = D$ , où  $X$  est la transposée de la matrice ligne  $(x \ y \ z)$ .

b. Si  $A$  est inversible, exprimer la matrice  $X$  en fonction de  $D$  et de  $A^{-1}$ .

1.2.

a. Rappeler la définition de l'inverse d'une matrice carrée.

b. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice carrée et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$  son inverse.

Prouver que  $A^{-1}$  existe si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ .

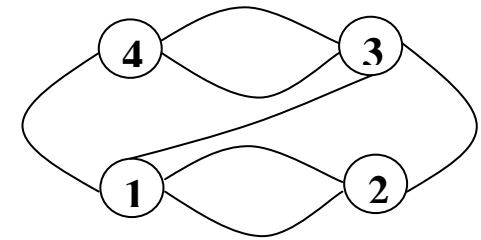
(on pourra résoudre un système linéaire d'inconnues  $w, x, y, z$ )

1.3. Un magasin vend des consoles de jeux à 255€ l'une et des jeux à 65€ l'un. A la fin de la journée 25 articles ont été vendus pour une recette de 3335 €. On appelle  $x$  le nombre de consoles et  $y$  le nombre de jeux vendus.

a. Déterminer une matrice carrée  $A$ , d'ordre 2 et une matrice colonne  $B$  telles que ces conditions soit équivalentes à l'équation matricielle :  $AX = B$ , où  $X$  est la transposée de la matrice ligne  $(x \ y)$ .

b. Prouver que  $A$  est inversible. Calculer  $A^{-1}$  à l'aide d'une calculatrice. En déduire le nombre de consoles et le nombre de jeux vendus.

2. Le graphe ci-contre représente sept pistes de ski de fond reliant quatre sommets notés 1, 2, 3, 4. Chaque piste mesure 2 km.



2.1. Ecrire la matrice  $M$  carrée d'ordre 4 dont le coefficient  $m_{i,j}$  est égal au nombre de pistes reliant les sommets  $i$  et  $j$ . Calculer  $M^2, M^3$  à l'aide de la calculatrice.

2.2. En déduire le nombre de circuit (on peut passer plusieurs fois par le même sommet) :

a. de 4 km, reliant ① et ③.

b. de 6 km, reliant ③ et ③.

c. d'au plus 6 km, reliant ④ et ①.

d. Comment trouver le nombre de circuits de 8 km, reliant ② et ② ?

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = A + 2I$ .

3.1. Ecrire  $J$ , vérifier que  $J^2 = 3J$  et prouver que  $JI = IJ = J$ . Ecrire  $A^2$  en fonction de  $I$  et  $J$  et vérifier que  $A^3 = 3J - 8I$ .

3.2. Expliquer pourquoi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  s'écrit :  $u_n I + v_n J$  où  $u_n$  et  $v_n$  sont des réels ne dépendant que de  $n$ . Prouver par récurrence que  $\forall n > 0, u_{n+1} = -2u_n$  et  $v_{n+1} = 1 - 2v_n$ .

3.3. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation

a. Ecrire  $A^n$  en fonction de  $n$  et des matrices  $I$  et  $J$ .

b. Expliquer comment utiliser ces résultats pour trouver l'inverse de  $A$ .

c. Peut-on généraliser ces résultats à  $n \in \mathbb{Z}$ .