



Travaux dirigés (page 432)

TD 1

1 Question 1

I et J ont pour images P et Q par $h(M, 2)$, donc :

$$\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

B et A sont les images de I et J par $h(C, 2)$, donc :

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

AMCQ et AMBR sont des parallélogrammes donc $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BR}$. On déduit que $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BR}$ donc que AQPBR est un parallélogramme et que [AP] et [BQ] ont même milieu L. Même chose pour [BQ] et [CR].

Question 2

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (propriété du centre de gravité).

$\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{HR} = \vec{0}$ (propriété du centre de gravité).

b) $\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LC} = \vec{0}$,

donc $3\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}$,

et, de même, $3\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LQ} + \overrightarrow{LR}$.

$3(\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{LH}) = (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LP}) + (\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LQ}) + (\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LR})$.

Or, L est le milieu de [AP], [BQ] et [CR], donc :

$$\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{LH} = \vec{0} \text{ et L est le milieu de [GH].}$$

Question 3

• G(3) est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et H(3) celui de (P, 1), (Q, 1), (R, 1) d'où le résultat.

• De même, L(2) est le barycentre de (A,1), (P, 1) ou (B, 1), (Q, 1) ou (C, 1), (R, 1). Donc l'isobarycentre de A, B, C, P, Q, R est L, qui est aussi l'isobarycentre de G et H, donc L est le milieu de [GH].

a) $2\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} =$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \vec{0},$$

donc G est le centre de gravité du triangle IJK.

b) H est le centre de gravité du triangle PQR donc, pour tout point M, $3\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$.

$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MI}$, $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MJ}$, $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MK}$, donc :

$$3\overrightarrow{MH} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK}) = 2 \times 3\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{MG}.$$

Il en résulte que les points M, G, H, L sont alignés.

2 Question 1 : Voir la solution de 1.

Question 2

a) $h(I) = P, h(J) = Q, h(K) = R$. Donc l'image de G, centre de gravité du triangle IJK, est H.

Donc $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MG}$.

b) $h_1(A) = P; h_1(B) = Q; h_1(C) = R$. Donc $h_1(G) = H$ et $\overrightarrow{LH} = -\overrightarrow{LG}$, donc L est le milieu de [HG].

Question 3

M, H, G d'une part, et L, H, G d'autre part, sont alignés. D'où le résultat.

3 1. A(0; 0), B(1; 0), C(0; 1),

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), J\left(0; \frac{1}{2}\right), K\left(\frac{1}{2}; 0\right), G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

2. P(1 - a; 1 - b); Q(-a; 1 - b);

$$R(1 - a; -b); H\left(\frac{2}{3} - a; \frac{2}{3} - b\right).$$

3. • Le milieu L de [AP] a pour coordonnées $\left(\frac{1-a}{2}; \frac{1-b}{2}\right)$. Il est aussi le milieu de [BQ] et [CR].

• Le milieu de [GH] a pour coordonnées

$$\left(\frac{1-a}{2}; \frac{1-b}{2}\right), \text{ c'est donc L.}$$

• $\overrightarrow{MG}\left(\frac{1}{3} - a; \frac{1}{3} - b\right)$ et $\overrightarrow{MH}\left(\frac{2}{3} - 2a; \frac{2}{3} - 2b\right)$, donc :

$$\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MG}$$

et les points M, G, H sont alignés.

4 Il suffit de reprendre le déroulement des questions du 3.

TD 2

1 Question 1

a) $\widehat{DAK} = \widehat{DAI} = 45^\circ$, d'où le résultat.

$$AB = a\sqrt{2} \text{ donc } AI = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$AD = a + c \text{ donc } AK = \frac{(a+c)\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Donc } IK^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{(a+c)^2}{2} = a^2 + ac + \frac{c^2}{2}.$$

b) $DJ = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $DA = a + c$, $\widehat{ADC} = 45^\circ$ donc :

$$AJ^2 = \frac{c^2}{2} + (a+c)^2 - c\sqrt{2}(a+c)\cos 45^\circ$$

$$= \frac{c^2}{2} + a^2 + 2ac + c^2 - ac - c^2 = a^2 + ac + \frac{c^2}{2}.$$

D'où le résultat.

Question 2

a) $\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AE} + \vec{EK}$ et $\vec{IK} = \vec{IB} + \vec{BD} + \vec{DK}$, donc :

$$2\vec{IK} = \vec{BD} + \vec{AE}.$$

J milieu de [DC] donc $2\vec{AJ} = \vec{AC} + \vec{AD}$.

b) $4\vec{IK} \cdot \vec{AJ} = (\vec{AC} + \vec{AD}) \cdot (\vec{BD} + \vec{AE})$
 $= (\vec{AO} + \vec{OC} + \vec{AD}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OD} + \vec{AE})$
 $= \vec{AO} \cdot \vec{OD} + \vec{OC} \cdot \vec{BO} + \vec{OC} \cdot \vec{AE} + \vec{AD} \cdot \vec{OD}$
 $= ac - ac - c(a+c) + c(a+c) = 0.$

D'où le résultat.

2 1. $r(A) = B$ et $r(C) = D$ donc $AC = BD$ et les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

2. $(\Omega I) \parallel (BD)$ et $(\Omega J) \parallel (AC)$, d'où le résultat. De plus,

$$\Omega I = \frac{1}{2}BD \text{ et } \Omega J = \frac{1}{2}CA, \text{ donc } \Omega I = \Omega J.$$

3. $r_1(K) = A$ et $r_1(I) = J$ donc $AJ = IK$ et (AJ) et (IK) sont perpendiculaires.

3 A(a; 0) et C(0; c); B(0; a); D(-c; 0); E(a; -a-c).

Il en résulte que I a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$,

$$J\left(-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right), K\left(\frac{a-c}{2}; -\left(\frac{a+c}{2}\right)\right).$$

Donc $\vec{IK} \cdot \vec{AJ} = 0$ et $\vec{IK} \cdot \vec{AJ} = 0$, donc :

$$\vec{IK} = \vec{AJ} \text{ et } \vec{IK} \cdot \vec{AJ} = 0$$

et les droites (IK) et (AJ) sont perpendiculaires.

4 1. $z_A = a$; $z_B = ai$; $z_C = ci$; $z_D = -c$; $z_E = a - i(a+c)$;

$$z_I = \frac{a}{2}(1+i); z_J = \frac{c}{2}(-1+i); z_K = \frac{a-c}{2} - i\left(\frac{a+c}{2}\right).$$

$$2. z_K - z_I = -\frac{c}{2} - i\left(a + \frac{c}{2}\right) \text{ et } z_J - z_A = -\left(\frac{c}{2} + a\right) + i\frac{c}{2},$$

d'où le résultat.

3. Donc $|z_K - z_I| = |z_J - z_A|$ et

$$\arg(z_K - z_I) = \frac{\pi}{2} + \arg(z_J - z_A),$$

donc IK = AJ et (AJ) et (IK) sont perpendiculaires.

TD 3

1 1. a) B a pour coordonnées (a; 0) et D(0; a); P(a; m).
Comme P décrit [BC], alors $0 \leq m \leq a$.

b) $N(x; a)$, $\vec{AP} \cdot \vec{AN} = ax + am = 0$ donc :
 $x = -m$ et $N(-m; a)$.

c) I a pour coordonnées $\left(\frac{a-m}{2}; \frac{a+m}{2}\right)$.

2. a) Le point I est un point de la droite d'équation :
 $x + y - a = 0$.

C'est la droite [BD].

Or $0 \leq m \leq a$ et $0 \leq a-m \leq a$, donc $0 \leq \frac{a-m}{2} < \frac{a}{2}$.

Ainsi le lieu de I est le segment [OD].

2 1. P, C, B alignés donc $\vec{BP} = \lambda \vec{BC}$ et $P \in [BC]$ donc :
 $\lambda \in [0; 1]$.

2. a) $\vec{AP} \cdot \vec{AN} = (\vec{AB} + \vec{BP}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DN})$
 $= \vec{AB} \cdot \vec{DN} + \vec{BP} \cdot \vec{AD} = 0.$

Or $\vec{AB} \cdot \vec{DN} < 0$ et $\vec{BP} \cdot \vec{AD} > 0$, donc :

$$\vec{CD} \cdot \vec{DN} = \vec{BP} \cdot \vec{BC} = \lambda BC^2, \text{ donc } \vec{DN} = \lambda \vec{CD}.$$

b) $\vec{BI} + \vec{IP} = \lambda \vec{BI} + \lambda \vec{IC}$ donc $\vec{IP} = \lambda \vec{IC} + (1-\lambda)\vec{IB}$.

De même, à partir de $\vec{DN} = \lambda \vec{CD}$, il vient :

$$\vec{IN} = (1+\lambda)\vec{ID} - \lambda \vec{IC}.$$

Or $\vec{IP} + \vec{IN} = \vec{0}$, donc $(1-\lambda)\vec{IB} + (1+\lambda)\vec{ID} = \vec{0}$, soit :

$$\vec{IB} + \vec{ID} + \lambda(\vec{ID} - \vec{IB}) = \vec{0}$$

ou

$$2\vec{IO} = 2\lambda \vec{BO} \text{ et } \vec{OI} = \lambda \vec{OD}.$$

3. Les points I, O, D sont alignés donc I appartient à la droite (OD). De plus, $\lambda \in [0; 1]$ donc le lieu de I est le segment [OD].

3 1. a) Par r, la droite (AP) a pour image la droite (AN). De plus, $r(B) = D$ donc la droite (BC) a pour image la droite perpendiculaire à (BC) passant par D, c'est-à-dire la droite (DC). Donc P étant à l'intersection des droites (BC) et (AP) son image $r(P)$ est l'intersection des droites (DC) et (AN) c'est-à-dire N.

b) Le triangle PAN est donc rectangle isocèle en A.

2. a) s a pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) L'image de P par s est le point I milieu de [PN].

3. Le lieu de I est donc l'image de [BC] par s. Or $s(B) = O$ et $s(C) = D$. C'est donc le segment [OD].

TD 4

1 1. A(1; 1; 1), B(1; 1; 0), D(0; 1; 1), E(1; 0; 1),
F(1; 0; 0), M $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$, N $\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$.

2. $\vec{MN} \cdot \vec{EG} = 0$ et $\vec{MN} \cdot \vec{FC} = 0$ donc (MN) est bien la

perpendiculaire commune à (EG) et (FC).

2 (MN) est l'image de (OJ) par l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{2}{3}$ donc (MN) et (OJ) sont parallèles.

De plus, dans le triangle HFB, d'après le théorème des milieux, (OJ) et (HB) sont parallèles.

2. a) (EG) est perpendiculaire à (HF) (diagonales d'un carré).

(BF) est perpendiculaire au plan (EFGH), donc à (EG). Il en résulte que (EG) est perpendiculaire à (HF) et (BF), donc au plan (BHF).

On montre de même que (FC) est perpendiculaire à (BHG).

b) Donc (BH) est perpendiculaire à (EG) et (FC). Or (BH) est parallèle à (MN), d'où le résultat.

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \quad 1. \quad 3\overrightarrow{MN} &= 3\overrightarrow{GN} - 3\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GB} \\ &= \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH}).$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{GE} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GE}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{GF}^2 - \overrightarrow{GH}^2) = 0. \end{aligned}$$

Donc (MN) est perpendiculaire à (GE).

Même démonstration pour $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$.

Corrigés des exercices

Pour progresser

(page 438)

1 A - 1. a) ID = AJ; CD = AD.

Les triangles CDI et DAJ sont rectangles et ont deux côtés égaux; ils sont donc isométriques.

b) Il résulte de la question précédente que :

$$\overrightarrow{ADJ} = \overrightarrow{DCI} \text{ et } \overrightarrow{DIC} = \overrightarrow{DJA},$$

donc $\overrightarrow{DIC} + \overrightarrow{IDJ} = \overrightarrow{DIC} + \overrightarrow{DCI} = 90^\circ$, d'où le résultat.

2. À partir des triangles BCJ et IAB, la démonstration est identique. Donc (BI) et (DJ) sont deux hauteurs de CIJ. Donc H est l'orthocentre.

B - 1. a) $r(A) = B$ et $r(D) = A$ donc [AB] est l'image du segment [AD] par r . L'image de I par r est le point I' de [AB] tel que AI = I'B. Donc I' = J.

b) $r(C) = D$ et $r(I) = J$ donc CI = DJ et (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

2. On démontre de même que (BI) et (CJ) sont perpendiculaires et ainsi H est l'orthocentre du triangle CIJ.

$$\begin{aligned} \mathbf{C - 1. a)} \quad \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}) \\ &= \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{b)} \quad \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DA} = DI \times DA \text{ et } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AJ} = -AB \times AJ.$$

Or, DI = AJ et DA = AB, donc $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0$ et les droites sont perpendiculaires.

2. La démonstration est identique.

D - 1. a) L'affixe de I est im et celle de J, $a - m$.

b) \overrightarrow{CI} a pour affixe $im - a(1+i) = z_1$;

\overrightarrow{DJ} a pour affixe $a - m - ai = (1-i)a - m = z_2$.

L'affixe de \overrightarrow{CI} s'écrit aussi :

$$-i \left[-m + \frac{(1+i)a}{i} \right] = -i[-m + (1-i)a], \text{ donc } z_1 = -iz_2,$$

c'est-à-dire $|z_1| = |z_2|$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Donc CI = DJ et les droites sont perpendiculaires.

2. On démontre de même que (BI) et (CJ) sont perpendiculaires, d'où le résultat.

2 A - $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = \theta$;

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 - 2 AD \times DF \times \cos(\alpha + \theta);$$

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2 AB \times BE \times \cos(\alpha + \theta).$$

Or, AD = BC = BE et AB = DC = DF, donc AF = AE et le triangle FAE est isocèle.

B - 1. C a pour affixe $b + d = c$.

F est l'image C par $r(D; \alpha)$, donc $z_F - d = e^{i\alpha}(c - d) = e^{i\alpha}b$ et $z_F = e^{i\alpha}b + d$.

De même, E est l'image de C par $r(B; -\alpha)$ donc :

$$z_E - b = e^{-i\alpha}(c - b) = e^{-i\alpha}d,$$

soit $z_E = e^{-i\alpha}d + b = e^{-i\alpha}[d + be^{i\alpha}]$.

2. D'où $z_E = e^{-i\alpha}z_F$; $|z_E| = |z_F|$ et AE = AF.

C - 1. s(C) = A et $s(B) = D$, donc CG = AE car $s(G) = E$.

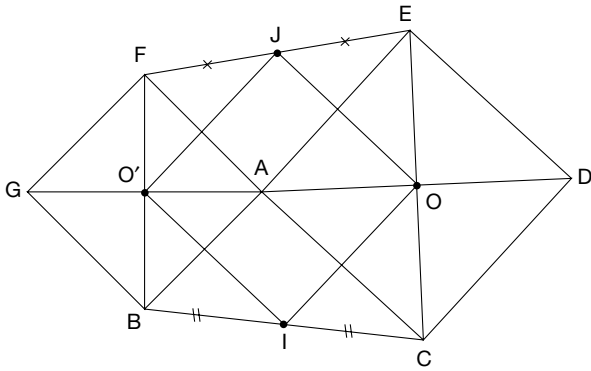
2. a) La symétrie centrale conserve les distances et les angles orientés, donc DG = BE = AD et $(\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DA}) = \alpha$. D'où $r(G) = A$, $r(C) = F$ donc CG = AF = AE, d'où le résultat.

3 A - 1. $r(F) = B$ et $r(C) = E$ donc FC = BE et les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

Dans les triangles FEC et FBC, O'I et OJ sont les droites des milieux donc $IO' = OJ = \frac{FC}{2}$ et $OJ \parallel FC \parallel O'I$.

On démontre de même dans les triangles BCE et BFE que $IO = O'J = \frac{BE}{2}$ et $OI \parallel O'J \parallel BE$. Donc

OIO'J est un carré.



B - I a pour affixe $\frac{b+c}{2}$; **E** a pour affixe ci donc **O** a pour affixe $\left(\frac{1+i}{2}\right)c$. Le point **F** a pour affixe $-ib$ et **O'** a pour affixe $\left(\frac{1-i}{2}\right)b$ donc \overline{IO} a pour affixe $\frac{ic-b}{2}$ et $\overline{O'J}$ a pour affixe $\frac{ic-b}{2}$ donc $IOJO'$ est un parallélogramme. De plus \overline{OJ} a pour affixe $\frac{ib+c}{2}$ soit $z_{OJ} = iz_{OI}$ donc $OJ = OI$ et $OJ \perp OI$, ainsi $OIO'J$ est un carré.

4 A - 1. a) **P** a pour coordonnées $(a; y)$ et $\overline{AP} \cdot \overline{DM} = 0$ d'où $a(m-y) = 0$ et $y = m$.

b) **I** a donc pour coordonnées $x_1 = \frac{a+m}{2}$ et $y_1 = \frac{m}{2}$.

2. a) **I** est un point de la droite d d'équation $x - y = \frac{a}{2}$.

b) $m \in [0; a]$ donc $x_1 \in \left[\frac{a}{2}; a\right]$; il en résulte que **I** décrit le segment $[EF]$ tel que **E** a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ et **F** $\left(a; \frac{a}{2}\right)$.

B - 1. a) $r(D) = A$ donc l'image de (DM) est la droite perpendiculaire à (DM) passant par **A**, c'est-à-dire la droite (AP) . De plus l'image de (AB) est (BC) donc l'image de **M** intersection de (AB) et (DM) est l'intersection de (AP) et (BC) c'est-à-dire **P**. Donc le triangle MOP est rectangle isocèle.

2. s a pour angle $\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'image de **A** par s est le milieu **E** de $[AB]$ et celle de **B** est le milieu **F** de $[BC]$ donc lorsque **M** décrit le segment $[AB]$, **I** décrit le segment $[EF]$.

Conformément à ce qui est demandé à l'élève, nous fournissons plusieurs solutions pour les exercices 5 à 9.

5 • Première solution

En prenant le repère, $(B; \overline{BC}, \overline{BA})$, **A**, **C**, **A'** ont respectivement pour coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(0; -1)$.

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \frac{2}{3}(\overline{BC} - \overline{BA}) \\ &= \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{2}{3}\overline{BC}, \end{aligned}$$

donc **D** a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Notons $(x; 0)$ les coordonnées de **O**.

Alors $\overline{OD} \left(\frac{2}{3} - x; \frac{1}{3}\right)$ et $\overline{A'D} \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Or, \overline{OD} et $\overline{A'D}$ sont deux vecteurs colinéaires donc :

$$\left(\frac{2}{3} - x\right) \times \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow 8 - 12x - 2 = 0,$$

donc $x = \frac{1}{2}$ et **O** est le milieu de $[BC]$.

Deuxième solution

Notons h_1 l'homothétie de centre **A'** et de rapport 2

et h_2 l'homothétie de centre **D** et de rapport $-\frac{1}{2}$, alors :

$$h_1(B) = A \text{ et } h_2(A) = C.$$

Donc $(h_2 \circ h_1)(B) = C$ et $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport -1 qui transforme **B** en **C** et dont le centre est aligné avec **A'** et **D**.

Donc le centre est **O** et **O** est le milieu de $[BC]$.

Troisième solution

Dans le triangle $A'AC$, **B** est le barycentre de $(A, 1)$, $(A', 1)$ et **D** celui de $(A, 1)$ et $(C, 2)$. Donc, avec le théorème d'associativité, le barycentre de $(A', 1)$, $(A, 1)$, $(C, 2)$ est un point de (BC) et $(A'D)$. C'est donc **O**, barycentre de $(B, 2)$, $(C, 2)$. C'est le milieu de $[BC]$.

6 • Première solution

$2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$, donc :

$$\begin{aligned} 2\overline{AM} \cdot \overline{LK} &= \overline{AB} \cdot \overline{LK} + \overline{AC} \cdot \overline{LK} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AC} \cdot \overline{HA} \\ &= \overline{AH} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC}) = \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0. \end{aligned}$$

Donc (AM) et (LK) sont deux droites perpendiculaires.

Deuxième solution

Une solution analytique est possible en prenant un repère orthonormal $(A; \vec{i}, \vec{j})$ avec $B(b; 0)$ et $C(0; c)$, $b > 0, c > 0$.

Alors **M** a pour coordonnées $\left(\frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ et la droite (BC) a pour équation $cx + by - bc = 0$.

(AH) , perpendiculaire à (BC) , a pour équation $bx - cy = 0$.

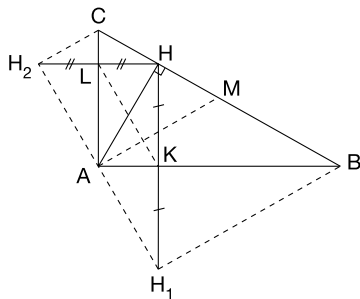
Le point **H**, intersection de ces droites, a pour coordonnées

$$\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}; \frac{cb^2}{b^2+c^2}\right).$$

Donc \overline{LK} a pour coordonnées $\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}; \frac{-cb^2}{b^2+c^2}\right)$.

Il est colinéaire à $\vec{u}(c; -b)$, donc $\vec{u} \cdot \overline{AM} = 0$ et $(LK) \perp (AM)$.

Troisième solution



On note H_1 et H_2 les symétriques de H par les réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs (AB) et (AC) .

$s_1(A) = A$, $s_1(B) = B$ donc A , H_1 , H_2 sont alignés et $AH_1 = AH_2$.

De plus, $(AH_1) \perp (H_1B)$ et $(CH_2) \perp (H_2A)$.

Donc CH_2H_1B est un trapèze rectangle et (AM) est la droite des milieux. Donc $(AM) \perp (H_1H_2)$ et $(H_1H_2) \parallel (LK)$, d'où le résultat.

7 • Première solution

Choisissons le repère $(C; \vec{i}, \vec{j})$ tel que D a pour coordonnées $(a; 0)$ et $B(0; a)$.

Alors M a pour coordonnées $(m; 0)$, $0 \leq m \leq a$, et N a pour coordonnées $(0; -m)$.

Donc \vec{NA} a pour coordonnées $(a; a+m)$.

La droite d passant par M et perpendiculaire à (AN) a pour vecteur normal \vec{NA} , donc une équation de la forme $ax + (a+m)y + \lambda = 0$.

Or $M \in d$, donc $am + \lambda = 0$ et $\lambda = -am$.

Il en résulte que d a pour équation :

$$ax + (a+m)y - am = 0,$$

ou encore $ax + ay + m(y-a) = 0$.

Cette droite passe donc par le point fixe $A'(-a; a)$.

Deuxième solution

Le plan est orienté et $(\vec{CD}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$.

On note r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors $r(N) = M$ et $r(A) = A'$ tel que B est le milieu de $[AA']$. Donc l'image de (AN) est la perpendiculaire à (AN) passant par M , c'est-à-dire (MA') . D'où le point fixe A' .

8 • Première solution

Prenons un repère orthonormal $(A; \vec{i}, \vec{j})$ tel que B et D ont pour coordonnées $(a; 0)$ et $(0; a)$, $a > 0$.

La droite (BD) a pour équation $x + y - a = 0$.

Appelons m , avec $0 \leq m \leq a$, l'abscisse de M .

Son ordonnée est $a - m$. Donc P et Q ont respectivement pour coordonnées $(m; 0)$ et $(0; a - m)$.

Donc \vec{MC} a pour coordonnées $(a - m; m)$ et \vec{PQ} $(-m; a - m)$.

Ainsi $MC = PQ$ et $\vec{MC} \cdot \vec{PQ} = 0$, donc les droites (MC) et (PQ) sont perpendiculaires.

La médiatrice Δ_m de $[PQ]$ passe par le point de coordonnées $(\frac{m}{2}; \frac{a-m}{2})$ et admet \vec{PQ} pour vecteur normal.

Une équation de Δ_m est de la forme :

$$-mx + (a-m)y + \lambda = 0,$$

$$\text{et } -\frac{m^2}{2} + \left(\frac{a-m}{2}\right)^2 + \lambda = 0, \text{ donc } \lambda = -\frac{a^2}{2} + am.$$

$$\Delta_m \text{ a pour équation } -mx + (a-m)y - \frac{a^2}{2} + am = 0.$$

$$\Delta_0 : ay - \frac{a^2}{2} = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{2}; \quad \Delta_a : -ax + \frac{a^2}{2} = 0 \text{ ou } x = \frac{a}{2}.$$

Ces deux droites ont pour point commun $O(\frac{a}{2}; \frac{a}{2})$ et on vérifie que O est un point fixe de Δ_m .

Deuxième solution

• Le triangle DQM est rectangle isocèle, donc :

$$DQ = QM = AP.$$

Le plan est orienté et $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Notons r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors :

$$r(D) = A \text{ et } r(A) = B.$$

Donc $[AD]$ a pour image par r le segment $[AB]$.

Or $DQ = AP$, donc $r(Q) = P$ et le triangle QOP est rectangle isocèle donc la médiatrice de $[PQ]$ passe par O .

$$\begin{aligned} \bullet \vec{MC} \cdot \vec{PQ} &= \vec{MC} \cdot (\vec{PA} + \vec{AQ}) = \vec{MC} \cdot \vec{PA} + \vec{MC} \cdot \vec{AQ} \\ &= \vec{PB} \cdot \vec{PA} + \vec{QD} \cdot \vec{AQ} \\ &= -PA \times PB + AQ \times QD \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc (MC) et (PQ) sont deux droites perpendiculaires.

9 • Première solution : avec les transformations (spécialité)

Notons h_1 l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$

et h_2 l'homothétie de centre I et de rapport -1 ,

alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $-\frac{2}{3}$ et

$$(h_2 \circ h_1)(A) = h_2(B) = D.$$

Le centre est donc aligné avec I et E et avec A et D ,

$$\text{c'est donc } J. \text{ Ainsi } \vec{JD} = -\frac{2}{3}\vec{JA}.$$

Notons h_3 l'homothétie de centre J et de rapport $-\frac{2}{3}$

et h_4 l'homothétie de centre F qui transforme D en C

donc de rapport $\frac{3}{2}$. Donc $h_4 \circ h_3$ a pour rapport -1 , et :

$$(h_4 \circ h_3)(A) = h_4(D) = C.$$

Le centre de $h_4 \circ h_3$ est aligné avec F et J et avec A et C , c'est donc K , car $\vec{KC} = \vec{AK}$. Ainsi F, J, K sont alignés.

Deuxième solution

Considérons le système $(A, 2), (E, 1), (D, 3)$.

Le barycentre de (A, 2), (E, 1) est B et celui de (B, 3), (D, 3) est I, donc le barycentre de (A, 2), (D, 3) est J, aligné avec I et E.

De même, en considérant le système, (F, 1), (C, 2), (A, 2), D est le barycentre de (F, 1), (C, 2) et J celui de (D, 3) et (A, 2), donc J est le barycentre de (F, 1), (C, 2), (A, 2). Ainsi (FJ) coupe (AC) au barycentre de (C, 2), (A, 2), c'est-à-dire K et F, J, K sont alignés.

10 • **1.** (FH) est perpendiculaire à (GE) et (AE) donc au plan GEAC et en particulier à (AG).

On démontre de même que (FC) est perpendiculaire au plan BGHA donc à (GA).

Ainsi (GA) est perpendiculaire à (FH) et (FC) donc au plan FCH.

$$\begin{aligned} \text{De plus } 3 \overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

Ainsi G, I, A sont alignés et (GA) coupe le plan FCH en I.

2. H a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0) et C(0 ; 1 ; 1) donc le plan FHC a pour équation $x - y + z = 0$.

De plus G et A ont respectivement pour coordonnées (0 ; 1 ; 0) et (1 ; 0 ; 1) donc \overrightarrow{GA} a pour coordonnées (1 ; -1 ; 1).

Il en résulte que \overrightarrow{GA} est un vecteur normal au plan FHC.

I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{GI}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

donc $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{GA}$, d'où le résultat.