

Terminales S spé - DS2 corrigé
❧ MATHEMATIQUES ❧
Mardi 4 décembre 2012

Partie A Restitution organisée de connaissance

si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$, alors il existe des entiers k et k' tels que $a = b + kn$ et $c = d + k'n$
d'où $ac = bd + (kd + k'b + kk'n)n$ et donc $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Partie B

1. $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1$, donc le couple $(-7; -3)$ est solution de (E).
2. – Soit $(x; y)$ une solution de (E), alors $11x - 26y = 1$ or $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = 1$ d'après la question B.1.
Donc $11x - 26y = 11 \times (-7) - 26 \times (-3)$. On en déduit que $11(x+7) = 26(y+3)$.
Ainsi 26 divise $11(x+7)$, or 26 et 11 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :
26 divise $x+7$. Il existe donc un entier relatif k tel que $x+7 = 26k$, c'est-à-dire $x = -7 + 26k$.
On a alors $11 \times 26k = 26(y+3)$, d'où, en divisant par 26 : $11k = y+3$, d'où $y = -3 + 11k$.
Ainsi, si $(x; y)$ est solution de (E), il existe un entier k tel que $(x; y) = (-7 + 26k; -3 + 11k)$.
– Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions de (E) ;
en effet : $11 \times (-7 + 26k) - 26 \times (-3 + 11k) = -77 + 286k + 78 - 286k = 1$.
– En conclusion, les solutions de (E) sont les couples de la forme $(-7 + 26k; -3 + 11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(u; v)$ est solution de (E) avec $0 \leq u \leq 25$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que :
 $u = 26k - 7$, $v = 11k - 3$ et $0 \leq -7 + 26k \leq 25$. donc $7 \leq 26k \leq 32$.
 $k = 1$ est la seule possibilité, donc l'unique couple répondant à la question est $(19; 8)$: $11 * 19 - 26 * 8 = 1$.

Partie C

1. La lettre W est chiffrée par $x = 22$. Or $11 \times 22 + 8 \equiv 16 \pmod{26}$, donc $y = 16$ qui correspond à la lettre Q.
2. a. – Soit x et j deux entiers relatifs tels que $11x \equiv j \pmod{26}$.
Alors, en multipliant par 19 on a : $19 \times 11x \equiv 19j \pmod{26}$.
Or d'après B.3. $19 \times 11 = 26 \times 8 + 1$ soit $209 \equiv 1 \pmod{26}$, donc $x \equiv 19j \pmod{26}$.
– Réciproquement, si $x \equiv 19j \pmod{26}$, alors, en multipliant par 11 on a : $11x \equiv 11 \times 19j \pmod{26}$,
d'où $11x \equiv j \pmod{26}$. L'équivalence est ainsi démontrée.
b. Soit y un entier de $[0; 25]$, on cherche un entier (unique) x de $[0; 25]$ tel que : $11x + 8 \equiv y \pmod{26}$.
On sait que : $11x \equiv y - 8 \pmod{26}$, $\Leftrightarrow x \equiv 19(y - 8) \pmod{26}$ d'après la question C.2.a.
Or $19 \times (-8) \equiv 4 \pmod{26}$, donc $11x \equiv y - 8 \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 19y + 4 \pmod{26}$
Ainsi " y est le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26"
équivalent à : " x est le reste de la division euclidienne de $19y + 4$ par 26"
Pour tout y on peut donc retrouver un x (antécédent) unique.
D'autre part la fonction de codage est telle que chaque x donne un y unique.
Donc deux y distincts ne peuvent provenir du même x .
Le décodage est donc possible par le procédé suivant :
– on chiffre la lettre à décoder par un nombre entier y compris entre 0 et 25 ;
– on calcule le reste x de la division euclidienne de $19y + 4$ par 26 ;
– on déchiffre alors x pour obtenir la lettre décodée.
c. W est chiffré par $y = 22$. Or $19 \times 22 + 4 \equiv 6 \pmod{26}$, donc $x = 6$, ce qui correspond à la lettre G.