

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  on a :  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$   
En déduire le reste de la division euclidienne de  $2^{2012}$  par 7.

2. Soit l'équation (E) :  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$   
où  $n$  est un entier naturel non nul donné et  $x$  et  $y$  des entiers relatifs.

- 2.1. Montrer que  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .

En déduire que si  $(x ; y)$  est solution de (E) alors  $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .

- 2.2. Reproduire et compléter le tableau des restes des divisions euclidiennes :

|                 |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|---|
| de $x$ par 7    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| de $3x^2$ par 7 |   |   |   |   |   |   |   |

- 2.3. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7 (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

- 2.4. Conclure pour l'équation (E).

3. Dans cet exercice toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit  $N$  l'ensemble des entiers naturels compris entre 1000 et 9009 dont les chiffres des dizaines et des centaines sont égaux à zéro. Ces nombres s'écrivent donc en base 10 :  $a00b$  avec  $1 \leq a \leq 9$  et  $0 \leq b \leq 9$ .

Vérifier que  $1000 \equiv -1 \pmod{7}$  et trouver tous les multiples de 7 dans  $N$ .

1.  $\forall k \in \mathbb{N}, 2^{3k} = 8^k$  or  $8 \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $8^k \equiv 1^k \pmod{7}$  soit  $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$   
 $2^{2012} = 8^{670} * 4$  or  $8^{670} \equiv 1 \pmod{7}$  donc  $2^{2012} \equiv 4 \pmod{7}$

2.

- 2.1.  $100 = 7*14 + 2$  donc  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .

$$3x^2 + 7y^2 \equiv 3x^2 \pmod{7} \text{ et } 10^{2n} = 100^n \text{ d'où } 10^{2n} \equiv 2^n \pmod{7}$$

$$\text{d'où } 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \Rightarrow 3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$$

- 2.2. restes des divisions euclidiennes :

|                   |   |   |    |    |    |    |     |
|-------------------|---|---|----|----|----|----|-----|
| de $x$ par 7      | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6   |
| de $3x^2$ par 7   | 0 | 3 | 5  | 6  | 6  | 5  | 3   |
| car $3x^2 \equiv$ | 0 | 3 | 12 | 27 | 48 | 75 | 108 |

- 2.3.  $2^1 \equiv 2 ; 2^2 \equiv 4 ; 2^3 \equiv 1$ . Dès lors le résultat est cyclique :

$$2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k = 1 ; 2^{3k+1} = 2 * 2^{3k} \equiv 2 ; 2^{3k+2} = 4 * 2^{3k} \equiv 4 \pmod{7}$$

- 2.4.  $\forall x \in \mathbb{N}, 3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$  est faux donc (E) n'a pas de solution.

3.  $1000 = 7*143 - 1 \equiv -1 \pmod{7}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : n = 1000a + b \text{ donc } n \equiv b - a \pmod{7} \text{ soit } b - a \in \{7 ; 0 ; -7\}$$

Les nombres de  $N$  divisibles par 7 sont donc :

pour  $b = a$  : 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008, 9009,

pour  $b - a = 7$  : 1008, 2009 et pour  $a - b = 7$  : 7000, 8001, 9002.