

Terminales S spé - DS2  
❧ MATHEMATIQUES ❧  
Mardi 4 décembre 2012

**Partie A Restitution organisée de connaissance**

Soit  $a, b, c, d$  des entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul.

Montrer que si  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $c \equiv d \pmod{n}$  alors  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .

**Partie B une équation diophantienne**

On considère l'équation (E) :  $11x - 26y = 1$ , où  $x$  et  $y$  désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple  $(-7; -3)$  est solution de (E).
2. Démontrer que les solutions de (E) sont les couples de la forme  $(-7 + 26k; -3 + 11k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .
3. En déduire le couple d'entiers relatifs  $(u; v)$  solution de (E) tel que  $0 \leq u \leq 25$ .

**Partie C le code secret**

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier  $x$  compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule  $11x + 8$
- on calcule le reste de la division euclidienne de  $11x + 8$  par 26, que l'on appelle  $y$ .

$x$  est alors « codé » par  $y$ .

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ;  $11 \times 11 + 8 = 129$  or  $129 \equiv 25 \pmod{26}$  ; 25 est donc le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.

La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
  - a. En utilisant **B.3.**, montrer que pour tous nombres entiers relatifs  $x$  et  $j$ , on a :

$$11x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 19j \pmod{26}.$$

- b. En déduire un procédé de décodage.
- c. Décoder la lettre W.