chapitre 15 Droites et plans dans l'espace

Activités (page 404)

ACTIVITÉ 1

Exemple 1 :

1. On résout le système formé de [2] et [3] :

$\begin{cases} x - 2y = 1 - z \\ x + y = 2 + z \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 + 2y - z \\ 1 + 3y - z = 2 + z \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 1 + 2y - z \\ y = \dfrac{1 + 2z}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \dfrac{5 + z}{3} \\ y = \dfrac{1 + 2z}{3} \end{cases}$

Par substitution dans [1] : $2\left(\dfrac{5 + z}{3}\right) - \dfrac{1 + 2z}{3} + 3z = 0$,

d'où : $z = -1$, puis $x = \dfrac{4}{3}$ et $y = -\dfrac{1}{3}$.

2. (S) admet le triplet $\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{1}{3}; -1\right)$ pour unique solution.

Exemple 2 :

1. $\begin{cases} L_1 + L_2 : 2x + 2y = -2 \\ L_2 + L_3 : 2x = 2 \end{cases}$

2. D'où $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$.
S'il existe des solutions, alors seul le triplet $(1; -2; 1)$ peut en être une.

3. Réciproquement, le triplet $(1; -2; 1)$ est bien solution.
Ainsi (S) admet le triplet $(1; -2; 1)$ pour unique solution.

Exemple 3 :

1. Par la méthode de Gauss, (S) équivaut à :

$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ z = 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Ainsi (S) admet le triplet $(1; 2; 3)$ pour unique solution.

Travaux dirigés (page 415)

TD 1

1 **1. a)** G barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) est aussi celui de (A, 1), (K, 3) (règle d'associativité).

Ainsi $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AK}$.

b) Même raisonnement pour les autres médianes : G est situé aux trois quarts de chacune d'elles en partant du sommet.
2. a) G barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) est aussi celui de (I, 2), (J, 2) (*règle d'associativité*).
Ainsi G est le milieu de la bimédiane [IJ].
b) Même raisonnement pour les autres bimédianes d'où le résultat.

2 **1. a)** $\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ équivaut à P est le barycentre de $\left(B, \dfrac{4}{5}\right)$, $\left(C, \dfrac{1}{5}\right)$, donc de (B, 4), (C, 1).

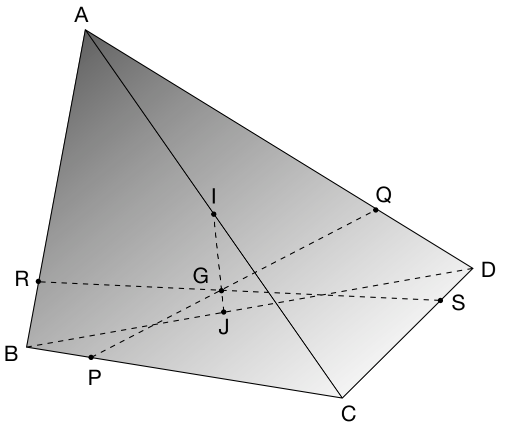
De même, Q est celui de (A, 1), (D, 3).

b) G est le barycentre de (P, 5), (Q, 4) (*règle d'associativité*), donc G $\in$ (PQ).

2. De même, R est le barycentre de (A, 1), (B, 4) et S celui de (C, 1), (D, 3), donc G est le barycentre de (R, 5), (S, 4) ; ainsi G $\in$ (RS). Ainsi (PQ) et (RS) sont sécantes en G.

3. I est le milieu de [AC]; on note J le barycentre de (B, 4), (D, 3); G est le barycentre de (I, 2), (J, 7) (*nouvelle utilisation de la règle d'associativité*).

Ainsi J $\in$ (BD) et J $\in$ (IG) ; (IG) et (BD) sont sécantes en J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$.



TD 2

1 **2. a)** Lorsque $m = 0$, $G_0 = O$.

b) Lorsque $m = 1$, G_1 est le barycentre de (O, 1), (A, 1), (B, 1), (C, – 2).

$\overrightarrow{G_1O} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - 2\,\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$,

d'où $\overrightarrow{G_1O} + 2\,\overrightarrow{G_1I} - 2\,\overrightarrow{G_1C} = 0$, donc $\overrightarrow{OG_1} = 2\,\overrightarrow{CI}$.

c) Pour tout réel m de [0 ; 1],

$\overrightarrow{G_mO} + m\overrightarrow{G_mA} + m\overrightarrow{G_mB} - 2m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$,

d'où $\overrightarrow{G_mO} + 2m\overrightarrow{G_mI} - 2_m\overrightarrow{G_mC} = \vec{0}$,

soit $\overrightarrow{OG_m} = 2m\overrightarrow{CI}$.

Ainsi $\overrightarrow{OG_m} = m\,\overrightarrow{OG_1}$, $m \in [0; 1]$.

Le lieu de G_m est le segment [OG_1].

2 **Méthode 1**

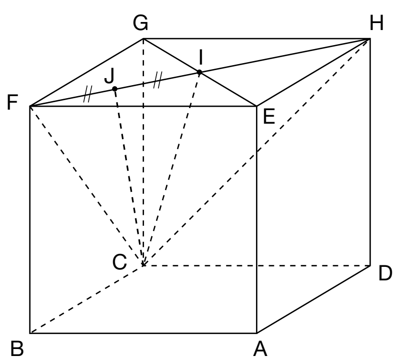
1. Pour tout réel m de [0; 1], d'après le théorème d'associativité, P_m est le barycentre de (I, $2m$), (F, $2m$), (C, $4 - 4m$), donc $P_m \in$ (FIC).

2. Par une nouvelle application du théorème d'associativité, P_m est le barycentre de (J, $4m$), (C, $4 - 4m$) soit de (J, m), (C, $1 - m$).

$m\overrightarrow{P_mJ} + (1 - m)\overrightarrow{P_mC} = \vec{0}$,

d'où $m(\overrightarrow{P_mJ} - \overrightarrow{P_mC}) + \overrightarrow{P_mC} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{CP_m} - m\overrightarrow{CJ} = \vec{0}$.

3. Pour tout réel m de [0 ; 1], $\overrightarrow{CP_m} = m\overrightarrow{CJ}$ donc le lieu de P_m est le segment [CJ].



Méthode 2

1. P_m a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}m; \frac{1}{4}m; m\right)$.

2. D'où une représentation paramétrique du lieu de P_m :

$$\begin{cases} X_m = \frac{3}{4}m \\ Y_m = \frac{1}{4}m,\ m \in [0; 1] \\ Z_m = m \end{cases}$$

Ce lieu est le segment d'extrémités les points C(0; 0; 0) et C′$\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; 1\right)$.

3. On vérifie aisément que J = C′ et on retrouve que le lieu de P_m est [CJ].

TD 3

1 **1. a)** $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ (immédiat).

b) $M(x; y; z) \in \mathcal{P}_V \Leftrightarrow \overrightarrow{VM} \cdot \overrightarrow{AV} = 0$.

Ainsi $\mathcal{P}_V : (x - m)(m - a) + (y - n)(n - b) + z(-c) = 0$.

Or, $m^2 + n^2 = 1$, donc

$\mathcal{P}_V : (m - a)x + (n - b)y - cz - 1 + am + bn = 0$.

2. a) $\mathcal{P}_I : (1 - a)\,x - by - cz - 1 + a = 0$;

$\mathcal{P}_J : - ax + (1 - b)y - cz - 1 + b = 0$;

$\mathcal{P}_K : - ax - (1 + b)\,y - cz - 1 - b = 0$.

b) $\begin{cases} (1 - a)x - by - cz = 1 - a \\ - ax + (1 - b)y - cz = 1 - b \\ - ax - (1 + b)y - cz = 1 + b \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = -a \\ y = -b \\ z = \dfrac{a^2 + b^2 - 1}{c} \end{cases}$

D'où les coordonnées de F.

3. $\overrightarrow{FV}\begin{pmatrix} m + a \\ n + b \\ -\dfrac{a^2 + b^2 - 1}{c} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AV}\begin{pmatrix} m - a \\ n - b \\ -c \end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{FV} \cdot \overrightarrow{AV} = 0$, puisque $m^2 + n^2 = 1$; ainsi pour tout point V de Γ, F $\in \mathcal{P}_V$.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 418)

1. Caractérisations barycentriques

1 **a)** $t = \frac{1}{2}$. **b)** $t = \frac{3}{5}$. **c)** $t = -1$.

2 **a)** $\alpha = 5, \beta = 2$. **b)** $\alpha = 3, \beta = -1$. **c)** $\alpha = 4, \beta = -3$.

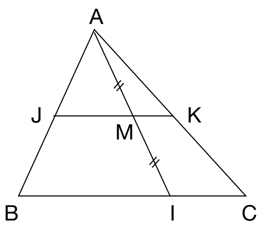
3 **Dessin 1 :**
A : barycentre de (B, 5), (C, – 3);
B : barycentre de (A, 2), (C, 3);
C : barycentre de (A, – 2), (B, 5).
Dessin 2 :
A : barycentre de (B, 2), (C, 1);
B : barycentre de (A, 3), (C, – 1);
C : barycentre de (A, 3), (B, – 2).

4 **a)** $x = 1, y = 1$. **b)** $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$.

5 **a)** $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = -1$. **b)** $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$.
c) $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4$. **d)** $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$.

6 *Corrigé dans le manuel.*

7 **1.** I décrit le segment [BC].
2. D'après le théorème d'associativité, M est le barycentre (A, 1), (I, 1) donc le milieu de [AI].



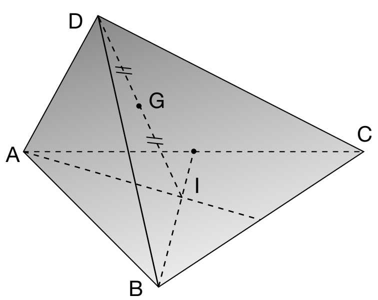
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ donc M est l'image de I dans l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Le lieu du point M est l'image de [BC] par h c'est-à-dire le « segment des milieux » [JK].

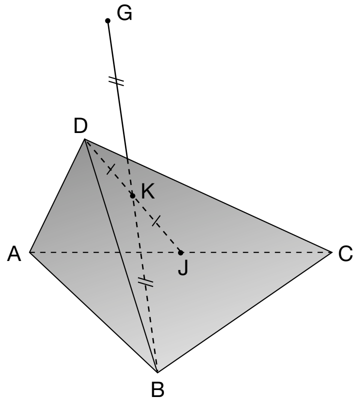
8 $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$.
G est le barycentre de (A, 1), (B, 2), donc $\lambda = 2$.

9 $a = 4, b = 1, c = 1, d = 2$.

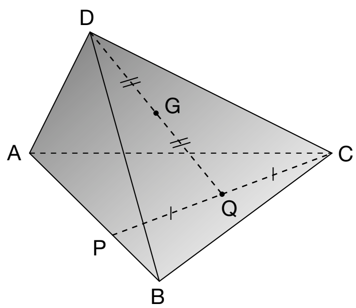
10 **a)** G : barycentre de (I, 3), (D, 3) avec I centre de gravité de ABC. Donc G est le milieu de [ID].



b) G : barycentre de (J, – 2), (D, – 2), (B, 2) avec J milieu de [AC]; G : barycentre de (K, – 4), (B, 2) avec K milieu de [JD]. Ainsi $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BK}$. Donc G est le symétrique de B par rapport à K.

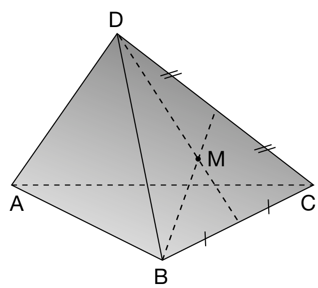


c) G : barycentre de (P, 3), (C, 3), (D, 6) avec P barycentre de (A, 1), (B, 2); G :barycentre de (Q, 6), (D, 6) avec Q milieu de [PC]. Donc G est le milieu de [DQ].

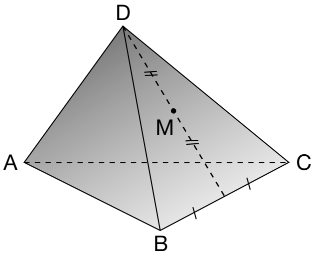


11 **1.** $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AD}$ donc E est le barycentre de (A, 1 – a), (D, a). De même, F est le barycentre de (B, 1 – a), (C, a).
2. a) Soit G le barycentre de (A, 1 – a), (B, 1 – a), (C, a), (D, a). D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de (E, 1), (F, 1).
Donc G = H, milieu de [EF].
b) Mais H est aussi barycentre de (I, 2 – 2a), (J, 2a), donc I, J et H sont alignés.

12 **a)**
$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$;
M est l'isobarycentre de B, C, D donc $M \in (BCD)$.



b) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\,\overrightarrow{MD} = \vec{0}$; M est le barycentre de (B, 1), (C, 1), (D, 2) donc M $\in$ (BCD).



2. Représentation paramétrique d'une droite

13

a) $d : \begin{cases} x = -1 \\ y = t + 2,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = -t \end{cases}$

b) $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t - 1 \end{cases}$

14

a) $(AB) : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

b) $[AB] : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1,\ t \in [0;\ 1]. \\ z = t \end{cases}$

c) $[AB) : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1,\ t \in [0\,;+\infty[. \\ z = t \end{cases}$

d) $[BA) : \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -2t + 3,\ t \in [0\,;+\infty[. \\ z = -t + 1 \end{cases}$

15 **a)** (E_1) : demi-droite d'origine A(1 ; 0 ; – 2) dirigée par $\vec{u}(2\,;3 - 1)$.
b) (E_2) : segment [AB] avec A(1 ; 0 ; – 2) et B(3 ; 3 ; – 3).
c) (E_3) : segment [AB'] avec A(1 ; 0 ; – 2) et B'(– 1 ; – 3 ; – 1).

Note : ce segment est le symétrique de [AB] par rapport à A.

d) (E_4) : demi-droite d'origine A(1 ; 0 ; – 2) dirigée par le vecteur $-\vec{u}(-2\,;-3\,;1)$.

16 **1.** $\vec{u}(-2;-1;1)$, I(1 ; 1 ; – 2).
2. $A \in d$, $(t = -1)$, $B \notin d$.
3. M(– 4011 ; – 2005 ; 2004).

17 *Corrigé dans le manuel.*

18

a) $d' : \begin{cases} x = 1 \\ y = t - 3,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 9 \end{cases}$

b) $d' : \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = 3t - 3 \quad ,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = -2t + 9 \end{cases}$

c) $d' : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 3 \quad ,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = -3t + 9 \end{cases}$

19 **Oui :** $d = (A; \vec{u})$ avec $\vec{u}(2;1;-3)$ et A(– 1 ; 0 ; 1) ; d' a pour vecteur directeur $\vec{u'} = -3\vec{u}$ et $A \in d'$, $\left(s = \dfrac{2}{3}\right)$, donc $d = d'$.

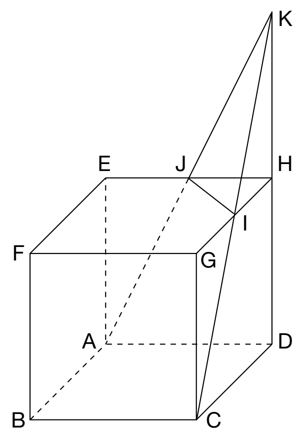
20 **1.** Les droites (AJ) et (CI) ont pour représentations paramétriques

$(AJ) : \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$; $(CI) : \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}s + 1 \\ y = 1 \\ z = s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}.$

2. La résolution du système conduit à : $s = t = 2$. Ainsi (AJ) et (CI) sont sécantes au point K(0 ; 1 ; 2).

3. Dans le triangle EGH, $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ soit $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Ainsi les points A, C, I, J sont coplanaires et ACIJ est un trapèze de bases [AC] et [IJ], donc (AJ) et (CI) sont sécantes en un point K.



Remarque : (AJ) et (CI) sont contenues respectivement dans les plans (AEH) et (CGH) sécants suivant la droite (DH) donc K appartient aussi à (DH). Considérons l'homothétie h de centre I et de rapport – 1 telle que G $\mapsto$ H. La droite (GC) a pour image sa parallèle passant par H c'est-à-dire (DH) ; ainsi l'image de C est à l'intersection de (CI) et (DH), c'est donc K. D'où $\overrightarrow{HK} = -\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{HD}$; ainsi H est le milieu de [DK].

21 $d = (A; \vec{u})$ avec $\vec{u}(2;-4;3)$ et A(– 1 ; 1 ; 2).

d' a pour vecteur directeur $\vec{u'} = -\dfrac{1}{6}\vec{u}$ et $A \in d'$, $(t = -3)$, donc $d = d'$.

22

1. (IK) : $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

(FJ) : $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}s+1 \\ y = s \\ z = -s+1 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} -t+1 = -\dfrac{1}{2}s+1 \\ \dfrac{1}{2} = s \\ t = -s+1 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Donc (IK) et (FJ) ne sont pas sécantes. Or $\overrightarrow{IK}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{FJ}\left(-\dfrac{1}{2};\ 1;\ -1\right)$ ne sont pas colinéaires, donc (IK) et (FJ) ne sont pas parallèles. Donc I, J, K, L sont non coplanaires.

3. Dans le triangle BCD, $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; donc $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FH}$.
Ainsi $H \in (IJF)$ et $K \notin (IJF)$.

3. et 4. Intersections de plans et de droites

23 **a)** $\overrightarrow{n_1}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{n_2}(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$d : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

$d = (A;\vec{u})$ avec $A(1;1;0)$ et $\vec{u}(-1;1;1)$.
b) $\overrightarrow{n_1}(-1;1;1)$ et $\overrightarrow{n_2}(2;-1;2)$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$d : \begin{cases} x = -3t+4 \\ y = -4t+7 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

$d = (A;\vec{u})$ avec $A(4;7;0)$ et $\vec{u}(-3;-4;1)$.

24 **1.**

$d' : \begin{cases} x = 2t+\dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. a) d et d' ont même vecteur directeur $\vec{u}(2;0;1)$.
b) $A(-1;2;1) \in d$ mais $A \notin d'$, donc d est strictement parallèle à d'.

25 *Corrigé dans le manuel.*

26 Intersection :
- de $\mathcal{P}$ et de $(O;\vec{i})$: $I(2;0;0)$;
- de $\mathcal{P}$ et de $(O;\vec{j})$: $J(0;3;0)$;
- de $\mathcal{P}$ et de $(O;\vec{k})$: $K(0;0;-6)$.

27 **a)** $\overrightarrow{AB}(2;0;-4)$, $\vec{n}(1;1;1)$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2$.
Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} \neq 0$, d et $\mathcal{P}$ sont sécants en I.

$\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = 2 \\ z = -4t+3 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$. Donc $I(2;2;-3)$.

b) $\vec{u}(1;-2;0)$, $\vec{n}\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{6}\right)$ d'où $\vec{u}\cdot\vec{n} = -\dfrac{1}{6}$.
Puisque $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$, d et $\mathcal{P}$ sont sécants en I.

$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t-1 \\ z = 0 \\ 3x+2y-z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$. Donc $I(0;3;0)$.

28 **a)** $\vec{n}(1;-1;2)$, $\vec{u}(2;1;-3)$; $\vec{u}\cdot\vec{n} = -5$.
d et $\mathcal{P}$ sont sécants en $I(-1;0;1)$.
b) $\vec{n}(2;3;-1)$, $\vec{u}(1;2;8)$; $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$.
d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.
Or $A(1;1;-3) \in d$ et $A \notin \mathcal{P}$, donc $d \cap \mathcal{P} = \varnothing$.

29 **1. a)** d : droite passant par $A(-1;0;1)$ et dirigée par $\vec{u}(4;2;3)$;
$\mathcal{P}$: plan d'équation $x+y-2z = 1$ de vecteur normal $\vec{n}(1;1;-2)$.
b) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$. De plus, $A \in d$ et $A \notin \mathcal{P}$, donc d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.
L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \varnothing$.
2. Par substitution des trois premières équations dans la quatrième, $0t-3 = 1$, donc (S) n'a pas de solution.

30 **a)** Un seul point commun : $I(2;1;-1)$.
b) Un seul point commun : $J(-8;13;22)$.

31 **a)** Une droite commune $d : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{5}t \\ y = \dfrac{1}{5}t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Une droite commune $d : \begin{cases} x = -\dfrac{7}{5}t+1 \\ y = \dfrac{1}{5}t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

32 **a)** $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$. **b)** $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$.

33 • Système (S) : $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont strictement parallèles; $\mathcal{P}_1$ est sécant à $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.
L'ensemble des solutions de (S) est $\mathcal{S} = \emptyset$.

34 **1.** $\vec{n_2}(3; 2; -4)$ et $\vec{n_3}(3; -5; 13)$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivant d.

$$d : \begin{cases} x = -\dfrac{2}{7}t + 1 \\ y = \dfrac{17}{7}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$d = (\mathrm{A}; \vec{u})$ avec $\mathrm{A}(1; 0; 0)$ et $\vec{u}(-2; 17; 7)$.
2. Pour tout point M de d,

$$2x - y + 3z = -\frac{4}{7}t + 2 - \frac{17}{7}t + 3t = 2,$$

donc $\mathrm{M} \in \mathcal{P}_1$; ainsi $d \subset \mathcal{P}_1$.
3. L'ensemble des solutions de (S) est constitué des triplets $\left(-\dfrac{2}{7}t + 1;\ \dfrac{17}{7}t;\ t\right)$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Il est représenté par la droite d commune aux trois plans.

35 **1.** $\vec{n_1}(1\,; -1\,; -2)$, $\vec{n_2}(2\,; 3\,; 1)$, $\vec{n_3}(3\,; 2\,; -1)$.
Ces vecteurs normaux pris deux à deux ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants deux à deux.
2. Intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

$$d : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$ $d = (\mathrm{A}\,; \vec{u})$ avec $\mathrm{A}(1\,; 1\,; 0)$ et $\vec{u}(1\,; -1\,; 1)$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{n_3} = 0$. De plus, $\mathrm{A} \in d$ et $\mathrm{A} \notin \mathcal{P}_3$ donc d est strictement parallèle à $\mathcal{P}_3$.
Ensemble des solutions du système : $\mathcal{S} = \emptyset$.

36 **1. a)** $\vec{n}(2\,; -1\,; 0)$ et $\vec{n}'(3\,; 1\,; -1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite Δ.

b) $\mathrm{M}(x\,; y\,; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = 5x + 5 \end{cases}$ d'où $\Delta : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + 5 \\ z = 5\alpha + 5 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

2. a) Vrai ! Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,; 2\,; 5)$ et $\mathcal{Q}$ pour vecteur normal $\vec{v}(5\,; -5\,; 1)$ d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Ainsi $\Delta \,//\, \mathcal{Q}$.
b) Faux ! Δ' a pour vecteur directeur $\vec{u}'(-3\,; 1\,; 2)$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc Δ et Δ' ne sont pas parallèles.

En outre, le système $\begin{cases} \alpha = -3\beta \\ 2\alpha + 5 = 1 + \beta \\ 5\alpha + 5 = 2 + 2\beta \end{cases}$

n'a pas de solution donc Δ et Δ' sont non coplanaires.

37 **1. a)** $\mathcal{P}_0 : y + z + 3 = 0$, $\mathcal{P}_1 : x + y + 4 = 0$. Or $\vec{n_0}(0\,; 1\,; 1)$ et $\vec{n_1}(1\,; 1\,; 0)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}$j$_1$ sont sécants suivant une droite Δ.

b) $\mathrm{M}(x\,; y\,; z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 3 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y - 3 \\ x = -y - 4 \end{cases}$

d'où $\Delta : \begin{cases} x = -t - 4 \\ y = t \\ z = -t - 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

c) $\mathrm{A} \in \Delta\ (t = -4)$ et $\mathrm{B} \in\ (t = -5)$.
d) $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_m$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{P}_m$ donc $(\mathrm{AB}) = \Delta$ est contenue dans $\mathcal{P}_m$.
2. $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}} : x + 2y + z + 7 = 0$,

$\mathcal{P}_m : mx + y + (1 - m)z + m + 3 = 0$. $\vec{n_{\frac{1}{2}}}(1\,; 2\,; 1)$ et $\vec{n_m}(m\,; 1\,; 1 - m)$ sont tels que $\vec{n_{\frac{1}{2}}} \cdot \vec{n_m} = 3$.

Ainsi pour tout m, $\vec{n_{\frac{1}{2}}} \cdot \vec{n_m} \neq 0$ donc il n'existe aucun plan $\mathcal{P}_m$ orthogonal à $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

Pour $m_1 \neq \dfrac{1}{2}$, $\mathcal{P}_{m_1} \perp \mathcal{P}_{m_2} \Leftrightarrow \vec{n_{m_1}} \cdot \vec{n_{m_2}} = 0$
$\Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 + (1 - m_1)(1 - m_2) = 0$ soit

$$\mathcal{P}_{m_1} \perp \mathcal{P}_{m_2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{m_1 - 2}{2m_1 - 1}.$$

38 **1.** Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(1\,; 3\,; -1)$.
$\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ passe par A d'où $\mathcal{P}$: $x + 3y - z + 4 = 0$.

2. $\mathrm{H}(x\,; y\,; z)$ est tel que $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$. Ainsi $\mathrm{H}(1\,; -1\,; 2)$ d'où $\mathrm{AH} = \sqrt{6}$.

Note : AH représente la distance du point A à la droite Δ de l'espace.

39 Prouver un alignement

Les outils :
- Colinéarité de vecteurs.
- Propriétés de l'isobarycentre.
- Géométrie analytique.

Les objectifs :
- Prouver un alignement.
- Calculer un coefficient de colinéarité.

1. a) D'après la règle du parallélépipède :
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.\ [1]$$
b) I est le centre de gravité de BDE donc pour tout point M, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = 3\,\overrightarrow{MI}$.
D'où, lorsque M = A, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AI}$. [2]
c) D'après [1] et [2], $\overrightarrow{AG} = 3\,\overrightarrow{AI}$ d'où l'alignement de A, G et I.
2. a) $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de la droite (AG) d'où
$$(AG) : \begin{cases} x = t \\ y = t\,,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$
b) $I\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$
c) Ainsi $I \in (AG)$ et $t = \frac{1}{3}$.

40 Trouver un point de concours

Les outils :
- Relations vectorielles et barycentres.
- Barycentre de deux points et alignement.
- Règle d'associativité.

Les objectifs :
- Établir des relations barycentriques.
- Prouver le concours de trois droites.

1. a) $\overrightarrow{AP} = x\,\overrightarrow{AB}$ donc le point P est le barycentre de $(A, 1-x)$, (B, x).
b) De même, Q est le barycentre de $(A, 1-x)$, (D, x); R celui de $(C, 1-x)$, (D, x); S celui de (B, x), $(C, 1-x)$.
2. a) Soit G le barycentre de $(A, 1-x)$, (B, x), $(C, 1-x)$, (D, x).
L'existence est assurée car la somme des coefficients est 2, donc non nulle.
b) D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de (P, 1), (R, 1) mais aussi de (Q, 1), (S, 1) et de $(I, 2-2x)$, $(J, 2x)$. Ainsi (PR), (QS) et (IJ) concourent en G.

41 Trouver l'intersection de trois plans

Les outils :
- Appartenance d'un point à un plan d'équation donnée.
- Intersection de plans.
- Système linéaire.

Les objectifs :
- Définir l'intersection de trois plans.
- Résoudre un système linéaire.

1. Solution 1
a) A, C, G, E appartiennent à $\mathcal{P}_1 : x - y = 0$.
b) A, B, G, H appartiennent à $\mathcal{P}_2 : y - z = 0$.
A, F, G, D appartiennent à $\mathcal{P}_3 : x - z = 0$.
c) $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ contient A et G, d'où :
$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (AG).$$
2. Solution 2
a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$.
b) Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = d$, où d est la droite définie par :
$$d : \begin{cases} x = t \\ y = t\,,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$
$d = (A; \vec{u})$ avec $\vec{u}(1; 1; 1)$.

42 Trouver un lieu dans l'espace

Les outils :
- Relations vectorielles.
- Décomposition d'un vecteur sur une base.
- Caractérisation du milieu d'un segment.

Les objectifs :
- Étudier un lieu dans l'espace.
- Caractériser analytiquement l'intérieur d'un parallélogramme.

1. a) Lorsque M = A et M′ = C, I = E ;
M = B et M′ = C, I = F ;
M = A et M′ = D, I = G ;
M = B et M′ = D, I = H.
Donc E, F, G, H sont des points de $\mathcal{L}$.
b) Dans les triangles ABC et ABD, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.
Ainsi EFHG est un parallélogramme.
2. a) I est le milieu de [MM′] donc $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EM'}$.
Or $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CM'}$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM'}$
donc $2\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM'}$ [1].
b) $M \in [AB]$ et $M' \in [CD]$ donc il existe des réels x et y dans [0 ; 1] tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM'} = y\overrightarrow{CD}$.
c) D'après [1], $2\overrightarrow{EI} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$
d'où $\overrightarrow{EI} = x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ soit $\overrightarrow{EI} = x\overrightarrow{EF} + y\overrightarrow{EG}$
avec $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.
Ainsi $\mathcal{L}$ est contenu dans l'intérieur du parallélogramme EFHG.
3. a) $\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{EG}$ ($a \in [0\,;1]$, $b \in [0\,;1]$ s'écrit
$\overrightarrow{EJ} = \frac{a}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{b}{2}\overrightarrow{CD}$ d'où $2\overrightarrow{EJ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}$.

b) Notons M le point de [AB] tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et M′ celui de [CD] tel que $\overrightarrow{CM'} = b\overrightarrow{CD}$. Alors $2\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM'}$.

c) On en déduit que :
$2\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{JM'}$

soit $\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JM'} = \vec{0}$.
Donc J est le milieu de [MM′].
Ainsi l'intérieur du parallélogramme EFGH est contenu dans $\mathscr{L}$.
Finalement, le lieu $\mathscr{L}$ cherché est l'intérieur du parallélogramme EFHG (frontières comprises).

Pour progresser

(page 424)

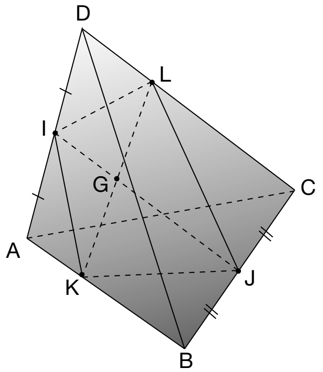
Barycentres

43 I est le barycentre de (A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 1).
K est le barycentre de (A, 3), (B, – 2), (C, – 2), (D, – 2).

44 **1. a)** Par utilisation du théorème d'associativité, G est le barycentre de (I, 4), (J, 2), donc G, I, J sont alignés.
b) Or K est le barycentre de (A, 2), (B, 1), et L celui de (C, 1), (D, 2), donc G est aussi le barycentre de (K, 3), (L, 3). Ainsi G, K, L sont alignés.

Note : G est le milieu de [KL].

2. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes, donc I, J, K, L sont coplanaires.



45 **1. a)** $M\left(\dfrac{2}{t+4}; \dfrac{1}{t+4}; \dfrac{1}{t+4}\right)$, $J\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

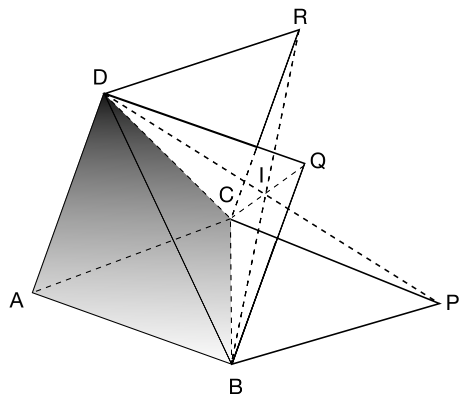
b) (AJ) : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{4}t\,,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = \dfrac{1}{4}t \end{cases}$

c) $M \in (AJ)$ avec $\lambda = \dfrac{4}{t+4}$.

2. J est le barycentre de (B, 2), (C, 1), (D, 1) ; d'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de (A, t),(J, 4), d'où $M \in (AJ)$ avec $\overrightarrow{AM} = \dfrac{4}{t+4}\ \overrightarrow{AJ}$.

46 • **1. a)** ABPC est un parallélogramme, donc :
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$
d'où P est le barycentre de (A, – 1), (B, 1), (C, 1).
b) De même, Q est le barycentre de (A, – 1), (B, 1), (D, 1) et R celui de (A, – 1), (C, 1), (D, 1).
2. Soit I le barycentre de (A, – 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1); d'après le théorème d'associativité, I est le barycentre de (P, 1), (D, 1), mais aussi de (Q, 1), (C, 1) et de (R, 1), (B, 1).
Ainsi les droites (DP), (CQ) et (BR) concourent en I et I est le milieu de [DP], [CQ] et [BR].

Remarque : Il s'agit de trois des diagonales du parallélépipède défini par $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.



47 • **1. a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$ (*règle du parallélépipède*).
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$
$= -1 + 1 + 0 = 0.$
b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$
$= -1 + 0 + 1 = 0.$
c) $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$ donc (AG) ⊥ (BDE).
2. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AI}$, donc $I \in (AG)$; de plus, $I \in (BDE)$, donc I est le point d'intersection de (AG) et (BDE). De plus, I est le point de [AG] tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\ \overrightarrow{AG}$.

3. a) (BDE) : $x + y + z = 1$.

Note : Utiliser le résultat de l'exercice 66 ou du chapitre 14 p. 385.

b) $\vec{n}(1; 1; 1)$, vecteur normal à (BDE), est un vecteur directeur de Δ, d'où :

$$\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Donc $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

d) La distance de H au plan (BDE) est :

$$HJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Note : Cette distance peut être obtenue à partir de l'équation de (BDE) (*voir chapitre 14*), $d(\text{H}; (\text{BDE})) = \dfrac{|x_H + y_H + z_H - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ensemble de points

48 *Corrigé dans le manuel.*

49 $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$
$= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ (indépendant de M);
$\vec{v} = 2\overrightarrow{MI}$, avec I milieu de [DE].
1. $M \in \Delta \Leftrightarrow \vec{u}$ colinéaire à $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}$ colinéaire à $\vec{u}$.
Donc Δ est la droite passant par I et dirigée par le vecteur $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
2. $M \in \Gamma \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}\|\vec{u}\|$.
Donc Γ est la sphère de centre I, et de rayon :

$$r = \frac{1}{2}\|2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\|.$$

50 **1.** G_1 est le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, – 1) :

$$2\,\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{AG_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

G_{-1} est le barycentre de (A, 2), (B, – 1), (C, 1) :

$$2\,\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} + \overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}, \text{ donc } \overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

2. a) Pour tout réel k de [– 1; 1],

$$(k^2 + 1)\overrightarrow{G_kA} + k\,\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kC} = \vec{0},$$

d'où $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2 + 1}\overrightarrow{BC}$.

b) Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f(x) = -\dfrac{x}{x^2 + 1}$;

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

x	-1		1
$f'(x)$	0	$-$	0
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

c) Lorsque k décrit [– 1; 1], le coefficient $-\dfrac{k}{k^2 + 1}$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ image de [– 1; 1] par f.
Ainsi l'ensemble des points G_k est le segment $[G_1G_{-1}]$ de la droite parallèle à (BC) passant par A.
3. $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \|2\,\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\,\overrightarrow{MG_{-1}}\| \Leftrightarrow MG_1 = MG_{-1}$.
$\mathscr{E}$ est le plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$.
4. Pour tout point M, $2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ $= 2\,\overrightarrow{IA}$ où I est le milieu de [BC].
$M \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \|2\,\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\,\overrightarrow{IA}\| \Leftrightarrow G_1M = IA$.
$\mathscr{F}$ est la sphère de centre G_1 et de rayon R = IA.
5. a) $G_1(0; 0; 0)$ donc $G_1 = O$; $G_{-1}(0; 0; 4)$.
$\mathscr{E}$, plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$, a pour équation $z = 2$;
$\mathscr{F}$, sphère de centre $O = G_1$ et de rayon $R = IA = \sqrt{6}$, a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Le système $\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Donc $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont sécants suivant le cercle Γ :
$x^2 + y^2 = 2$ situé dans le plan $\mathscr{E}$.
b) Rayon de Γ : $r = \sqrt{2}$.

51 **1. a)** G_1 est le barycentre de (I, 2), (C, – 1), (D, 1), d'où $2\,\overrightarrow{G_1I} - \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$,

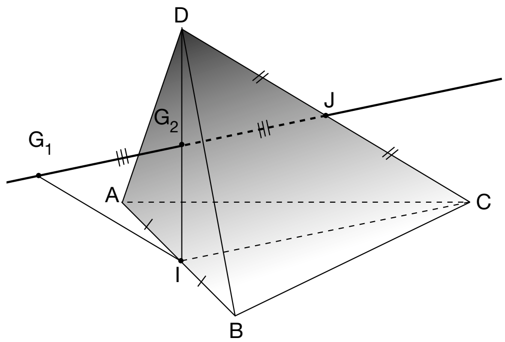
donc $\overrightarrow{IG_1} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{CD}$.

b) G_2 est le barycentre de (I, 2), (D, 2), donc G_2 est le milieu de [ID] et $\overrightarrow{IG_2} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{ID}$.

c) $\overrightarrow{G_2J} = \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IG_2} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) - \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{IC}$;

$\overrightarrow{G_2G_1} = \overrightarrow{IG_1} - \overrightarrow{IG_2} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{CD} - \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{CI}$.

Ainsi $\overrightarrow{G_2J} = -\overrightarrow{G_2G_1}$ donc G_2 est le milieu de $[JG_1]$.
d)



2. a) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^*$.
b) Pour tout point P,

$$2m\,\overrightarrow{PG_m} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + (m - 2)\,\overrightarrow{PC} + m\,\overrightarrow{PD}.$$

Si P = I, $m\,\overrightarrow{IG_m} = \dfrac{m-2}{2}\,\overrightarrow{IC} + \dfrac{m}{2}\,\overrightarrow{ID}$;

ainsi $a = \dfrac{m-2}{2}$ et $b = \dfrac{m}{2}$.

Donc $G_m \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est le plan (ICD).

c) Pour tout $m \neq 0$, $m\,\overrightarrow{JG_m} = m\,\overrightarrow{JI} + m\,\overrightarrow{IG_m}$;

or J est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$;

ainsi $m\,\overrightarrow{JG_m} = -\dfrac{m}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + \dfrac{m-2}{2}\,\overrightarrow{IC} + \dfrac{m}{2}\,\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CI}$ (vecteur constant).

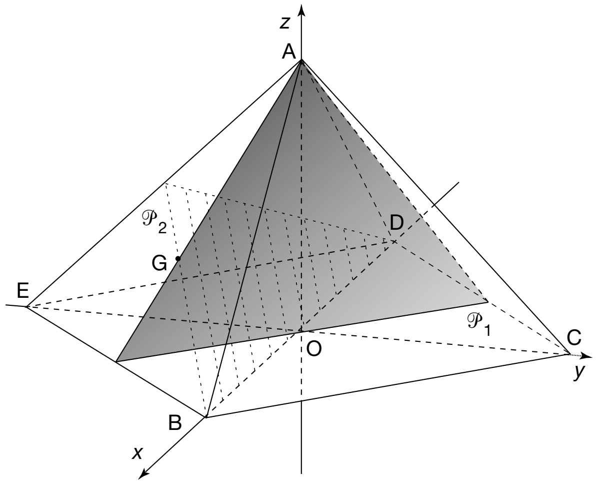
d) Pour tout $m \neq 0$, $\overrightarrow{JG_m} = \dfrac{1}{m}\,\overrightarrow{CI}$.

Lorsque m décrit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{m}$ décrit $\mathbb{R}^*$, donc $\mathcal{F}$ est la droite passant par J et dirigée par $\overrightarrow{CI}$, privée de J.

Note : D'après **1. c)**, $\mathcal{F}$ n'est autre que la droite (JG_2), privée de J.

Intersections d'ensembles

52 **1. a)**



b) O(0; 0; 0) et $G\left(\dfrac{a}{3}; -\dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}\right)$ sont tels que $x + y = 0$ et $y + z = 0$, donc ils appartiennent à $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

c) O et G sont tels que $x - z = 0$, donc ils appartiennent à $\mathcal{P}_3$. Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (OG)$.

2. $(S)\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

L'ensemble des solutions est constitué de tous les triplets $(t; -t; t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

L'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ est donc la droite Δ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$O \in \Delta$ et $G \in \Delta$, donc $\Delta = (OG)$.

53 • *Corrigé dans le manuel.*

54 • **1.** $G\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

(ABC) : $x + y + z = 1$ (*voir l'exercice 66*).

$\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal à (ABC).

Or $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\vec{n}$, donc (OG) ⊥ (ABC).

2. a) (A′B′C′) a pour équation $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, soit : $3x + 3y + 2z = 6$ (*voir l'exercice 66*).

b) $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$ d'où une représentation paramétrique de la droite (AC) : $\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

c) $\vec{n}'(3; 3; 2)$ vecteur normal à (A′B′C′) ; $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}' = -1$.

Puisque $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}' \neq 0$, (AC) et (A′B′C′) sont sécants en un point K; K(4 ; 0 ; – 3).

3. a) De même : (BC) : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

(BC) et (A′B′C′) sont sécants en L(0; 4; – 3).

b) $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{A'B'}(-2; 2; 0)$, $\overrightarrow{KL}(-4; 4; 0)$ sont colinéaires, d'où le parallélisme des droites (AB), (A′B′) et (KL).

c) K ∈ (ABC) ∩ (A′B′C′); L ∈ (ABC) ∩ (A′B′C′), donc les plans distincts (ABC) et (A′B′C′) sont sécants suivant la droite (KL).

55 • **1.** $\overrightarrow{AB}(-1 ; -2 ; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(0 ; 3 ; 5)$ sont non colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés.

2. a) $M \in (DH) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

b) Ainsi $M(x ; y ; z) \in (DH) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + z + 11 = 0 \\ 3y + 5z - 7 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 62 - 5x \\ 13z = -19 + 3x \end{cases}$.

D'où une représentation paramétrique de (DH) :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ 13y = 62 - 5\lambda \\ 13z = -19 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. a) D et E(2 ; 4 ; – 1) sont sur (DH). On peut choisir $\vec{n} = \overrightarrow{DE}$ d'où $\vec{n}(13 ; -5 ; 3)$.

b) (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par B(0 ; 0 ; 1) d'où (ABC) : $13x - 5y + 3z - 3 = 0$.

H projeté orthogonal de D sur (ABC) est tel que

$$\begin{cases} x = \lambda \\ 13y = 62 - 5\lambda \\ 13z = -19 + 3\lambda \\ 13x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Ainsi H(2 ; 4 ; – 1).

Note : H n'est autre que le point E utilisé en **3.a)**.

56 • **1.** $\overrightarrow{AB}(2\,;-6\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;-5\,;-2)$ sont non colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la perpendiculaire au plan (ABC) passant par D. Alors $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$M(x\,;y\,;z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y + 12 = 0 \\ -x - 5y - 2z + 12 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{3} + 2 \\ z = -\dfrac{4}{3}x + 1 \end{cases}.$$

D'où une représentation paramétrique de Δ :
$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{3}t + 2 \\ z = -\dfrac{4}{3}t + 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Le plan (ABC) admet pour vecteur normal un vecteur directeur de Δ, par exemple $\vec{n}(3\,;1\,;-4)$ (ABC) est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par $C(1\,;-1\,;1)$ d'où (ABC) : $3x + y - 4z + 2 = 0$.
D' projeté orthogonal de D sur (ABC) est tel que
$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{3}t + 2 \\ z = -\dfrac{4}{3}t + 1 \\ 3x + y - 4z + 2 = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Ainsi } D'(0\,;2\,;1).$$

57 • **1. a)** $\vec{n}_1(1\,;-2\,;3)$ et $\vec{n}_2(1\,;1\,;1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b) $$M(x\,;y\,;z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3z + 5 \\ 3y = -6 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{5z}{3} \\ y = -2 + \dfrac{2z}{3} \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de Δ :
$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -2 + 2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t \end{cases}$$

2. Δ admet pour vecteur directeur $\vec{n}(-5\,;2\,;3)$.
Ainsi $\mathcal{R}$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par $A(2\,;5\,;-2)$ donc $\mathcal{R} : -5x + 2y + 3z + 6 = 0$.

58 • $\overrightarrow{AB}(1\,;-1\,;1)$ est un vecteur directeur de (AB) et $\overrightarrow{n_m}(m\,;1\,;m)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$.

a) $(AB) \,//\, \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_m} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

b) $(AB) \perp \mathcal{P}_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n_m}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{n_m} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que
$$\begin{cases} m = \lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}.$$

Ainsi $(AB) \perp \mathcal{P}_m$ dans le seul cas où $m = -1$.
c) $\mathcal{P}_m$ contient (AB) peut se traduire par : $(AB) \,//\, \mathcal{P}_m$ et $B \in \mathcal{P}_m$.

La 1re condition est assurée dans le seul cas où $m = \dfrac{1}{2}$;
or $B \notin \mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$ donc il n'y a pas de solution.

59 • Cherchons une représentation paramétrique de d.
$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -x + 3 \\ z = -2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 3 \\ z = -2x \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x = t \\ y = -t - 3,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = -2t \end{cases}$$

$\vec{u}(1\,;-1\,;-2)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}(1\,;1\,;-1)$ un vecteur normal à $\mathcal{R}$.
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires donc d coupe $\mathcal{R}$.
Leur point d'intersection I est tel que
$$\begin{cases} x = t \\ y = -t - 3 \\ z = -2t \\ x + y - z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{9}{2} \\ z = -3 \end{cases}. \text{ Ainsi } I\left(\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{9}{2}\,;-3\right).$$

60 • **1. a)** Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2\,;3\,;2)$
$$\text{d'où } \Delta : \begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = 3t \\ z = 2t + 8 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

b) $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;2\,;-2)$. $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles.
Leur intersection est définie par le système :
$$\begin{cases} 2t + 8 = -5 + 3s \\ 3t = 1 + 2s \\ 2t + 8 = -2s \end{cases}.$$
Ce système n'a pas de solution donc $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.

2. a) Le vecteur $\vec{n}(2\,;-2\,;1)$ est tel que $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$.

Donc $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$.
En outre $\mathcal{P}$ passe par $A(8\,;0\,;8)$ d'où $\mathcal{P}$:
$2x - 2y + z - 24 = 0$.
b) Pour tout point $M(-5 + 3s\,;1 + 2s\,;-2s)$ de $\mathcal{D}$, la distance de M au plan $\mathcal{P}$ est
$$d(M, 3) = \frac{|2(-5 + 3s) - 2(1 + 2s) - 2s - 24|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 12.$$
(valeur indépendante de M).

c) $\vec{n}(2\,;-2\,;1)$ et $\vec{k}(0\,;0\,;1)$ sont des vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}$ et (xOy).
Ils sont non colinéaires donc $\mathcal{P}$ et (xOy) sont sécants suivant une droite d définie par :

$$\begin{cases} z=0 \\ 2x-2y+z-24=0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} z=0 \\ y=x+12 \end{cases}.$$

D'où une représentation paramétrique de d :

$$\begin{cases} x=t \\ y=t-12 \\ z=0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

3. Le centre Ω de $\mathcal{S}$ est un point de la perpendiculaire Δ' à $\mathcal{P}$, passant par C, tel que $C\Omega=6$.
$\vec{n}(2\,;-2\,;1)$ est un vecteur directeur de Δ' d'où Δ' :

$$\begin{cases} x=2t+10 \\ y=-2t+1 \\ z=t+6 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Posons $\Omega(x\,;y\,;z)$. La condition $C\Omega=6$ équivaut à $(x-10)^2+(y-1)^2+(z-6)^2=36$ soit $t^2=4$.
D'où deux points possibles obtenus pour $t=-2$ et $t=2$: $\Omega_1(6\,;5\,;4)$ et $\Omega_2(14\,;-3\,;8)$.
$\mathcal{P}$ détermine deux demi-espaces $\mathcal{E}_1$:
$2x-2y+z-24<0$ et $\mathcal{E}_2 : 2x-2y+z-24>0$.
Or $O\in\mathcal{E}_1$ et on vérifie que $\Omega_1\in\mathcal{E}_1$ alors que $\Omega_2\in\mathcal{E}_2$ donc le seul point qui convient est $\Omega=\Omega_1$. Équation de la sphère $\mathcal{S} : (x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$.

61 **2.** • (BC) : $\begin{cases} x=-2t \\ y=2t+6 \\ z=0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Intersection de (BC) et (OA) :

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=2t+6 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3 \\ x=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Donc (BC) et (OA) sont sécantes en E(6; 0; 0).

• (AB) : $\begin{cases} x=-2t+4 \\ y=4t \\ z=0 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Intersection de (AB) et (OC) :

$$\begin{cases} x=-2t+4 \\ y=4t \\ z=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ x=0 \\ y=8 \\ z=0 \end{cases}$$

Donc (AB) et (OC) sont sécantes en F(0; 8; 0).

Note : (OA) = (Ox) est définie comme l'intersection de deux plans : $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$; de même, pour (OC) = (Oy) : $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$.

3. a) (SEF) : $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{4}=1$, soit $4x+3y+6z-24=0$ *(voir l'exercice 66)*.
b) $A'(1; 0; 3)$.
c) $\mathcal{P}$ a même vecteur normal que (SEF), donc a une équation du type $4x+3y+6z+d=0$;
or $A'\in P$ d'où $d=-22$;
ainsi $\mathcal{P} : 4x+3y+6z-22=0$.
4. a) Intersection de $\mathcal{P}$ et (SO) :

$$\begin{cases} 4x+3y+6z-22=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\dfrac{11}{3} \end{cases};$$

donc $O'\left(0;\ 0;\ \dfrac{11}{3}\right)$.

Note : (SO) = (Oz) : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

b) Intersection de (SC) et $\mathcal{P}$:

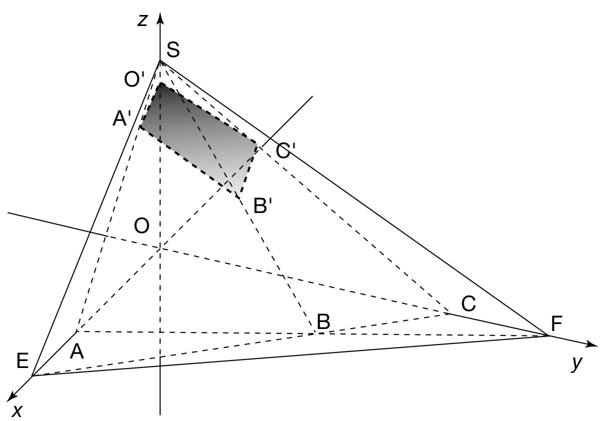
$$\begin{cases} x=0 \\ y=6t+6 \\ z=-4t \\ 4x+3y+6z-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{2}{3} \\ x=0 \\ y=2 \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases};$$

donc $C'\left(0;\ 2;\ \dfrac{8}{3}\right)$.

c) Intersection de (SB) et $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=4t \\ z=-4t+4 \\ 4x+3y+6z-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases};$$ donc $B'(1; 2; 2)$.

5. $\overrightarrow{O'A'}\left(1;\ 0;\ -\dfrac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{C'B'}\left(1;\ 0;\ -\dfrac{2}{3}\right)$,
donc O′A′B′C′ est un parallélogramme.



62 **1.** $\vec{u_1}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{u_2}(1\,;-1\,;0)$ d'où $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$ donc $\Delta_1\perp\Delta_2$.

$\vec{u_1} \perp \vec{k}$ et $\vec{u_2} \perp \vec{k}$ donc Δ_1 et Δ_2 sont contenues dans deux plans perpendiculaires à l'axe $(O ; \vec{k})$; ces deux plans sont strictement parallèles donc $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \phi$.

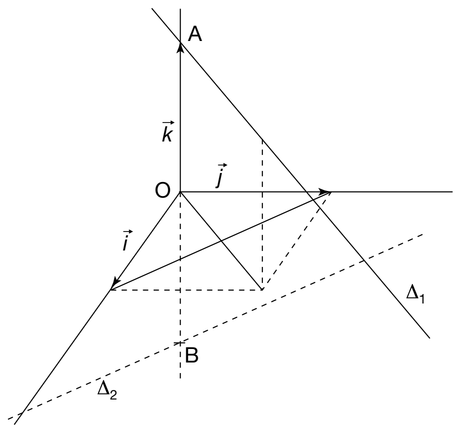
2. $\Delta_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; $\Delta_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -s \\ z = -1 \end{cases}, s \in \mathbb{R}$.

3. a) Le projeté orthogonal H de M sur Δ_1 est défini par $\begin{cases} H \in \Delta_1 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u_1} = 0 \end{cases}$

d'où le système $\begin{cases} x_H = t \\ y_H = t \\ z_H = 1 \\ x_H - x + y_H - y = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} t = \dfrac{x+y}{2} \\ x_H = y_H = \dfrac{x+y}{2} \\ z_H = 1 \end{cases}$.

$$MH^2 = \left(\frac{x+y}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} - y\right)^2 + (1-z)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x-y)^2 + (1-z)^2.$$



Le projeté orthogonal K de M sur Δ_2 est défini par $\begin{cases} K \in \Delta_2 \\ \overrightarrow{MK} \cdot \vec{u_2} = 0 \end{cases}$ d'où $x_K = \dfrac{x-y}{2}$, $y_K = \dfrac{y-x}{2}$, $z_K = -1$.

$$MK^2 = \left(\frac{x-y}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2} - y\right)^2 + (-1-z)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x+y)^2 + (1+z)^2.$$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow MH^2 = MK^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}(x-y)^2 + (1-z)^2 = \dfrac{1}{2}(x+y)^2 + (1+z)^2$

d'où $M \in (E) \Leftrightarrow xy + 2z = 0$ [1].

4. a) Les plans orthogonaux à (AB) sont du type $\mathcal{P}_k$: $z = k$. $(E) \cap \mathcal{P}_k$ est défini par $\begin{cases} xy + 2z = 0 \\ z = k \end{cases}$.

• Si $k \neq 0$, $\begin{cases} xy = -2k \\ z = k \end{cases}$. L'intersection est donc l'hyperbole d'équation $xy = -2k$ contenue dans $\mathcal{P}_k$.

• Si $k = 0$, $\begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Ainsi l'intersection de (E) avec $\mathcal{P}_0$ est la réunion des axes (Oy) et (Ox).

b) Les plans orthogonaux à $(O ; \vec{i})$ sont du type $\mathcal{Q}_k : x = k$. $(E) \cap \mathcal{Q}_k$ est défini par $\begin{cases} xy + 2z = 0 \\ x = k \end{cases}$

soit $\begin{cases} z = -\dfrac{k}{2}y \\ x = k \end{cases}$.

L'intersection est donc la droite d'équation $z = -\dfrac{k}{2}y$ contenue dans $\mathcal{Q}_k$.

Les plans orthogonaux à $(O ; \vec{j})$ sont du type $\mathcal{R}_k : y = k$. L'intersection de $\mathcal{R}_k$ avec (E) est la droite d'équation $z = -\dfrac{k}{2}x$ contenue dans le plan $\mathcal{R}_k$.

Résolutions de systèmes

63 Par hypothèse : $\begin{cases} 2b + 3c + 4p = 7{,}30 \\ 3b + 2c + 5p = 8{,}40 \end{cases}$.

Par combinaison linéaire $3L_1 - 2L_3 : 5c + 2p = 5{,}10$.

64 $\begin{cases} a - b + c = 10 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 22 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$.

Ainsi $P(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

65 **1.** Pour tout réel x, $x^2 = \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma$
$x^2 = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta + \gamma$.
Par identification des coefficients

$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$.

2. $P(x) = x^2(x+1)^{2006}$.
Or d'après **1.** $x^2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$
donc $P(x) = (x+1)^{2008} - 2(x+1)^{2007} + (x+1)^{2006}$.
D'où une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2009}(x+1)^{2009} - \frac{1}{1004}(x+1)^{2008} + \frac{1}{2007}(x+1)^{2007}.$$

66 • (ABC) est une équation du type
$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ (avec $(\alpha ; \beta ; \gamma) \neq (0 ; 0 ; 0)$).

Les points A, B, C appartiennent à ce plan d'où le système : $\begin{cases} \alpha a + \delta = 0 \\ \beta b + \delta = 0 \\ \gamma c + \delta = 0 \end{cases}$.

Ainsi $\alpha = -\dfrac{\delta}{a}; \beta = -\dfrac{\delta}{b}; \gamma = -\dfrac{\delta}{c}, \delta \in \mathbb{R}^*$ (car $O \notin (ABC)$).
Lorsque $\delta = -1$, on obtient une équation du plan (ABC) sous la forme : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

67 • *Corrigé dans le manuel.*

68 • **1.** $\mathcal{P}_1$ plan médiateur de [AB] passe par $I\left(3\ ;1\ ;-\dfrac{1}{2}\right)$ milieu de [AB] et admet $\overrightarrow{AB}(-2\ ;2\ ;5)$ pour vecteur normal donc $\mathcal{P}_1 : -2x + 2y + 5z + \dfrac{13}{2} = 0$ soit $\mathcal{P}_1 : 4x - 4y - 10z - 13 = 0$.

2. a) Le système $\begin{cases} 4x - 4y - 10z = 13 \\ 2x - 10y - 6z = 7 \\ 3x - 3y + 2x = 5 \end{cases}$ admet un unique triplet solution d'où $E\left(2\ ;0\ ;-\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $E \in \mathcal{P}_1$ donc EA = EB ; de même EB = EC et EC = ED.
Ainsi EA = EB = EC = ED donc A, B, C, D sont sur une sphère de centre E et de rayon $r = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

69 • • x, y, z désignent respectivement le nombre de pièces de 1 €, 0,50 € et 0,20 € ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}$).

$$\begin{cases} x + y + z = 49 \\ x + 0{,}5y + 0{,}2z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5}z - 9 \\ y = 58 - \dfrac{8}{5}z \end{cases}$$

Or x, y, z ne peuvent prendre que des valeurs entières positives, d'où les conditions :

$$\begin{cases} 15 \leqslant z \leqslant \dfrac{145}{4} \\ z \text{ multiple de } 5 \end{cases}$$

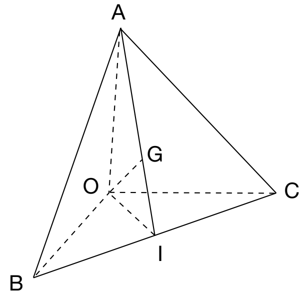
Il existe cinq valeurs possibles du paramètre z :
15, 20, 25, 30, 35.
On vérifie que les triplets associés sont bien solutions, d'où cinq combinaisons possibles :
(0; 34; 15), (3; 26; 20), (6; 18; 25), (9; 10; 30), (12; 2; 35).

Prendre toutes les initiatives

70 Considérons le repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}, \overrightarrow{OB} = a\vec{j}, \overrightarrow{OC} = a\vec{k}$.

Alors $G\left(\dfrac{a}{3}\ ;\dfrac{a}{3}\ ;\dfrac{a}{3}\right)$ d'où $OG = \sqrt{\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Remarque : D'autres solutions par étude de configuration sont bien sûr possibles.



Prouvons d'abord l'orthogonalité de (OG) et (ABC).

$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \dfrac{1}{3}(-a^2 + a^2) = 0$ et de même $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

d'où $(OG) \perp (ABC)$.

• Exploitons ensuite le calcul du volume du tétraèdre OABC de deux façons.

$V = \dfrac{1}{3}\text{aire(OBC)} \times OA$ et $V = \dfrac{1}{3}\text{aire(ABC)} \times OG$

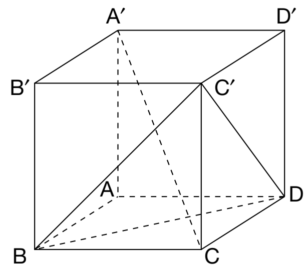
d'où l'égalité $OG = \dfrac{\text{aire(OBC)}}{\text{aire(ABC)}} \times OA$.

Or $\text{aire(OBC)} = \dfrac{a^2}{2}$ et

$\text{aire(ABC)} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2} \times \left(a\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

donc $OG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

71 G est le centre de gravité de BC'D d'où $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG}$.



Or d'après la règle du parallélépipède, $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA'}$ donc $\overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{CG}$.

Ainsi les points C, A′ et G sont alignés et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA'}$ d'où $k = \dfrac{1}{3}$.

Remarque : Une solution analytique est possible.

Le choix du repère orthonormal $(C\ ;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'})$ est alors judicieux.

72 • **1.** Considérons le repère orthonormal $(A\ ;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}, \overrightarrow{AD} = a\vec{j}, \overrightarrow{AE} = a\vec{k}$.

I et J sont les centres de gravité de ABD et ABF d'où $I\left(\frac{a}{3}\,;\frac{a}{3}\,;0\right)$ et $J\left(\frac{2a}{3}\,;0\,;\frac{a}{3}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{a}{3}\,;-\frac{a}{3}\,;\frac{a}{3}\right)$; en outre, $\overrightarrow{AC}(a\,;a;0)$ et $\overrightarrow{BE}(-a\,;0\,;a)$ d'où $\overrightarrow{IJ}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$ et $\overrightarrow{IJ}\,.\,\overrightarrow{BE}=0$.

(IJ) est la perpendiculaire commune à (AC) et (BE).

2. $IJ=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. La diagonale d'un cube a pour longueur $d=a\sqrt{3}$ d'où $IJ=\frac{1}{3}d$.

Remarque : Une solution élégante fait intervenir une homothétie.

Notons Ω le milieu de [AB] et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{3}$. Par h : $D\mapsto I$, $F\mapsto J$ d'où $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.

73 • Posons $M(x\,;y\,;z)$ et notons Δ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}(2\,;5\,;1)$, $\overrightarrow{CD}(1\,;4\,;-3)$ et $\overrightarrow{EM}(x-1\,;y+2\,;z-2)$

d'où $M\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y-3z+13=0\\2x+5y+z+6=0\end{cases}$.

Géométriquement, ce système s'interprète comme l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$\overrightarrow{n_1}(1\,;4\,;-3)$ et $\overrightarrow{n_2}(2\,;5\,;1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite d.

Ainsi il existe une droite unique d telle que $\Delta=d$.

$$\begin{cases}x+4y=-13+3z\\2x+5y=-6-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{41}{3}-\frac{19}{3}z\\y=-\frac{20}{3}+\frac{7}{3}z\end{cases}$$

d'où d : $\begin{cases}x=\frac{41}{3}-19t\\y=-\frac{20}{3}+7t\\z=3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

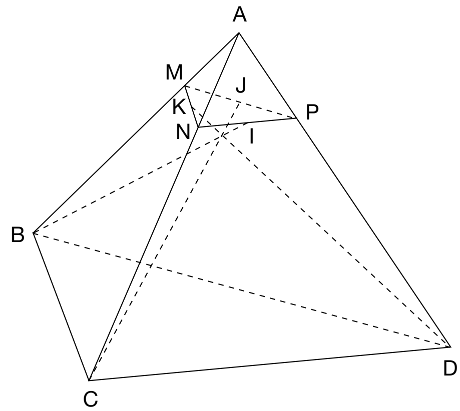
74 • L'homothétie de centre A qui transforme B en M (de rapport $\frac{1}{4}$) transforme C en N et D en P donc $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

• Dans le plan (ACD) exprimons I comme barycentre de A, C et D.

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP})=\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$

d'où $8\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}$

soit $6\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Ainsi I est le barycentre de (A, 6), (C, 1), (D, 1).



• De même, J est le barycentre de (A, 6), (B, 1), (D, 1) et K celui de (A, 6), (B, 1), (C, 1).

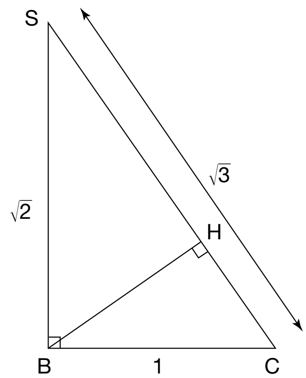
• Considérons alors le point G barycentre de (A, 6), (B, 1), (C, 1), (D, 1). D'après le théorème d'associativité, G est le barycentre de (B, 1), (I, 8) mais aussi de (C, 1), (J, 8) et de (D, 1), (K, 8).

Ainsi les droites (BI), (CJ) et (DK) sont concourantes en G.

75 • (SAC) est le plan médiateur de [BD] et $M\in$ (SAC) donc MB = MD. Le triangle MBD est isocèle donc M se projette orthogonalement sur (BD) en I (milieu de [BD]) et (MI) est la bissectrice de $\widehat{BMD}$. Posons $\widehat{BMD}=2\alpha$. Il s'agit de déterminer t tel que α soit maximal donc aussi sin α maximal puisque la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Or $\sin\alpha=\frac{IB}{MB}=\frac{\sqrt{2}}{2MB}$ donc sin α est maximal lorsque la distance MB est minimale.

Enfin MB est minimale lorsque M = H où H est le projeté orthogonal de B sur (SC). D'où la configuration ci-contre dans le triangle rectangle SBC.



Or $\overrightarrow{SH}=t_0\overrightarrow{SC}$ donc $\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{SC}=t_0\overrightarrow{SC}^2=3t_0$.

Mais $\overrightarrow{SH}\cdot\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}^2=2$ d'où on déduit $t_0=\frac{2}{3}$.

L'expression de l'aire de SBC de deux façons conduit à $BH\times SC=BC\times BS$ d'où $BH=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et finalement $\sin\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{2BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi $\alpha_0=\frac{\pi}{3}$.

Finalement, $\widehat{BMD}$ est maximal lorsque $t=\frac{2}{3}$ et sa mesure est alors $\frac{2\pi}{3}$.

76 $\Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ et $\mathcal{P}_m : x + y + z = m$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1\,;1\,;1)$.
Ainsi $\vec{n} = \overrightarrow{OI}$ donc $\mathcal{P}_m$ est tangent à Σ aux points d'intersection de Σ avec (OI).
D'où le système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

Ces plans sont tangents à Σ respectivement en

$A\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et

$B\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$A \in \mathcal{P}_m$ équivaut à $m = 3 - \sqrt{3}$ et $B \in \mathcal{P}_m$ équivaut à $m = 3 + \sqrt{3}$.

Ainsi $\mathcal{P}_m$ est tangent à Σ si et seulement si $m = 3 \pm \sqrt{3}$.

Note : Σ est « au-dessus » de $\mathcal{P}_m$ lorsque $m = 3 - \sqrt{3}$, « en dessous » de $\mathcal{P}_m$ lorsque $m = 3 + \sqrt{3}$.

Application : On considère le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = a\vec{k}$.

D'après la question précédente, la sphère Σ est inscrite dans le tétraèdre défini par les plans de base et le plan $\mathcal{P}_{3+\sqrt{3}}$.

Les sommets sont O, $D(3+\sqrt{3}\,;0\,;0)$, $E(0\,;3+\sqrt{3}\,;0)$ et $F(0\,;0\,;3+\sqrt{3})$.

Considérons l'homothétie de centre O qui transforme D en A ; elle transforme E en B, F en C et la sphère Σ inscrite dans ODEF en la sphère Σ' inscrite dans OABC.

Le rapport (positif) d'homothétie est $k = \dfrac{OA}{OD}$ soit $k = \dfrac{a}{3+\sqrt{3}}$. Ainsi le centre Ω de Σ' est tel que $\overrightarrow{O\Omega} = k\overrightarrow{OI}$.

Problèmes

(page 429)

77 **1.** (AM) coupe (BC) en A′, barycentre de (B, β), (C, γ). D'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de (A, α), (A′, β + γ), d'où :

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + (\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MA'} = \vec{0}.$$

Ainsi $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}\overrightarrow{MA'}$ et, en considérant les normes :

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}.$$

2. De même : $\dfrac{MB}{MB'} = \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}$ et $\dfrac{MC}{MC'} = \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$.

Donc $S = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$

$$= \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right).$$

3. a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

b) Les résultats énoncés découlent immédiatement du tableau de variations de f.

4. a) $S = f\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) + f\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right) + f\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$. La valeur minimale de S (si elle existe) est au moins 6 et cette valeur est atteinte uniquement lorsque $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha} = 1$, d'où le résultat.

b) «S minimale» équivaut à «M centre de gravité de ABC».

78 **1. a)** $\overrightarrow{DJ}\left(2; 0; \dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1; 1; \dfrac{1}{2}\right)$, d'où

$DJ = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ et $IJ = \dfrac{3}{2}$.

b) $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DJ} = IJ \times DJ \times \cos\widehat{IJD}$;

or, $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DJ} = \dfrac{9}{4}$ donc $\cos\widehat{IJD} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$; $\widehat{IJD} \approx 43{,}3°$.

2. $\overrightarrow{DI}(1; -1; 0)$, d'où $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{IJ} = 0$. Ainsi $(DI) \perp (IJ)$.

3. a) D(0; 1; 0), I(1; 0; 0), $J\left(2; 1; \dfrac{1}{2}\right)$; (DIJ) a une équation de type $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ 2a + b + \dfrac{1}{2}c + d = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = -d,\ d \in \mathbb{R}^* \\ c = 4d \end{cases}$$

Ainsi (DIJ) : $x + y - 4z - 1 = 0$.

b) $d(H; (DIJ)) = \dfrac{|x_H + y_H - 4z_H - 1|}{\sqrt{1+1+16}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

4. $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\,\text{aire}(DIJ) \times d(H; (DIJ))$.

Or, $\text{aire}(DIJ) = \dfrac{1}{2}DI \times IJ = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}$.

5. a) •(HDI) a une équation du type $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$, où $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$.

$$\begin{cases}\alpha + d = 0\\ \beta + d = 0\\ \beta+\gamma+d=0\end{cases} \text{ d'où } \begin{cases}\alpha = -d\\ \beta = -d,\ d\in\mathbb{R}^*\\ \gamma = 0\end{cases}$$

Ainsi (HDI) : $x + y - 1 = 0$.

• $\vec{n}(1; 1; 0)$, vecteur normal à (HDI), dirige d.

$$\text{D'où } d : \begin{cases}x = t+2\\ y = t+1,\ t\in\mathbb{R}\\ z = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

b) $\begin{cases}x = t+2\\ y = t+1\\ z = \dfrac{1}{2}\\ x+y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1\\ x=1\\ y=0\\ z=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Ainsi $\mathrm{J}'\left(1;\ 0;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

c) *Méthode 1 :* calcul direct; $\overrightarrow{\mathrm{JJ}'}(-1;-1;\ 0)$ donc $\mathrm{JJ}' = \sqrt{2}$.

Méthode 2 : utilisation d'une équation de (HDI);

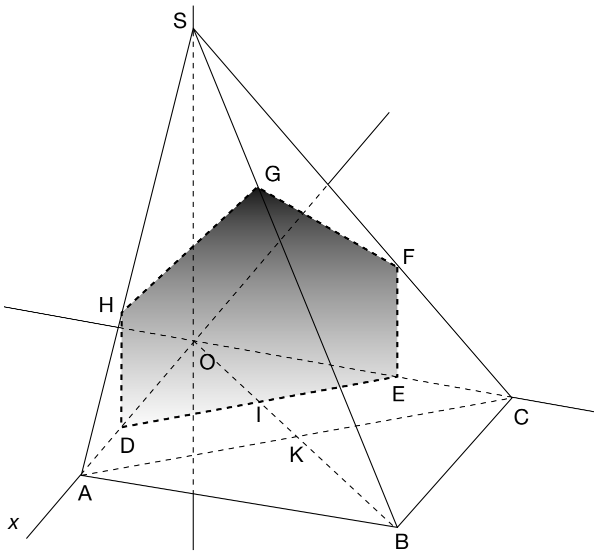
$$\mathrm{JJ}' = \frac{|x_\mathrm{J} + y_\mathrm{J} - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Méthode 3 : utilisation du volume $\mathcal{V}$;

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{aire(HDI)} \times \mathrm{JJ}'$ donc $\mathrm{JJ}' = \dfrac{3\mathcal{V}}{\mathrm{aire(HDI)}}$;

or, $\mathrm{aire(HDI)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\mathrm{JJ}' = \sqrt{2}$.

79 **1. a)** La section est un pentagone.



b) $\mathrm{D}(t; 0; 0)$, $\mathrm{H}(t; 0; 1-t)$, $\mathrm{E}(0; t; 0)$, $\mathrm{F}(0; t; 1-t)$.
$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DE}}$ donc DEFH est un rectangle.
$\mathrm{Aire(DEFH)} = (1-t)t\sqrt{2}$.

c) G est à l'intersection de (SB) et $\mathcal{P}$ donc ses coordonnées sont telles que :

$$\begin{cases}x = k\\ y = k\\ z = -k+1\\ x+y=t\end{cases} \text{ d'où } \mathrm{G}\left(\frac{t}{2};\ \frac{t}{2};\ 1-\frac{t}{2}\right).$$

$\mathrm{Aire(FGH)} = \dfrac{t^2\sqrt{2}}{4}$.

d) Aire de la section : $\mathcal{A}(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(4t - 3t^2)$.

2. Sur $]0; 1[$, $\mathcal{A}'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-3t)$.

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$\mathcal{A}'(t)$		+	0	−	
$\mathcal{A}$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 1; 0)$; $\vec{k}(0; 0; 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-1; 1; 0)$ sont non colinéaires et tels que $\vec{n}\cdot\vec{k} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$, donc $\mathcal{P}$ admet $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ pour vecteurs directeurs.

Le centre de gravité de OAC est $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{3};\ 0\right)$, il appartient au plan $\mathcal{P} : x + y = \dfrac{2}{3}$, d'où le résultat.

Remarque : Une solution géométrique peut aussi être envisagée en utilisant l'homothétie de centre O et de rapport $t = \dfrac{2}{3}$.

C'est nouveau au bac (page 430)

80 **1.** $\vec{n}(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc un vecteur directeur de d. De plus d passe par $\mathrm{S}(1\ ; -2\ ; 0)$.

a) et **c)** ne conviennent pas (vecteur directeur).
b) ne convient pas ($\mathrm{S} \notin d$).
Seule la réponse **d)** est exacte.

2. L'intersection de d et $\mathcal{P}$ est définie par le système :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \\ x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} t = -\dfrac{14}{11} \\ x = \dfrac{8}{11} \\ y = -\dfrac{25}{11} \\ z = \dfrac{9}{11} \end{cases}.$$

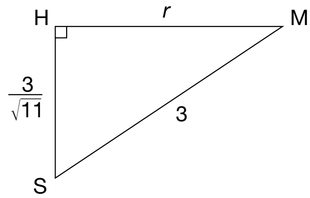
Seule la réponse **d)** est exacte.

3. La distance du point S au plan 3 est

$$d(\mathrm{S}\,;\mathcal{P}) = \frac{|x_\mathrm{S} + y_\mathrm{S} - 3z_\mathrm{S} + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3(1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Seule la réponse **b)** est exacte.

4. $d(\mathrm{S}\,;\mathcal{P}) < 3$ (rayon de Σ) donc l'intersection de Σ et de $\mathcal{P}$ est un cercle.



Ce cercle a pour centre le projeté orthogonal H de S sur le plan $\mathcal{P}$.

$$r = \sqrt{\frac{90}{11}} = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

Seule la réponse **b)** est exacte.

81 **1. Vrai.** I est le barycentre de (B ; 1), (C ; 1) et d'après le théorème d'associativité G est le barycentre de (A ; 2), (I ; 2), (D ; – 3) donc G, A, I, D sont coplanaires.

2. a) Vrai. $\vec{n_1}(1\,;2\,;-1)$ et $\vec{n_2}(2\,;-1\,;1)$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$$\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}z + \dfrac{9}{5} \\ y = \dfrac{3}{5}z - \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{d'où } d : \begin{cases} x = -t + \dfrac{9}{5} \\ y = 3t - \dfrac{2}{5} \\ z = 5t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\vec{n}(-1\,;3\,;5)$ est un vecteur directeur de d. De plus $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_1$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{P}_2$ donc d passe par A.

b) Vrai. $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 7 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$.

c) Faux. $\mathrm{A} \in \mathcal{P}$ et $\mathrm{A} \in d$.

Remarque : $\vec{n}(2\,;1\,;-1)$ et $\vec{u}(1\,;-1\,;1)$ sont tels que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ donc $d \,//\, \mathcal{P}$. Or A est commun donc $d \subset \mathcal{P}$.