# Problèmes de synthèse (*obligatoire*)

**1** • **A. 1. a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$.

**b)** $f_1'(x) = \dfrac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f_1(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $1-\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $2$ |

**c)** $T_0$ est la tangente au point O et $f_1'(0) = 1$ donc $T_0$ a pour équation $y = x$.

$$f_1(x) - x = 1 - x + \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1-x)[\sqrt{1+x^2} - 1]}{\sqrt{1+x^2}}.$$

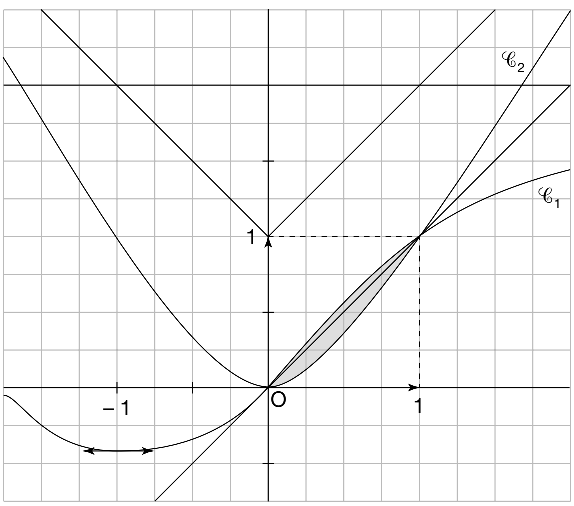
Or pour tout réel $x$, $\sqrt{1+x^2} \geqslant 1$. Donc $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $T_0$ pour $x < 1$.

**2. a)** $f_2(-x) = f_2(x)$ donc $f_2$ est paire.

**b)** $f_2(x) - x - 1 = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} - x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} - x \right) = 0$.

Donc la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$.

**c)** $f_2'(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$




| $x$ | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | $0$ | $+$ | | |
| $f_2(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $+\infty$ |

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

donc si $x$ $]0\,;1[$, $f_1(x) > f_2(x)$

donc $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$.

**B. 1.** Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$ la suite est stationnaire.

**2. a)** Pour tout $x > 1$, $f_1(x) > 1$ (voir tableau) donc si $u_n > 1$, $u_{n+1} > 1$, de plus $u_0 > 1$ donc par récurrence pour tout $u$ de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

**b)** $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n = \dfrac{(u_n-1)}{\sqrt{1+u_n^2}}[1 - \sqrt{1+u_n^2}]$

$u_n > 1$, $1 - \sqrt{1+u_n^2} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c)** La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $\ell$, tel que

$$\ell = 1 + \frac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}}.$$

Il résulte que $\ell = 1$.

**3.** La démonstration est identique à la question précédente et $\ell = 1$.

**C. 1. a)** $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, $v'(x) = 1$ d'où $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

et $v(x) = x$ donc $I = [x\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Il en résulte que $I = \sqrt{2} - J$.

**b)** $J + K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = I$.

D'où $J + K = \sqrt{2} - J$ soit $J = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} - K)$.

**2.** $g'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

donc $K = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$

et $J = \dfrac{1}{2}[\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})]$.

**3.** $\mathcal{A} = 4\left[\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x\right] = 4\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x - 4\mathrm{J}$

$= 4[\sqrt{1+x^2}]_0^1 - 2\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2})$

$= 2\sqrt{2} - 4 + 2\ln(1+\sqrt{2})$.

**2** • **A. 1. a)** $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{(\sqrt{1-x})(x+1)}$

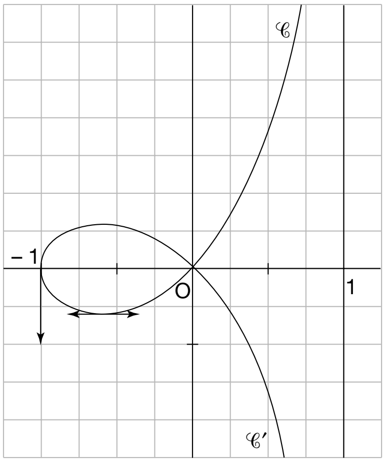
$= \dfrac{x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$

donc $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$.

Ainsi $f$ n'est pas dérivable en $x = -1$.

**b)** $f'(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+2}{1-x}}}$

| $x$ | $-1$ | | $\frac{1}{2}(1\ \sqrt{5})$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $\frac{1}{2}(1\ \sqrt{5})\sqrt{5-2}$ | ↗ | $+\infty$ |




**2. a)** Voir figure.

**b)** $y^2 = \dfrac{x^2(1+x)}{1-x}$ d'où $y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ ou $y = -x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

donc $\Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$.

**B. 1. a)** $\Delta$ a pour équation $y = tx$ et $(\gamma)$ a pour équation $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Donc P a pour coordonnées $(-1\,;-t)$, M a pour coordonnées $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\,;\dfrac{t(t^2-1)}{t^2+1}\right)$ et $\mathrm{Q}\left(\dfrac{-2}{1+t^2}\,;\dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$.

D'où $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\,;\dfrac{t(t^2-1)}{t^2+1}\right)$

donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

**2.** On construit $d$ et $(\gamma)$ et à chaque droite $(\Delta)$ on obtient P et Q. On construit alors M tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

**C. 1.** M a pour coordonnées $(\cos\theta\,;\sin\theta)$ et H a pour abscisse $\cos\theta$ et pour ordonnée $y$ avec $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$ soit $y\sin\theta + \cos\theta(1+\cos\theta) = 0$ d'où

$$y = \frac{-\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

**2.** $y^2(1-x) - x^2(1+x) = 0$ ;

$\dfrac{\cos^2\theta(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}(1-\cos\theta) - \cos^2\theta(1+\cos\theta)$ est égal à $\dfrac{\cos^2\theta(1+\cos\theta)^2(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} - \cos^2\theta(1+\cos\theta) = 0$

donc $\mathrm{H} \in (\Gamma)$.

**3.** Le point B de $(\Gamma)$ n'est pas orthocentre de OMB.

**3** • **A. 1.** $f_n(1) = 0$ et $\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \dfrac{-x^n}{\sqrt{1-x}}$ donc

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f_n(x)}{x-1} = -\infty$ donc $f_n$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

**2. a)** Pour $n \geqslant 1$, $f_n'(n) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} - \dfrac{x^n}{2\sqrt{1-x}}$

$= \dfrac{x^{n-1}[2n - x(2n+1)]}{2\sqrt{1-x}}$.

***n* pair**

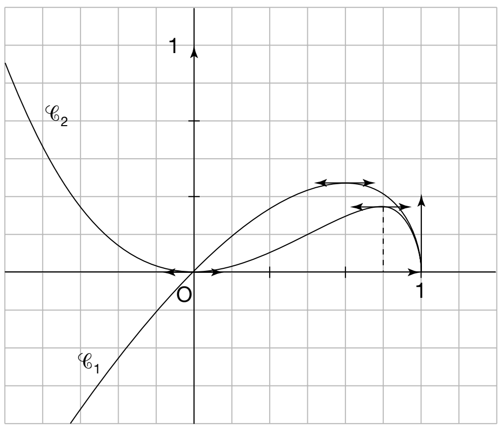
| $x$ | $+\infty$ | | $0$ | | $\frac{2n}{2n+1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f_n(\alpha_n)$ | ↘ | $0$ |

***n* impair**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2n}{2n+1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $f_n(\alpha_n)$ | ↘ | $0$ |

**b)** $f_n'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = \dfrac{2n}{2n+1}$.

**3.** Voir courbes ci-dessous.



**B. 1.** $f_1(x) = x\sqrt{1-x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $0$ |

Si $k > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ pas de solution ;

si $k = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ une solution $x = \frac{2}{3}$ ;

si $0 < k < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ deux solutions telles que $0 < x_1 < x_2 < 1$ ;

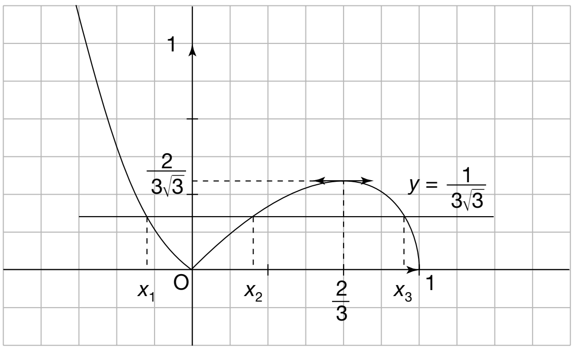
si $k = 0$ deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ ;

si $k < 0$ une seule solution $x_1 < 0$.

**2.** Notons $\varphi$ la fonction $x \mapsto |x\sqrt{1-x}|$. Son tableau de variation est :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\searrow$ | $0$ |

Sa courbe :




Donc d'après le tableau, il existe trois solutions $x_1$, $x_2$, $x_3$ telles que :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0\,;\, 0 < x_2 < +\frac{2}{3} \text{ et } \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

**3.** $-1 < u_1 = \frac{3}{2}\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ ; $-\frac{1}{2} < u_2 = \frac{3}{2}\left(x_2 - \frac{1}{3}\right) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < u_3 = \frac{3}{2}\left(x_3 - \frac{1}{3}\right) < 1$.

D'où l'existence d'un $\theta_i$ unique de $[0\,;\pi]$ pour chaque $u_i$ tel que $u_i = \cos\theta_i$.

**4. a)** $2\cos\theta_i = 3x_i - 1$ donc $x_i = \frac{1}{3}(2\cos\theta_i + 1)$ avec $x_i^2(1 - x_i) = \frac{1}{27}$, donc $(2\cos\theta_i + 1)^2\,(2 - 2\cos\theta_i) = 1$ ou encore $4\cos^3\theta_i - 3\cos\theta_i = \frac{1}{2}$ soit $\cos 3\theta_i = \frac{1}{2}$.

**b)** $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ a pour solution $\theta_1 = \frac{7}{9}\pi$ ; $\theta_2 = \frac{5}{9}\pi$ et $\theta_3 = \frac{\pi}{9}$ donc $[0\,;\pi]$.

Soit $x_1 \approx -0{,}177\,36$ ; $x_2 \approx 0{,}217\,57$ ; $x_3 \approx 0{,}959\,79$.

**C. Calcul d'une intégrale**

**1.** $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x}\,dx$. Or $x - 1 \leqslant 0$ donc $I_{n+1} < I_n$ et la suite $(I_n)$ est décroissante.

De plus $x^n\sqrt{1-x} \geqslant 0$ donc $I_n \geqslant 0$ et la suite $I_n$ est minorée par zéro.

**2. a)** D'après la partie **A.** et les tableaux de variation $f_n(x) \leqslant f_n(\alpha)$ donc $I_n \leqslant \int_0^1 f_n(\alpha_n)\,dx$.

Soit $I_n \leqslant [f_n(\alpha_n)x]_0^1 = f_n(\alpha_n)$.

**b)** $f_n(\alpha_n) = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**3. a)** $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

**b)** $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$ soit $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$.

$$I_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx$$
$$-\frac{2}{3}n\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx.$$

Soit $I_n = \frac{2}{3}nI_{n-1} - \frac{2}{3}nI_n$ ou $(3 + 2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

**c)** Pour $x = 0$, $I_0 = \frac{2^2 1!}{3!} = \frac{2}{3}$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Si $I_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$ alors

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} \times \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

soit $I_{n+1} = \frac{2^{2n+3}(n+1)!(n+1)!2(n+2)}{(2n+3)!(2n+4)(2n+5)}$

$$= \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}.$$

Donc la proposition est vraie pour tout entier naturel $n$.

**4** • **A. 1.** $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}$, elle-même en dessous de $\mathscr{C}_0$.

**2.** $S(x) - S_0(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} \leqslant 0$ et $S(x) - S_1(x) = \frac{\cos x \sin^2 x}{1 - \sin x} \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ en dessous de $\mathscr{C}_0$ donc $S_1(x) \leqslant S(x) < S_0(x)$.

**B. 1. a)** $I_0 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = 1$ ;

$$I_1 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x + \cos x \sin x \, dx$$

$$= \left[\sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \, dx = [-\ln(1 - \sin x)]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \ln 2.$$

**b)** $S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_0(x)$.
Il en résulte que $I_1 \leqslant I \leqslant I_0$.

**2. a)** $I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \sin^{n+1}(x) \, dx$

$$= \left[\frac{1}{n+2} \sin^{n+2} x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

**b)** La proposition est vraie pour $n = 0$ car $I_0 = 1$.

Si $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ alors

$$I_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$

donc la proposition est vraie pour tout entier naturel.

**3. a)** $A_{n+1} - A_n = I_{2n+2} - I_{2n}$

$$= (-1)^{2(n+2)} \left(\frac{1}{2n+23} - \frac{1}{2n+2}\right) < 0$$

donc la suite $(A_n)$ est décroissante. On démontre de même que la suite $(B_n)$ est croissante.

**b)** $A_n - B_n = I_{2n} - I_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n - B_n) = 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes et ont la même limite.

**4. a)** $S(x) - S_n(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x} - \dfrac{\cos x(1 - \sin^{n+1} x)}{1 - \sin x}$

$$= \sin^{n+1} x \, S(x).$$

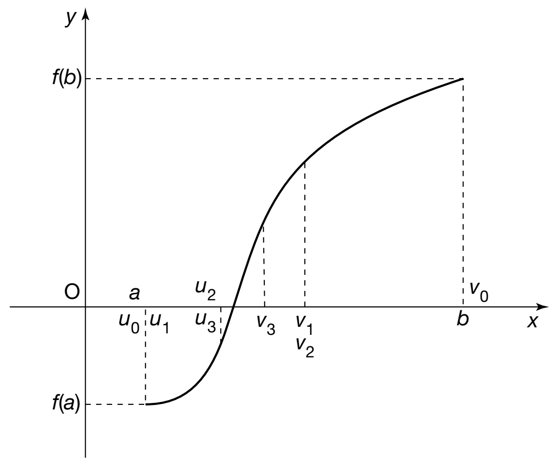
De plus $S(x) - S_{2n+1}(x) = \sin^{2n+2} x$,
$S(x) \geqslant 0$ et $S(x) - S_{2n}(x) = \sin^{2n+1} x$,
$S(x) \leqslant 0$ d'où $S_{2n+1}(x) \leqslant S(x) \leqslant S_{2n}(x)$.

Il en résulte que

$$I_{2n+1} \leqslant \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x) \, dx \leqslant I_{2n},$$

soit $B_n \leqslant \ln 2 \leqslant A_n$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \lim\limits_{n \to +\infty} B_n = \ln 2$.

**5** **A.**




**1.** $u_{n+1} - u_n = 0$ ou $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$.

• Démontrons par récurrence que $v_n > u_n$.
$v_0 = b$, $u_0 = a$, $b > a$ donc $v_0 > u_0$.

Supposons $v_n > u_n$, avec $u_n < \dfrac{u_n + v_n}{2} < v_n$.

**Si** $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$, $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, donc :

$$v_{n+1} > u_{n+1}.$$

**Si** $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$, donc :

$$u_{n+1} < v_{n+1}.$$

Il en résulte que, pour tout $n \geqslant 0$, $v_n - u_n \geqslant 0$. Donc la suite $(u_n)$ est croissante. On démontre de même que la suite $(v_n)$ est décroissante.

• De plus, en tenant compte des résultats précédents,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \text{ donc } v_n - u_n = \frac{1}{2}(b - a),$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Les suites sont adjacentes.

**2. a)** $f$ continue donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(c)$.

D'après les résultats précédents, $f(u_n) \leqslant 0$, donc $f(c) \leqslant 0$.
**b)** On démontre de même que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = f(c)$ avec $f(c) \geqslant 0$. D'où $f(c) = 0$.

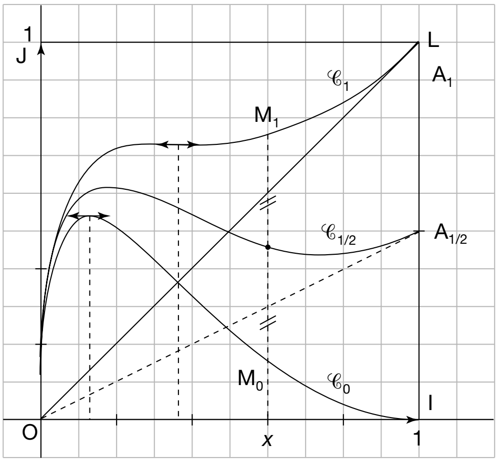
**B. 1.** $g(a) = f(a) - y < 0$ ; $g(b) = f(b) - y > 0$.
$g$ est continue, donc d'après la partie **A**, il existe $c$ de $[a ; b]$ tel que $g(c) = 0$, d'où $f(c) = y$.
**2.** Même raisonnement.

**6** **A. I. 1. a)** $f_0(x) = x(\ln x)^2$, $f'_0(x) = \ln x\,[\ln x + 2]$.

**b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} = \ln(\ln x)^2 = +\infty$ donc $f_0$ n'est pas dérivable en $x = 0$ et la tangente à $\mathscr{C}_0$ au point O est verticale.

**2. a)**

| $x$ | 0 | | $e^{-2}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_0'(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |
| $f_0(x)$ | 0 | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | 0 |




**II. 1. a)** $f_k'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x + k = [\ln x + 1]^2 + k - 1$.
**b)** $\mathcal{A}_k$ a pour coordonnées $(1 ; k)$, $f'_k(1) = k$ donc la tangente en $\mathcal{A}_k$ à $\mathscr{C}_k$ a pour équation $y = k(x-1) + k = kx$. C'est donc la droite $(OA_k)$.

**2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_k(x)}{x} = +\infty$ donc $f_k$ n'est pas dérivable en $x = 0$.
La tangente à $\mathscr{C}_k$ en O est donc verticale.
**3. a)** $f_1(x) - f_0(x) = x \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_0$.
**b)** $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.

| $x$ | 0 | | $e^{-1}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | ‖ | + | 0 | + | ‖ |
| $f_1(x)$ | 0 | ↗ | $2e^{-2}$ | ↗ | 1 |

**4. a)** $\dfrac{1}{2}[f_0(x) + f_1(x)] = \dfrac{1}{2}[2(\ln x)^2 + x]$

$$= (\ln x)^2 + \frac{1}{2}x = f_{\frac{1}{2}}(x).$$

**b)** D'où la construction de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$. Pour $x \in [0 ; 1]$, $M_0$ et $M_1$ sont les points de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$, le milieu de $[M_0M_1]$ est un point de $\mathscr{C}_{\frac{1}{2}}$.

**B. 1. a)** $v(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = x$ d'où $u'(x) = \dfrac{2}{x}\ln x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ donc $I(a) = \left[\dfrac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^1 - \displaystyle\int_\alpha^1 x \ln x \, dx$.

On pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ donc

$\displaystyle\int_\alpha^1 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x^2\right]_\alpha^1 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_\alpha^1$. Il en résulte que :

$$I(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln \alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{2}(\ln \alpha) + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

**b)** $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \dfrac{1}{4}$.
**2. a)** $S_k(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 x(\ln x)^2 + dx + k\int_\alpha^1 x \, dx$

$$= I(\alpha) + \frac{k}{2} - \frac{\alpha^2}{2}k$$

donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} S_k(\alpha) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{k}{2}$.

**b)** $\lim\limits_{\alpha \to 0} S_0(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ ; $\lim\limits_{\alpha \to 0} S_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \dfrac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{\alpha \to 0} S_1(\alpha) = \dfrac{3}{4}$.
D'où le résultat.

**7** • **A. 1.** $f(x) = \ln e^x(1 + e^{-2x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.
**2.** • $f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x})$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$ donc la droite $y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
• Pour tout $x > 0$,
$1 + e^{-2x} > 1$ donc $f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x}) > 0$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $d$.

• $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

**B. 1.** $F(x)$ représente en unités d'aire, l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, la droite $d$ et les droites d'équations $X = 0$ et $X = x$ avec $x > 0$.
**2.** Pour tout $x$ de I, $F'(x) = \ln(1 + e^{-2x}) > 0$ donc F'est strictement croissante sur I.
**3. a)** Pour tout $x$ de I on pose $\varphi(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{x}{1 + x}$ et $\Psi(x) = \ln(1 + x) - x$.

$\varphi'(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2} \geqslant 0$ et $\Psi'(x) = \dfrac{-x}{1 + x} \leqslant 0$ d'où les tableaux de variation :

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | 0 | + | |
| $\varphi(x)$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\Psi'(x)$ | 0 | − | |
| $\Psi(x)$ | 0 | ↘ | $-\infty$ |

Il en résulte que $\varphi(x) \geqslant 0$ et $\Psi(x) \leqslant 0$, donc

$$\frac{x}{1 + x} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x.$$

**b)** On pose $X = e^{-2x}$ avec $X > 0$

donc $\dfrac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \leqslant \ln(1 + e^{-2x}) \leqslant e^{-x}$

donc $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \, dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x e^{-2t} \, dt$

d'où $\left[-\dfrac{1}{2}\ln(1 + e^{-2t})\right]_0^x \leqslant F(x) \leqslant \left[-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$

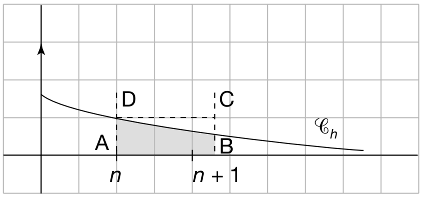
soit $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

**4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2t}) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

d'où $\dfrac{1}{2} \ln 2 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

**5. a)** $h'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $\ln 2$ ↘ | $0$ |




**b)** $u_n$ représente l'aire du domaine hachuré, donc

$$u_n \leqslant \text{aire ABCD}$$

or aire ABCD = $\ln(1 + e^{-2n})$ et $u_n \geqslant 0$
donc $0 \leqslant u_n \leqslant \ln(1 + e^{-2x})$.

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$.

**6. a)** $S_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + e^{-2t})\, dt + \dots + \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\, dt$

$= \displaystyle\int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\, dt = F(n + 1)$.

Donc la suite $S_n$ converge vers $\ell$.

**8** • **1. a)** $u'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ donc $u(x) - u'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

et $u$ est solution de (E).

**b)** $f = h + u$ est solution de (E) si et seulement si

$h - h' + u - u' = \dfrac{e^x}{x^2}$. Or $u - u' = \dfrac{e^x}{x^2}$ donc $h - h' = 0$.

**c)** $h(x) = ke^x$ donc $f(x) = ke^x + \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{kx+1}{x} e^x$.

**2. a)** $f'_k(x) = ke^x + \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = \dfrac{e^x}{x^2}[kx^2 + x - 1]$.

$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2 + x - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4k$, donc si $k < -\dfrac{1}{4}$ l'équation n'a pas de solution, $kx^2 + x - 1 < 0$ pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$.

Si $k = -\dfrac{1}{4}$ l'équation a une solution unique $x = 2$.

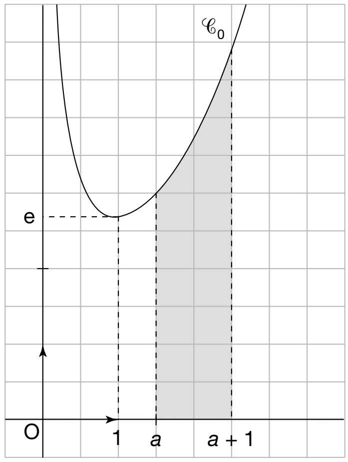
Si $-\dfrac{1}{4} < k < 0$ l'équation a deux solutions dans $]0\,;+\infty[$ car la somme et le produit des racines sont positifs.

**b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = -\infty$ si $k \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$ si $k = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = -\infty$.

**3.** (1) est $\mathscr{C}_0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ; (2) est $\mathscr{C}_{-0,15}$ car la dérivée s'annule pour deux valeurs de $x$ ; (3) est $\mathscr{C}_{-0,25}$ car $f'_k(x) < 0$ sauf pour $x = 2$ où $f'_k(x) = 0$.

(4) est $\mathscr{C}_{-1}$ car $f'_k(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

**4.**




**a)** $\mathscr{A}(a)$ est en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré.

**b)** $\mathscr{A}(a) = F(a + 1) - F(a)$
donc $\mathscr{A}'(a) = f_0(a + 1) - f_0(a)$

$$= \frac{e^{a+1}}{a+1} - \frac{e^a}{a} = \frac{e^a[ae - a - 1]}{a(a+1)}.$$

| $a$ | $0$ | $\dfrac{1}{e-1}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f_m(x)$ | ↘ | | ↗ |

**c)** Il en résulte de la question précédente que cette aire est minimale pour $a = \dfrac{1}{e-1}$.

**9** • **A. 1. a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = +\infty$.

**b)** $f'_m(x) = \dfrac{(2mx+1)(2mx-1)}{2x}$

| $x$ | $0$ | $\dfrac{1}{2m}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f_m$ | $+\infty$ ↘ | $\dfrac{1}{2}\ln 2m$ | ↗ $+\infty$ |

• Si $m > \dfrac{1}{2}$, $\ln 2m > 0$ et l'équation n'a pas de solution.

• Si $m = \dfrac{1}{2}$, $\ln 2m = 0$ et $f_m(x) = 0$ a une solution unique $x = 1$.

• Si $0 < m < \dfrac{1}{2}$, l'équation a deux solutions.

**2.** $S_m$ a pour coordonnées $x = \dfrac{1}{2m}$ et $y = \dfrac{1}{2}\ln 2m$ donc $S_m$ appartient à la courbe Γ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}\ln x$. Réciproquement $m > 0$, donc $x > 0$ et $S_m$ décrit toute la courbe (Γ).

**3. a)** $f_m(x) + \dfrac{1}{2}\ln x = m^2x^2 - \dfrac{1}{4}$. $C_m$ est au-dessus de (Γ) pour $x > \dfrac{1}{2m}$.

**B. 1. a)** M a pour coordonnées $\left(a\,;\dfrac{1}{4}a^2 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln a\right)$ et H($a$ ; 0). La droite (AH) a pour équation $y = -\dfrac{1}{a}x + 1$ et (γ) a pour équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Il en résulte que K a pour coordonnées $\left(\dfrac{2a}{1+a^2}\,;\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$.

**b)** La tangente en M a pour coefficient directeur $\dfrac{a^2-1}{2a}$ et la droite (OK) a également pour coefficient directeur $\dfrac{a^2-1}{2a}$. D'où le résultat.

**2. a)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}=1} f(x)\,dx$ et du fait que $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{p+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\,dx \leqslant \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{p}{n}\right)$.

Il résulte que $S_n - \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx \leqslant S_n$.

**b)** $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x\right)dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}(x\ln x - x)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12n^3} - \dfrac{1}{4n} - \dfrac{\ln n}{2n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

**10** • **A. 1. a)** $g'(x) = e^x - 1$.

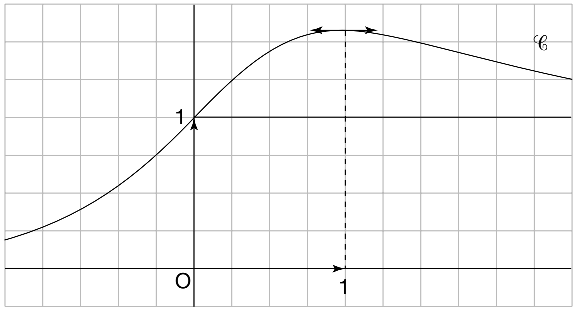
| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | 0 | ↗ $+\infty$ |

**b)** Pour tout réel $x$, $g(x) \geqslant 0$ donc $e^x - x \geqslant 1$ donc *a fortiori* $e^x - x > 0$ et l'expression $\dfrac{e^x}{e^x - x}$ est définie pour tout réel $x$.

**2. a)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

**b)** $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | 0 ↗ | $\dfrac{e}{e-1}$ | ↘ 1 |




**B. 1. a)** $u_n$ est en unités d'aire, l'aire du domaine limité par 𝒞 et les droites d'équations $x = 0$, $x = n$ et $y = 0$.

**b)** $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt > 0$ donc la suite $(u_n)$ est croissante.

**c)** $f(x) = 1 + \dfrac{x}{e^x - x}$ donc $u_n = \displaystyle\int_0^n dx + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx$

$= n + \displaystyle\int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx.$

**d)** $\dfrac{x}{e^x - x} > 0$ donc $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx > 0$ et pour tout entier $n$, $u_n \geqslant n$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**2. a)** $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x}{e^x - x}\,dx \geqslant 0$ donc la suite $(v_n)$ est croissante.

**b)** En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x - \dfrac{e^x}{2}$ on démontre que $\varphi(x) \geqslant 0$ d'où le résultat.

Il résulte que $\dfrac{1}{e^x - x} \leqslant 2e^{-x}$ donc $v_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

**c)** $2x = u(x)$, $v'(x) = e^{-x}$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -e^{-x}$.

$\displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx = [-2xe^{-x}]_0^n + 2\int_0^n e^{-x}\,dx$

$= -2ne^{-n} + 2 - 2e^{-n}$

soit $v_n \leqslant 2 - 2e^{-n}(n+1)$.

**d)** $e^{-n}(n+1) > 0$ donc $v_n \leqslant 2$. La suite $v_n$ est croissante et majorée donc convergente.

**11** • **A. 1.** $f'(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^3 - 1}{x} < 0$ sur $]0\,;1]$ donc $f$ est strictement décroissante sur $]0\,;1]$.

**2. a)** $\mathrm{I}(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}\right)dx$

$= \left[\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{2x}{3} - x\ln x\right]_\lambda^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\lambda^4}{12} - \dfrac{2}{3}\lambda + \lambda\ln\lambda.$

**b)** $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mathrm{I}(\lambda) = \dfrac{3}{4}$.

**B. 1. a)** En considérant l'aire des rectangles et en tenant compte que $f$ est strictement décroissant, le résultat est immédiat soit :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{1+k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1)$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}=1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En tenant compte de (1) par addition il vient :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \quad (2)$$

**2. a)** De (2) il résulte que :

$$\mathrm{S}_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{I}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \quad (3)$$

or $f\left(\dfrac{n}{n}\right) = f(1) = 0$ donc $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{I}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

**b)** $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{3n^4} + \dfrac{1}{n}\ln n - \dfrac{1}{3n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = \dfrac{3}{4}$.

**3. a)** Pour $n = 1$, $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 1 = 1^3$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Supposons que $1^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ alors

$$1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \text{ donc}$$

la proposition est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

**b)** $\ln \dfrac{1}{n} + \ln \dfrac{2}{n} + \ldots + \ln \dfrac{n}{4} = \ln \dfrac{1 \times 2 \times \ldots \times n}{n^n} = \ln \dfrac{n!}{n^n}$.

**c)** $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^3}{3n^3} - \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) - \dfrac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{n^2(n+1)^2}{12n^4} - \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{3}$$

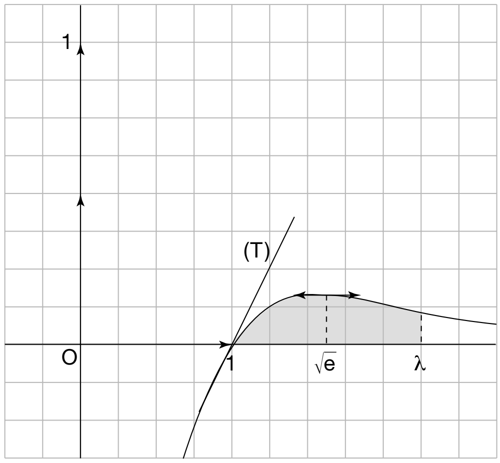
**d)** $\dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{12n^4} - \dfrac{1}{3} - \mathrm{S}_n$ donc

$$\lim \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -1$$

Or $\dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n!}{n^n} = \ln \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \ln u_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**12** **A. 1. a)** $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ ; $f_1'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

| $x$ | 1 | | $\sqrt{\mathrm{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f_1(x)$ | 0 | ↗ | $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ | ↘ | 0 |




**2. a)** $\mathrm{I}_1(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{1} \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$u(x) = \ln x$, $\mathrm{v}'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ ; $v(x) = -\dfrac{1}{x}$

donc $\mathrm{I}_1(\lambda) = \left[-\dfrac{1}{x}\ln x\right]_1^{\lambda} - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^{\lambda}$.

soit $\mathrm{I}_1(\lambda) = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\lambda - \dfrac{1}{\lambda} + 1$.

**b)** $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{I}_1(\lambda) = 1$.

**B. 1. a)** $f_n'(x) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln x)^{n-1}[n - 2\ln x]}{x^3}$ avec $n \geqslant 2$ et

$f_1'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

D'où le tableau pour $n \geqslant 2$.

| $x$ | 1 | | $\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f_n(x)$ | 0 | ↗ | $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right)$ | ↘ | $-\infty$ |

**b)** $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{\mathrm{e}^n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$.

**2. a)** $x > 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \dfrac{\ln x}{n+1}$. (1)

**b)** D'après (1) $f_{n+1}\left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\right) = f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\right) \times \dfrac{n+1}{2(n+1)}$

$$= \frac{1}{2} f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\right) = y_{n+1}.$$

La fonction $f_n$ est strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{n}{2}} ; +\infty\right[$ donc $f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leqslant f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$ d'où

$$2y_{n+1} \leqslant y_n \text{ et } y_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} y_n.$$

**c)** Par récurrence on établit le résultat. En effet $y_1 = \frac{1}{2e}$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$. Si $y_n \leqslant \frac{1}{e} \times \frac{1}{2^n}$.

aire $y_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} y_n$ donc $y_{n+1} \leqslant \frac{1}{e} \frac{1}{2^{n+1}}$.

Ainsi la proposition est vraie pour tout entier $u \geqslant 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

**C. 1. a)** $I_{k+1}(x) = \int_1^x \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^2} \, dt$,

$u(t) = (\ln t)^{k+1}$, $v'(t) = \frac{1}{t^2}$ donc $u'(t) = \frac{k+1}{t}(\ln t)^k$

et $v(t) = -\frac{1}{t}$.

Donc $I_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}\left[-\frac{1}{t}(\ln t)^{k+1}\right]_1^x + \frac{1}{k!}$

$$+ \int_1^x \frac{(\ln t)^k}{t^2} \, dt$$

soit $I_{k+1}(x) = -\frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln t)^{k+1}}{x} + I_k(x)$. (2)

**b)** On déduit de (2) que :

$$\begin{cases} \cancel{I_2(x)} - I_1(x) = -\frac{1}{2!}\frac{(\ln x)^2}{x} \\ I_3(x) - \cancel{I_2(x)} = -\frac{1}{3!}\frac{(\ln x)^3}{x} \\ \vdots \\ I_n(x) - \cancel{I_{n-1}(x)} = -\frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x} \end{cases}$$

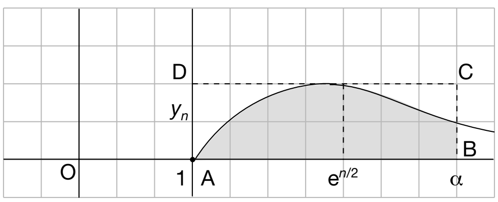
Par addition :

$$I_n(x) - I_1(x) = -\frac{1}{2!}\frac{(\ln x)^2}{x} \dots - \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x}.$$

Or $I_1(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

donc $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2!}\frac{(\ln x)^2}{x} \dots - \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x}$.

**2. a)**




$In(\alpha) \leqslant$ aire ABCD or aire ABCD $= y_n(\alpha - 1)$ donc $0 \leqslant I_n(\alpha) \leqslant y_n(\alpha - 1)$.

**b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = 0$ car $0 < (\alpha - 1)y_n \leqslant \frac{\alpha - 1}{e} \times \frac{1}{2^n}$.

**3. a)** $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} W_n(x)$ donc $W_n(x) = x[1 - I_n(x)]$.

**b)** $\alpha \geqslant 1$, $W_n(\alpha) = \alpha[1 - I_n(\alpha)]$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n(\alpha) = \alpha$.

**c)** $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} = W_n(e)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.

**13** **A. 1. a)** $f_3(x) = \frac{x^3}{1 + x^2} = x - \frac{x}{1 + x^2}$

et $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ \text{ou} \\ x \to -\infty}} \frac{x}{1 + x^2} = 0$ donc la droite $d$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\Gamma_3$.

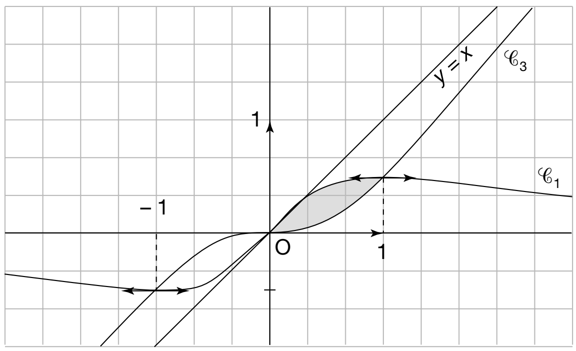
**b)** $f_3(x) - f_1(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{1 + x^2}$ donc $\Gamma_3$ est au-dessus de $\Gamma_1$ pour $x \in ]-1 ; 0[ \cup ]1 ; +\infty[$.

**2. a)** $f_1'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$ et $f_3'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(1 + x^2)^2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $0$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_3'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_3(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**b)** Voir courbes ci-dessous.




**3. a)** $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, dx = \frac{1}{2}[\ln(1 + x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

$I_1 + I_3 = \int_1^x x \, dx = \frac{1}{2}$ donc $I_3 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

**b)** $\mathscr{A} = 4\int_0^1 [f_1(x) - f_3(x)] \, dx = 4[I_1 - I_3]$

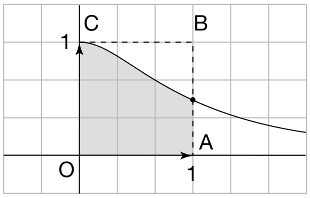
$= 2[\ln 2 - 1 + \ln 2] = (4 \ln 2 - 2) \text{ cm}^2$.

**B. 1. a)** $a_n$ est, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par $\Gamma_0$ et les droites d'équations $x = 0$ ; $y = 0$ et $x = n$.

**b)** $a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{1 + t^2} \, dt$ or $\frac{1}{1 + t^2} > 0$

donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ et la suite est croissante.

**2. a)** $a_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$.




$a_1$ est l'aire hachurée et $a_1 \leqslant$ aire OABC.
De plus aire OABC = 1 donc $a_1 \leqslant 1$.

**b)** $\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^2(1+t^2)} \leqslant 0$ pour tout $t \neq 0$

donc $\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

$\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt$ soit $\int_1^n \frac{1}{1+t^2} \leqslant \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$.

**3.** $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.

La suite $a_n$ est croissante et majorée donc convergente.

**C. 1. a)** F est la primitive de $f_0$ qui s'annule en $x = 0$ et $F'(x) = f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

**2. a)** $H(0) = F(\tan 0) = F(0) = 0$.
**b)** $H'(x) = f(\tan x) \times (1 + \tan^2 x) = 1$.
**c)** $H(x) = x + C$ or $H(0) = 0$ donc $H(x) = x$.
$F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**3. a)** $k'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \times \frac{(1+x)^2}{2+2x+x^2} + \frac{2(x+2)^2}{2(x+2)^2(2+2x+x^2)} = 0$

donc $k(x) =$ cte avec $k(0) = \frac{\pi}{4}$ car $k(0) = F(0) + F(1)$ donc $k(x) = \frac{\pi}{4}$.

**b)** $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = k(1) = \frac{\pi}{4}$.

**14** • **A. 1. a)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

**b)** $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(2x^2+3x+1)^2}$, $f'(x) = 0$ sur $[0\,;+\infty[$ pour $x = 1 + \sqrt{3}$ donc A a pour coordonnées $(1+\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3} - 3)$.

**2. a)** $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+1}$.

**b)** $\mathscr{A}(\lambda) = \int_1^\lambda \left[\frac{1}{2} - f(x)\right] dx$

$= \left[\ln(x+1) - \frac{3}{4}\ln(2x+1)\right]_1^\lambda$

$= \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{4}\ln\left[\frac{(\lambda+1)^4}{(2\lambda+1)^3}\right]$.

$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) = +\infty$ car $\frac{(\lambda+1)^4}{(2\lambda+1)^3}$ se « comporte en $+\infty$ » comme « $\frac{\lambda}{8}$ ».

**B. 1. a)** $p_n = \frac{\binom{n}{2} + \binom{n+2}{2}}{\binom{2n+2}{2}} = \frac{n(n-1) + (n+2)(n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$

$= \frac{n^2+n+1}{2n^2+3n+1} = f(n)$.

**b)** Pour tout $x \geqslant 1$, $2\sqrt{3} - 3 \leqslant f(x) < \frac{1}{2}$ donc pour $n \geqslant 2$, $p_n < \frac{1}{2}$.

**2. a)** Si $n = 3$, $p_3 = f(3) = \frac{13}{28}$ et $p_2 = \frac{7}{15}$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | $1+\sqrt{3}$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n$ | 0 ↘ | $\frac{1}{2}$ ↘ | $\frac{7}{15}$ ↘ | $2\sqrt{3} - 3 \approx 0{,}46$ | ↗ $\frac{13}{28}$ | ↗ |

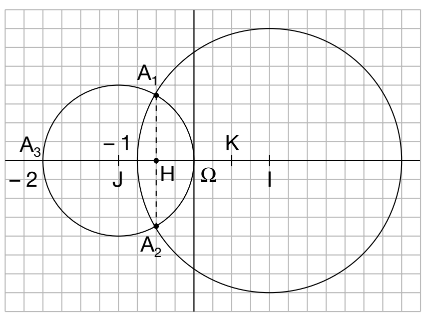
Or $\frac{7}{15} > \frac{13}{28}$ donc $p_3$ est la valeur minimale de $p_n$.

**b)** $p_n > 0{,}48 \Leftrightarrow h^2 - 11n + 12 > 0$ il en résulte que $n = 1$ ou $n \geqslant 10$.

**C. 1.** Les points qui ont pour image $\Omega$ sont ceux pour lesquels $z^2 + z + 1 = 0$ et ceux qui ont I pour image sont tels que $z^2 + 2z = 0$. En résolvant ces deux équations on obtient quatre points d'affixes respectives 0 ; $-2$ ; $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces quatre points sont sur le cercle de centre J d'affixe $-1$ et de rayon 1. Ils sont notés $\Omega$ ; $A_3$, $A_2$, $A_1$.

**2.** Z réels $\Leftrightarrow Z = \overline{Z}$ soit $\frac{z^2+z+1}{2z^2+3z+1} = \frac{\bar{z}^2+\bar{z}+1}{2\bar{z}^2+3\bar{z}+1}$

d'où $(\bar{z} - z)$, $(z + \bar{z} - 2 - z\bar{z}) = 0$. Il en résulte que $z$ est réel distinct de $-\frac{1}{2}$ et $-1$ ou $x^2 + y^2 - 2x = 0$. C'est-à-dire m appartient au cercle de centre I d'affixe 1 passant par $A_1$ et $A_2$ ou à l'axe des réels en étant distinct de J et M.

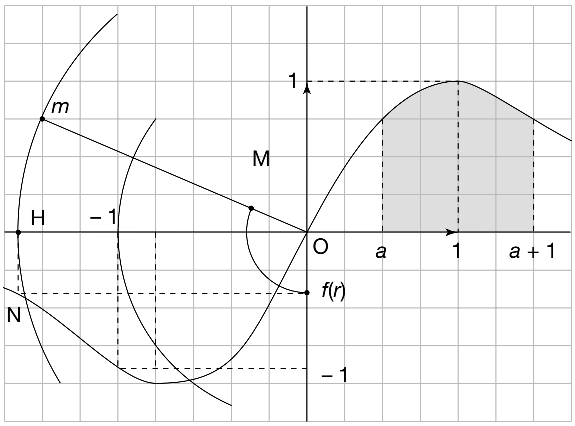


**3.** $m$ décrit $[\Omega I]$ si et seulement si $z \in [0\ ;\ 1]$ donc d'après **A**, $f(z) \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ donc M décrit le segment [KI], K étant le milieu de $[\Omega I]$.

**15** • **A. 1.** $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x)^2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |




**2. a)** $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = [\ln(1+x^2)]_a^{a+1}$.

$\mathscr{A}(a) = \ln(a^2 + 2a + 2) - \ln(a^2 + 1)$.

**b)** $\mathscr{A}'(a) = \dfrac{2a+2}{a^2+2a+2} - \dfrac{2a}{a^2+1}$

$= \dfrac{2(1-a-a^2)}{(a^2+1)(a^2+2a+2)}$.

| $a$ | $0$ | | $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathscr{A}'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\mathscr{A}(a)$ | $\ln 2$ | ↗ | | ↘ | $0$ |

Il en résulte que $\mathscr{A}(a)$ est maximale pour $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**B. 1.** $m$ invariant si et seulement si $z = Z$ soit $z(z\bar{z} - 1) = 0$ donc $z = 0$ ou $|z| = 1$.
On obtient donc $\Omega$ et les points du cercle de centre $\Omega$ et de rayon 1.

**2. a)** $X + iY = \dfrac{2x + 2iy}{1 + x^2 + y^2}$ d'où $X = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$

et $Y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$.

**b)** $X = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 8$ donc $m$ décrit un cercle de centre I d'affixe 3 et de rayon $2\sqrt{2}$.

**3. a)** $\rho = \dfrac{2|z|}{1 + z\bar{z}} = \dfrac{2r}{1+r^2}$ de plus si $z = re^{i\theta}$,

$Z = \dfrac{2re^{i\theta}}{1+r^2}$ donc $\alpha \equiv \theta\ [2\pi]$.

**b)** $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{\Omega M}) = (\vec{u}\ ;\overrightarrow{\Omega m}) = \theta[2\pi]$ donc $\Omega$, $m$, M sont trois points alignés.

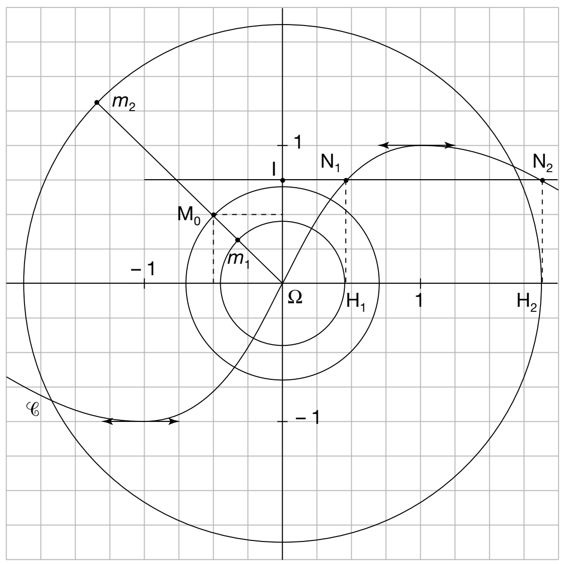
**c)** $\text{OM} = \dfrac{2r}{1+r^2} = f(r)$ donc comme $r > 0$, $f(r) \in\ ]0\ ;1]$

donc M est un point du disque de centre $\Omega$ et de rayon 1.

**C. 1.** Voir la figure du **A**. Le cercle de centre O et de rayon $0m = r$ coupe l'axe des abscisses en H. N est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse celle de H (qui est $r$ ou $-r$) donc l'ordonnée de N est $f(r)$ ou $f(-r)$ donc $p = |f(r)|$. On construit alors M de la demi-droite $[\text{O}m)$ tel que

$\text{OM} = |f(r)|$.

**2.**




**a)** $\Omega m_1 = \Omega H_1$ et $\Omega m_2 = \Omega H_2$, $OM_0 = OI = p = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$

donc $f(r_1) = f(r_2) = p$.
De plus $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{\Omega m_1}) = (\vec{u}\ ;\overrightarrow{\Omega m_2}) = \theta$
donc $T(m_1) = T(m_2) = M_0$.

**b)** $\dfrac{2r}{1+r^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $r^2 - 2r\sqrt{2} + 1 = 0$ et $r_1 = \sqrt{2} - 1$ et

$r_2 = \sqrt{2} + 1$ de plus $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

Donc $z_{m_1} = (\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{m_2} = (\sqrt{2} + 1)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.