chapitre

14 Le produit scalaire dans l'espace

Activités (page 376)

ACTIVITÉ 1

1 **3.** $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2 + (2+2)^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$;

de même, $AC = AD = BC = BD = CD = 4\sqrt{2}$: les faces du tétraèdre sont des triangles équilatéraux.

2 **3. a)** (AB), perpendiculaire au plan P, est orthogonale à toutes les droites de ce plan et, en particulier, $(AB) \perp d$.

b) d est orthogonale à (AB) et à (BC), deux droites sécantes du plan (ABC), donc d est perpendiculaire à (ABC).

c) d, étant perpendiculaire au plan (ABC), est orthogonale à toutes les droites de ce plan et, en particulier, $d \perp (AC)$.

ACTIVITÉ 2

1. $A(3;0;0)$, $B(3;3;0)$, $C(0;3;0)$, $D(0;0;0)$, $E(3;0;3)$, $F(3;3;3)$, $G(0;3;3)$, $H(0;0;3)$.

2. a) (AB) est perpendiculaire à (BC) et (BF), deux droites du plan (BCG) : (AB) est donc perpendiculaire à ce plan et orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc $(AB) \perp (FG)$.

b) $\overrightarrow{AB}(0;3;0)$, $\overrightarrow{FG}(3;0;0)$.

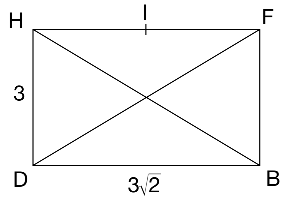
c) $xx' + yy' + zz' = 0$.

3. a) $(BF) \perp (ABC)$ donc $(BF) \perp (AC)$.

b) $\overrightarrow{BF}(0;0;3)$, $\overrightarrow{AC}(-3;3;0)$.

c) $xx' + yy' + zz' = 0$.

4. a) (DF) et (HB) ne sont pas perpendiculaires, car DBFH est un rectangle non carré.



b) $\overrightarrow{DF}(3;3;3)$, $\overrightarrow{HB}(3;3;-3)$.

c) $xx' + yy' + zz' = 9 + 9 - 9 = 9$.

5. a) $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 3\right)$.

b) $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 3\right)$.

c) $xx' + yy' + zz' = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 9 = 0$.

On peut conjecturer que (BI) et (DF) sont perpendiculaires.

6. b) Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{k})$ avec $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{DB}$ $\left(\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}\right)$:

$$B(3\sqrt{2}\,;0),\ I\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 3\right),\ F(3\sqrt{2}\,;3),$$

$$\overrightarrow{BI}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 3\right),\ \overrightarrow{DF}(3\sqrt{2}\,;3).$$

D'où $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DF} = -9 + 9 = 0$

donc $(BI) \perp (DF)$.

Travaux dirigés (page 387)

TD 1

1 **1. a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0$.

c) Même méthode qu'en **b)**.

d) ICD est isocèle : la médiane (IJ) est aussi hauteur.

2. a) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG})\cdot\overrightarrow{CD}$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{CD} = 0.$$

De même, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

(AG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD). Donc (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

b) Droites passant par un sommet et le centre de gravité de la « face opposée ».

3. a) O est le barycentre de (A, 1), (G, 3), donc $O \in (AG)$.

$\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$; $AG = a\frac{\sqrt{6}}{3}$; $AO = a\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b) O est le barycentre de (I, 2), (J, 2).

c) $OA = OB = a\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $OI = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ (triangle AOB par exemple).

d) OA = OB = OC = OD.

O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

4. a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \dfrac{3a^2}{8}$; $\cos\alpha = -\dfrac{a^2}{8}$; $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

b) $\alpha \approx 109{,}5°$.

c) Par symétrie.

2 **a)** 109,5°.

b) $a = 1{,}78 \times 10^{-10}$ m.

TD 2

1 **1.** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DB}\cdot(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$

$= \overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})$

$= 0$.

2. Donc si (AB) ⊥ (CD) et (AC) ⊥ (BD), par exemple, alors, d'après **1.** :

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0.$$

2 **1. a)** (AA′) est la hauteur issue de A, du tétraèdre. (AA′) est orthogonale à toute droite du plan (BCD), donc à (CD).

(CD) est orthogonale à (AA′) et (AB), droites sécantes du plan (ABA′) : (CD) est perpendiculaire au plan (ABA′) et (CD) est orthogonale à (BA′).

b) (BC) est perpendiculaire au plan (ADA′) (car (BC) orthogonale à (AD) et (AA′)).

D'où (BC) ⊥ (DA′).

Donc (DA′) est hauteur du triangle BDC.

c) Même méthode qu'en **a)** et **b)**.

d) (AA′) ⊥ (DC) et (A′K) ⊥ (DC),

donc (AK) ⊥ (DC).

Or (AA′) ⊥ (DC); on déduit (AB′) = (AK).

(AA′) et (BB′) sont deux hauteurs du triangle ABK. Elles sont coplanaires… et sécantes.

e) De même, (AA′) et (CC′) sont sécantes, ainsi que (BB′) et (CC′).

C ∉ (ABK); (CC′) coupe (ABK) en un point unique qui est sur (AA′) et (BB′) : c'est H.

De même pour (DD′).

2. (BA′) ⊥ (CD) et (AA′) ⊥ (CD), donc (CD) est perpendiculaire à (AA′B).

Conséquence : (CD) est orthogonale à (AB).

Même méthode pour les deux autres paires d'arêtes.

TD 3

1. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ soit encore

$(bc)x + (ac)y + (ab)z - abc = 0$

2. $h = \dfrac{|abc|}{\sqrt{a^2b^2c^2}}$, d'où

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

3. $V = \dfrac{1}{3}S,\ h = \dfrac{1}{3} \times c \times \dfrac{ab}{2}$ d'où $S = \dfrac{abc}{2h}$

4. $$S^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4h^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \times \frac{a^2b^2c}{4}$$

$$= \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4}$$

$= (\text{aire OAB})^2 + (\text{aire OBC})^2 + (\text{aire OAC})^2$.

« Théorème de Pythagore dans l'espace » : Dans un trièdre trirectangle, le carré de l'aire de la face non rectangle est égale à la somme des carrés des aires des trois faces rectangles.

TD 4

2 **1.** Les points A, B et C vérifient l'équation

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1.$$

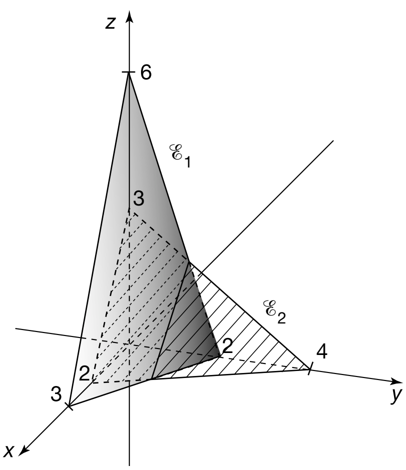
Ces points n'étant pas, par construction, alignés, ils déterminent un unique plan P dont une équation est donc $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

Des deux demi-espaces de frontière P, celui qui nous intéresse est celui qui contient le point O, donc d'inéquation $2x + 3y + 6z - 6 \leqslant 0$.

D'où le système : $\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \\ 2x + 3y + 6z - 6 \leqslant 0 \end{cases}$

2, 3 et **4.** Par le calcul, $D \in \mathscr{E}_1$, $E \notin \mathscr{E}_1$, $F \in \mathscr{E}_1$, $G \in \mathscr{E}_1$.

L'ensemble $\mathscr{E}_2$ est le tétraèdre (de sommet O) hachuré.



TD 6

1 Notons P le plan médiateur du segment [AB]. Le milieu M est équidistant de A et B.
Soit N un point du plan P, (N $\notin$ (AB)). Les points A, B et N ne sont pas alignés. La droite (AB) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan P donc en particulier à la droite (MN).
Il en résulte que la droite (MN) est (dans le plan (ANB)) la médiatrice du segment [AB] et donc que N est équidistant des extrémités A et B : tout point de P est équidistant de A et B.
Réciproquement, soit N un point de l'espace (N $\notin$ (AB)) équidistant de A et B. Dans le plan (ABN), (NM) est perpendiculaire à (AB) et passe (bien sûr…) par le milieu M de [AB], donc (NM) est contenue dans le plan P et N appartient à P. Tout point équidistant de A et B appartient au plan P.
Conclusion, P est l'ensemble des points de l'espace équidistants des extrémités A et B.

2 **1.** M(3; 0; 1).

2. (AB) est orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan P donc, vectoriellement, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P.

3. $\overrightarrow{AB}(2; 2; -4)$ d'où une équation de P s'écrit :

$$2x + 2y - 4z + d = 0.$$

P passe par le point M donc :

$$2 \times 3 + 2 \times 0 - 4 \times 1 + d = 0,$$

soit $d = -2$ et $2x + 2y - 4z - 2 = 0$.
Une équation cartésienne de P est $x + y - 2z - 1 = 0$.

4. a) $\overrightarrow{CD}(-7; 4; 4)$ donc une équation du plan médiateur de [CD] est de la forme $-7x + 4y + 4z + d = 0$. Ce plan passe par le milieu $M\left(\frac{1}{2}; 0; 3\right)$ de [CD] donc :

$$-\frac{7}{2} + 12 + d = 0, \text{ soit } d = -\frac{17}{2}$$

et une équation est $-7x + 4y + 4z - \frac{17}{2} = 0$.

b) $\overrightarrow{EF}(5; -7; -2)$, $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -1\right)$ et $5x - 7y - 2z - 4 = 0$ est une équation du plan médiateur de [EF].

3 **1.** $P_1 : -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0$;

$P_2 : x - 5y - 3z + \frac{3}{2} = 0$;

$P_3 : -3x + 3y - 2z + 5 = 0$.

2. Ω est, d'après la partie **1**, équidistant des quatre points A, B, C et D : c'est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

3. $\begin{cases} -2x + 2y + 5z + \frac{13}{2} = 0 \\ x - 5y - 3z + \frac{3}{2} = 0 \\ -3x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

Ce système admet comme unique triplet solution les coordonnées $\left(\frac{13}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ du centre Ω.

4. $r^2 = A\Omega^2 = \frac{9}{16} + \frac{25}{16} + \frac{25}{4} = \frac{134}{16}$ donc $r = \frac{\sqrt{134}}{4}$.

5. $\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{134}{16}$ est une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 394)

1. Produit scalaire dans le plan

1 *Corrigé dans le manuel.*

2 $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{u} \perp \vec{t}$ et $\vec{v} \perp \vec{s}$.

3 **a)** $\vec{u}(2; 5)$ est un vecteur normal à d. Le vecteur $\vec{u}(5; -2)$ orthogonal à $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à Δ. Δ admet donc une équation du type $5x - 2y + c = 0$. A(5; 3) appartenant à Δ, $25 - 6 + c = 0$ et donc $c = -19$. D'où une équation de Δ : $5x - 2y - 19 = 0$.

b) $\vec{n}(1; -3)$ est normal à d et $\vec{u}(3; 1)$ est normal à Δ qui admet une équation de la forme $3x + y + c = 0$.
$A(-1; 2) \in \Delta$ d'où $c = 1$ et une équation est $3x + y + 1 = 0$.

4 **a)** $\overrightarrow{AB}(-5; 1)$ est normal à la médiatrice de [AB]. Celle-ci admet donc une équation de la forme :

$$-5x + y + c = 0.$$

Elle passe par le milieu $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ d'où $-5 \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 0$ et $c = 6$ et $-5x + y - 6 = 0$ est une équation de la médiatrice du segment [AB].

b) $\overrightarrow{AB}\left(7\,;\,-\dfrac{8}{3}\right)$ est un vecteur normal à la médiatrice d de [AB] qui admet une équation de la forme :

$$7x - \frac{8}{3}y + c = 0.$$

Elle passe par $I\left(-\dfrac{3}{2};\,\dfrac{5}{3}\right)$. Une équation est donc :

$$7x - \frac{8}{3}y + \frac{269}{18} = 0.$$

5 $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI})\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ})$
$= \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$
$= 0 + 2\,CJ^2 - 2\,BI^2 + 0 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont orthogonaux et les droites (DJ) et (CI) sont perpendiculaires.

6 *Corrigé dans le manuel.*

7 $\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ et $AB = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC}(8\,;-2)$ et $AC = \sqrt{8^2+(-2)^2} = 2\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}(4\,;-4)$ et $BC = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{28}{4\sqrt{85}} = \dfrac{7\sqrt{85}}{85}$ et $\widehat{BAC} = 41°$ (arrondi au degré), puis $\widehat{ABC} = 108°$ et $\widehat{ACB} = 31°$.

$d(A, (BC)) = \dfrac{|-4+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$ et $BC = 4\sqrt{2}$ donc l'aire est égale à 12 (unités d'aire).

2. Produit scalaire dans l'espace

8 *Corrigé dans le manuel.*

9 $\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;-4)$ et $AB = 3\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AC}(-2\,;0\,;-1)$ et $AC = \sqrt{5}$;

$\overrightarrow{BC}(-1\,;-1\,;3)$ et $BC = \sqrt{11}$.

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ d'où $\widehat{BAC} = 51°$;

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{2\sqrt{22}}{11}$ d'où $\widehat{ABC} = 31°$;

$\cos\widehat{ACB} = \dfrac{-1}{\sqrt{55}}$ d'où $\widehat{ACB} = 98°$.

10 *Corrigé dans le manuel.*

11 $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$
$= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})$
$= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD})$
$= \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA})$
$= 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.$

Dans un tétraèdre régulier, $AB^2 = BC^2 = CD^2 = DA^2ID^2$ en résulte que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$. Les arêtes [AC] et [DB] sont orthogonales.
On démondre de même que [AB] et [CD] d'une part, [AD] et [BC] d'autre part, sont orthogonales.

12 • $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = a\times a\times\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}a^2.$

• Le triangle SAC est rectangle en S (théorème de Pythagore), donc $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = 0$ et $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AS} = -a^2$.

13 • $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA} = 0$;

• $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}a^2$;

• $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ} = 0$;

• $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IE} = \dfrac{1}{4}a^2$;

• $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD} = (\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH})\cdot\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{JD}$
$= \overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GH} = -\dfrac{1}{4}a^2 + a^2 = \dfrac{3}{4}a^2.$

14 • $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 20 + 1 - 18 = 3$;
• $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -5 - 4 + 9 = 0$;
• $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8 + 4 - \dfrac{45}{2} = -\dfrac{21}{2}$;

• $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0.$

3. Orthogonalité dans l'espace

15 $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{1}{2} - 3 + \dfrac{3}{2} = -2 \neq 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

16 $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

17 *Corrigé dans le manuel.*

18 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \alpha\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}\alpha + 1.$

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \alpha\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{3}{3\sqrt{3}+2}.$

19 $\overrightarrow{AB}(-2;\,7;\,5)$ et $\vec{u}(-4;\,1;\,-3)$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 8 + 7 - 15 = 0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et la droite d est orthogonale à la droite (AB).

20 $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc C appartient bien à (AB).

De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$: le point C est bien le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).

21 $\overrightarrow{AB}(2\,;0\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}(-1\,;-2\,;-1)$, $\overrightarrow{DE}(2\,;-2\,;2)$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$: le vecteur $\overrightarrow{DE}$ orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

22 $\overrightarrow{AB}(-1\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;5\,;1)$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc le vecteur $\vec{v}$ est normal au plan (ABC).

23 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}(10^2 - 8^2 - 6^2) = 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

24 Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
Donc, si $(\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} - \vec{v})$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

4. Équation cartésienne d'un plan

25 **1.** $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.
2. a) a, b et c sont les coordonnées, dans cet ordre, du vecteur $\vec{u}$. Le coordonnées de A vérifient l'équation ce qui permet d'obtenir d.

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : tout vecteur orthogonal à l'un est orthogonal à l'autre.
Avec le vecteur $\vec{v}$ on obtient l'équation (équivalente) :

$$kax + kby + kcz + kd = 0$$

3. Cours.

26 *Corrigé dans le manuel.*

27 **a)** $2x - 3y - z + c = 0$ et $2\sqrt{2} + 6 - 5 + c = 0$, donc :

$$c = -1 - 2\sqrt{2},$$

et une équation de P est $2x - 3y - z - 1 - 2\sqrt{2} = 0$.
b) $\sqrt{3}\,x + 2y + c = 0$ et $-6 + c = 0$, donc $c = 6$ et une équation de P est $\sqrt{3}\,x + 2y + 6 = 0$.

28 **a)** $\mathcal{Q} : 2x - y + 3z - 7 = 0$.
b) $\mathcal{Q} : x + 2y + 3z - 8 = 0$.

29 *Corrigé dans le manuel.*

30 **a)** $d(A\,;P) = \dfrac{|10 + 3 + 12 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{14}} = \dfrac{10\sqrt{14}}{7}$.

b) $d(A\,;P) = \dfrac{|2 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Apprendre à chercher

(page 396)

31 Plans perpendiculaires

Les outils :
- Produit scalaire dans l'espace.
- Équation de plan, vecteur normal à un plan.
- Résolution d'un système linéaire 2×2.

Les objectifs :
- Savoir déterminer un vecteur normal à un plan.
- Savoir déterminer une équation de plan.

1. a) $\vec{u}(1\,;-1\,;3)$.
b) $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$;
$\vec{n}$ est normal à $\mathcal{Q}$ donc orthogonal à tout vecteur directeur d'une droite contenue dans le plan $\mathcal{Q}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$.
2. a) En ajoutant membre à membre :

$$2a + 5c = 0, \text{ d'où } c = -\frac{2a}{5},$$

et en retranchant membre à membre :

$$-2b + c = 0, \text{ d'où } b = \frac{c}{2} = -\frac{a}{5}.$$

b) Pour $a = 5$, on trouve $\vec{n}(5\,;-1\,;-2)$.

32 Une recherche d'ensemble

Les outils :
- Centre de gravité.
- Produit scalaire.
- Équation d'une sphère.

Les objectifs :
- Savoir déterminer un lieu (double inclusion).
- Savoir traduire analytiquement des relations vectorielles.

1. $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu de [MN].
Donc [1] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AI} = \vec{0}$ ce qui signifie que (AB) passe par I.
2. a) $AB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AB^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN})$
$= AB^2 + AI^2 + \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{IN} = 0$;
soit $AB^2 + \dfrac{1}{4}AB^2 - IM^2 = 0$ et [2] $\Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{5}{4}AB^2$.
b) Il en résulte $IM = IN = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$ et M et N appartiennent à la sphère de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$.
3. Réciproquement, si M et N sont des points diamétralement opposés de S′, alors la relation [2] est vérifiée (d'après les équivalences de **2. a)**).
Et, puisque $\overrightarrow{BA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ et I est le milieu de [MN], A est le centre de gravité du triangle MNB donc [1] est vérifiée.
4. Deuxième solution

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' + a = 0 \\ y + y' = 0 \\ z + z' = 0 \end{cases}$

$AB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow a^2 + xx' + yy' + zz' = 0.$
En exprimant x', y' et z' en fonction de x, y et z, et puisque I a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0} \\ AB^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + x(-x-a) - y^2 - z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + y^2 + z^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = \frac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow IM = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

b) Réciproquement, M et M′ sont diamétralement opposés, donc $\begin{cases} x + x' + a = 0 \\ y + y' = 0 \\ z + z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$

et [1] est vérifiée.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= xx' + yy' + zz' = x(-x-a) - y^2 - z^2 \\ &= -(x^2 + ax) - y^2 - z^2 \\ &= -\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 - z^2 + \frac{a^2}{4} = -IM^2 + \frac{a^2}{4} \\ &= -\frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{4} = -a^2 = -AB^2,\end{aligned}$$

et [2] est bien vérifiée.

Pour progresser (page 397)

Distances, angles et orthogonalité

33 *Corrigé dans le manuel.*

34 **1.** $\cos \widehat{AOB} = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \times OB} = \dfrac{1}{2}$ donc $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

De même, $\cos \widehat{BOC} = \cos \widehat{COA} = \dfrac{1}{2}$.

2. a) Cela résulte des égalités $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OC'}$.

b) $OA = OB' = OC' = AB' = AC' = B'C' = \sqrt{2}$: les triangles OAB′, OAC′ et OB′C′ sont équilatéraux.

35 **1.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$.

2. a) A′(6 ; 8 ; 0) ; B′(4 ; 9 ; 0) et C′(5 ; 7 ; 0).

b) $\cos \widehat{B'A'C'} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \neq 0$: dans l'espace, la projection orthogonale ne conserve pas nécessairement l'orthogonalité.

36 A se projette en G, B en D et C en F.

37 • $x = \vec{i} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times OA \times \cos\alpha$;
$y = \vec{j} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times OA \times \cos\beta$;
$z = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \times OA \times \cos\gamma$.
$OA^2 = x^2 + y^2 + z^2 = OA^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$, d'où :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

38 • **2.** • $\overrightarrow{OE}\left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OA}\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$;

• $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OA} = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{4}$;

• $OE \times OA = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}} \times \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}$;

• $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OA}}{OE \times OA} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. $\cos\alpha = \dfrac{9 - 100 - 4}{9 + 100 + 4} = -\dfrac{95}{113}$ et $\alpha \approx 147{,}2°$.

4. $a = b = c$; $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ indépendamment des dimensions du cube et $\alpha \approx 109°$.

39 • **a)** $d(A; \mathcal{Q}) = \dfrac{|2 - 2 - 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Une équation de $\mathcal{Q}$ est $y - z - 1 = 0$, donc :

$$d(A; \mathcal{Q}) = \frac{|0 + 1 - 1 - 1|}{\sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

40 •• **1.** Dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:
A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(2; 1; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1), F(2; 0; 1), G(2; 1; 1), H(0; 1; 1), I(1; 0; 0).
2. $\overrightarrow{IF}(1; 0; 1)$ et $\overrightarrow{IH}(-1; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires.
Soit M(x; y; z) un point du plan (IFH).

$\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{IF} + \beta\overrightarrow{IH}$ se traduit par $\begin{cases} x - 1 = \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$

Soit $x + 2y - z - 1 = 0$.

3. $d(G; (IFH)) = \dfrac{|2 + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4. Soit K le projeté orthogonal de G sur (IH) :

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HG} \Leftrightarrow 2 = 2\,HK \Leftrightarrow HK = 1,$$

puis $KG^2 = HG^2 - HK^2 \Leftrightarrow KG^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow KG = \sqrt{3}$.

Or $\sqrt{3} \neq \frac{\sqrt{6}}{3}$ donc le projeté orthogonal de G sur (IJH) n'appartient pas à la droite (IH).

41 **1.** $d(M; \mathcal{P}) = d(M; \mathcal{Q})$

$$\Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 2z - 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|2x - y + 2z + 1|}{\sqrt{4+1+4}}$$

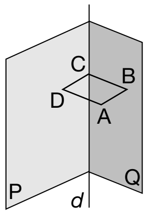
$$\Leftrightarrow |x + 2y - 2z - 1| = |2x - y + 2z + 1|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ \text{ou} \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M(x\,;y\,;z) \in \Pi \cup \Pi'$.

2. $\overrightarrow{n_\Pi}(3;1;0)$ et $\overrightarrow{n_{\Pi'}}(1;-3;4)$; $\overrightarrow{n_\Pi} \cdot \overrightarrow{n_{\Pi'}} = 0$, donc $\Pi \perp \Pi'$.

42 **1.** $\overrightarrow{n_P}(1;1;-2), \overrightarrow{n_Q}(1;1;1); \overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 0 \Leftrightarrow P \perp Q$.



2. $d(A; P) = \frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

$d(A; P) = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

3. ABCD est un rectangle, donc :

$$\begin{aligned} d^2(A; d) &= AC^2 \\ &= AB^2 + AD^2 \\ &= \frac{6}{9} + \frac{75}{9} \\ &= 9, \end{aligned}$$

donc $d(A; d) = 3$.

43 **a)** $\mathcal{P}_2 : 2x + z - 5 = 0$.

b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 2 = 0$: les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

c) $d(B, \mathcal{P}_1) = \frac{|-1-0-4+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$d(B, \mathcal{P}_2) = \frac{|-2+0+2-5|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \sqrt{5}$

d) $d^2(B, d) = d^2(B, \mathcal{P}_1) + d^2(B, \mathcal{P}_2) = \frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2}$,

d'où $d(B, d) = \sqrt{\frac{13}{2}}$.

44 **1.** • $I = J \Leftrightarrow$ A, B, C et D coplanaires, donc $I \neq J$.

• $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{MI} = 2\,\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow I = J$,

ce qui est impossible.

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\| \Leftrightarrow M \in P_1,$$

plan médiateur du segment [IJ].

2. AB = CD donc : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

$$\Leftrightarrow 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2\,MJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

$\Leftrightarrow MI^2 = MJ^2 \Leftrightarrow MI = MJ$.

Donc $P_1 = P_2$.

45 **1.** $\mathcal{V}(ABDM) = \frac{1}{3} \times AM \times \mathcal{A}(ADB) = \frac{1}{6a}$

2. a) $\overrightarrow{BK} = \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD}$.

b) $$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} &= \frac{a^2}{a^2+2}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} + 0 \\ &= \frac{a^2}{a^2+2}AM^2 = \frac{1}{a^2+2}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + \frac{1}{a^2+2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2+2}AD^2 = \frac{1}{a^2+2}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{a^2+2} = 0.$$

c) On démontre l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ de la même manière en exprimant $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$.

d) (BK) et (DK) sont deux hauteurs du triangle BDM : K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 + 0 = 0$.

De même, $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0 + 0 = 0$.

Orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDM), la droite (AK) est perpendiculaire à ce plan.

4. a) En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles ADM et ABM, $BM = DM = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}$.

Ou, peut-être plus dans l'esprit de l'énoncé : K est le barycentre du système $\{(M, a^2)\,;\,(I, 2)\}$ avec I milieu de [BD] donc la hauteur (AK) est aussi médiatrice de [BD].

$AI^2 = \left(\frac{1}{a^2} + 1\right) - \frac{1}{2} = \frac{2 + a^2}{2a^2}$ donc

$$\text{Aire (BDM)} = \frac{1}{2}AI \times BD = \frac{1}{2} \times \frac{2 + a^2}{2a^2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$$

b) Dans $\mathbb{R}^{+*}$, $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$\mathcal{V}(ABDM) = \frac{1}{6\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}AK$ et $AK = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Équation cartésienne d'un plan

46 **a)** $2x - y + 2z - 2 = 0$

b) $x - 3y + 3z + 5 = 0$.

47 **a)** $\overrightarrow{AB}(-1\ ;1;1)$, et soit $\vec{u}(1;1;1)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc la droite (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
• Notons $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -a+b+c=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{u}=a+b+c=0$, d'où $a=0$ et $b=-c$. Le vecteur $\vec{v}(0;1;-1)$ est normal au plan $\mathcal{Q}$ qui admet une équation de la forme $y-z+d=0$.
A appartenant à $\mathcal{Q}$, $d=0$ et $y-z=0$.
b) Avec les mêmes notations, $\overrightarrow{AB}(0;-2\ ;1)$ et $\vec{u}(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires et (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
• $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-2b+c=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{u}=a+c=0$, d'où si on choisit $b=1$, le vecteur $(-2;1;2)$ est normal à $\mathcal{Q}$. Puis :
$$-2x+y+2z+d=0 \text{ et } d=0,$$
$-2x+y+2z=0$ est une équation du plan $\mathcal{Q}$.
c) Avec les mêmes notations, $\overrightarrow{AB}(-1;-2;2)$ et $\vec{u}(2\ ;0;1)$ ne sont pas colinéaires et (AB) n'est pas perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
• $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-a-2b+2c=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{u}=2a+c=0$ d'où, si on choisit $a=1$, le vecteur $\left(1;-\dfrac{5}{2};-2\right)$ est normal à $\mathcal{Q}$.
Puis $x-\dfrac{5}{2}y-2z+d=0$ et $d=\dfrac{7}{2}$: $x-\dfrac{5}{2}y-2z+\dfrac{7}{2}=0$ est une équation du plan $\mathcal{Q}$.

48 **1.** Le vecteur $\vec{k}(0;0;1)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n_1}(1;-\sqrt{3};0)$ normal à $\mathcal{P}_1$, donc (Oz) est parallèle à $\mathcal{P}_1$. De même, $\vec{k}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n_2}(\sqrt{3};-1;0)$, normal à $\mathcal{P}_2$, donc (Oz) est parallèle à $\mathcal{P}_2$.
$\vec{k}$ étant un vecteur normal à (xOy), celui-ci est perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2. • $d_1 : \begin{cases} x-y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$

Donc d_1 passe par $A(-\sqrt{3};0;0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}(\sqrt{3};1;0)$.

• $d_2 : \begin{cases} x\sqrt{3}-y+1=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=x\sqrt{3}+1 \\ z=0 \end{cases}$

Donc d_2 passe par B(0; 1; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(1;\sqrt{3};0)$.

3. $\vec{u}\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{3};0\right)$ et $\vec{v}(1;\sqrt{3};0)$;
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$,
soit $2=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}\times\sqrt{1+3}\times\cos(\vec{u},\vec{v})$,
d'où $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $(\vec{u},\vec{v})=30°$.

49 • **1. a)** $CF=CH=FH=\sqrt{2}$.
b) • $AC=AH=\sqrt{2}$; $GC=GH=1$; $IC=IH$ (car I est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral CFH), donc A, G et I appartiennent bien au plan médiateur du segment [CH].
• $AC=AF=\sqrt{2}$; $GC=GF=1$; $IC=IF$, donc A, G et I appartiennent bien au plan médiateur du segment [CF].

c) $\begin{cases} (AG)\perp(CH) \\ (AG)\perp(CF) \end{cases} \Rightarrow (AG)\perp(CFH)$.

$\begin{cases} (AI)\perp(CH) \\ (AI)\perp(CF) \end{cases} \Rightarrow (AI)\perp(CFH)$, donc $(AG)=(AI)$.

2. F(0; 0; 0), E(1; 0; 0), G(0; 1; 0), B(0; 0; 1), A(1; 0; 1), C(0; 1; 1), D(1; 1; 1), H(1; 1; 0) et I $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
a) $CF=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=FH=CH$.
b) Le plan médiateur de [CH] a pour vecteur normal $\overrightarrow{CH}(1;0;-1)$ et passe par le milieu de [CH] de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)$.
$x-z=0$ est une équation de ce plan médiateur, vérifiée par les coordonnées des points A, G et I.
De la même manière, $y+z-1=0$ est une équation du plan médiateur de [CF], vérifiée par les coordonnées de A, G et I.
c) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{FC}=0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{FH}=0$: $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH), donc $(AG)\perp(CFH)$.
D'autre part, $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$, donc (AG) passe par I.

Sphères

50 **1.** $\overrightarrow{\Omega A}(-3;1;-2)$ et $\Omega A=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$.
2. $\overrightarrow{\Omega M}(x-2;y+1;z-3)$;
$\Omega M^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$.
3. $\Omega M^2=\Omega A^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$.

51 *Corrigé dans le manuel.*

52 **1.** $\Omega A^2=2$ et $x^2+y^2+(z-1)^2=2$.
2. $\Omega A^2=66$ et $x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=66$.
3. $\Omega A^2=9$ et $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

53 • **1.** $\Omega\left(2\ ;\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2}\right)$, $AB=\sqrt{36+9+9}=3\sqrt{6}$,
$r=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ et une équation de la sphère est :
$$(x-2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{27}{2}.$$
2. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+1)+(y-5)(y-2)+(z-5)(z-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x-5+y^2-7y+10+z^2-7z+10=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{27}{2}.$$

54 • **1.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=11$
2. $\mathcal{P}_A : x+3y-z-13=0$;
$\mathcal{P}_B : x+3y-z+9=0$.

55 • $d(A;\mathcal{P}) = \dfrac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.
Donc la sphère cherchée a pour équation :
$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2 = \frac{1}{14}.$$

56 • **1.** $2-2+2z-4=0$ soit $z=2$.
2. $\vec{n}(1;-2;2)$ est normal à $\mathcal{P}$ et de norme 3, d'où :
$\vec{n_1}(1;-2;2)$ et $\vec{n_2}(-1;2;-2)$.
3. $(A\Omega_1)$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et $A\Omega_1 = 3$: S_1 est tangente en A à $\mathcal{P}$.
4. $\Omega_1\ (3;-1;4)$, $\Omega_2\ (1;3;0)$ et $r=3$, d'où :
$S_1 : (x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=9$;
$S_2 : (x-1)^2+(y-3)^2+z^2=9$.

Recherche d'ensemble

57 •• **1.** Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB). Puisque AB = 8,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -12 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = -12 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = -\dfrac{3}{16}\,\overrightarrow{AB}$.
L'ensemble cherché est le plan perpendiculaire à (AB) passant par H.
2. Soit I le milieu de [AB].
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM})\cdot(\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{IM}) = -\dfrac{AB^2}{4} + IM^2$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = -12 \Leftrightarrow -\dfrac{64}{4} + IM^2 = -12 \Leftrightarrow IM^2 = 4$
$\Leftrightarrow IM = 2$
$\Leftrightarrow M \in S$ (où S est la sphère de centre I et de rayon 2).

58 •• Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, 2) et I le milieu de [AB].
a) $(\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{MG}\cdot 2\,\overrightarrow{MI} = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MI} = 0$
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [GI].
b) $(\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$
$\Leftrightarrow$ M appartient au plan perpendiculaire à (AB) et passant par G.
c) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}-2\,\overrightarrow{MC}) = 0$ [1].
Soit K le barycentre de (B, 1) et (C, – 2).
[1] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot(-\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de diamètre [AK].

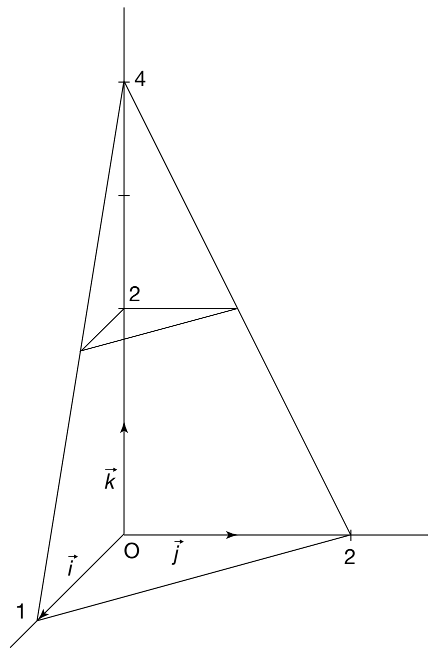
Demi-espaces

59 A(4; 0; 0), B(0; 2; 0) et C (0; 0; 3) ne sont pas alignés et définissent un plan.
• Soit $\vec{n}\ (a;b;c)$ un vecteur normal à (ABC) :
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -4a+2b = 0$;
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -4a+3c = 0$.

En choisissant $a=3$, $\vec{n}(3;6;4)$ et une équation du plan (ABC) est $3x+6y+4z-12=0$ (que l'on pouvait obtenir directement en utilisant la remarque faite dans « Comprendre » page 385). Le tétraèdre OABC est caractérisé par le système d'inéquations suivant :
$$\begin{cases} x>0,\ y>0,\ z>0 \\ 3x+6y+4z-12<0 \end{cases}$$

60 • $6x+3y+4z-12=0$ est une équation du plan (ABC) et $2x+3y+z-6=0$ est une équation du plan (ACD), d'où le système d'inéquations caractérisant le tétraèdre ABCD :
$$\begin{cases} x>0 \\ z>0 \\ 2x+3y+z-6>0 \\ 6x+3y+4z-12<0 \end{cases}$$

61 •



Prendre toutes les initiatives

62 Oui, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1.
On a deux possibilités $\vec{w}$ et $-\vec{w}$.
Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de $\vec{w}$ (et de $-\vec{w}$) vérifient :
$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-4x \\ 18x^2=1 \end{cases}$$
D'où $\vec{w}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}\,;-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\,;-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

63 • $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 2-2 = 0$: les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

$d(A, \mathcal{P}_1) = \dfrac{7}{\sqrt{6}}$; $d(A, \mathcal{P}_2) = \sqrt{5}$

$d^2(A, \Delta) = d^2(A, \mathcal{P}_1) + d^2(A, \mathcal{P}_2) = \dfrac{79}{6}$

d'où $d(A, \Delta) = \sqrt{\dfrac{79}{6}}$.

64 • $\overrightarrow{AB}\,(-4\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-2\,;3\,;-1)$ ne sont pas colinéaires.

$$D \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -3 \\ x + 3y = 1 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution : les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires (le couple $\left(-\dfrac{7}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right)$ est solution du système composé des deux dernières équations mais n'est pas solution de la première équation).

I appartient aux plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ médiateurs respectivement des segments [AB], [AC] et [AD].

Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de I sont solutions du système : $\begin{cases} -4x + y + z - 3 = 0 \\ -2x + 3y - z + 3 = 0 \\ -3x + y - 5z + \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases}$.

Le point I a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{4}\,;-\dfrac{9}{8}\,;\dfrac{9}{8}\right)$.

65 • $\vec{v}$ et $\vec{n}\,(2\,;-1\,;-1)$ normal au plan $\mathcal{P}$, ne sont pas orthogonaux : la droite d coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point $B(x\,;y\,;z)$ et se projette orthogonalement selon une droite d' sur le plan $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{v} \Leftrightarrow \exists\, k \,/\, \overrightarrow{AB} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -k \\ y - 2 = -k \\ z + 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 2 - k \\ z = k - 1 \end{cases}$$

$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2(2-k) - (2-k) - (k+1) + 3 = 0$, d'où $k = 3$ et $B(-1\,;-1\,;2)$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan 3.

$\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n} \Leftrightarrow \exists\, k \,/\, \overrightarrow{AH} = k\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2k \\ y - 2 = -k \\ z + 1 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = 2 - k \\ z = -k - 1 \end{cases}$$

$H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2(2k+2) - (2-k) - (-k+1) + 3 = 0$, d'où $k = -1$ et $H(0\,;3\,;0)$.

La droite d se projette en (BH) sur le plan $\mathcal{P}$.

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}}{BA \times BH} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ et $\alpha \approx 28{,}125°$.

Problèmes

(page 401)

66 **Partie A :**

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: le triangle ABC est rectangle en A.

2. $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}(1\,;1\,;1)$ normal au plan $\mathcal{P}$: (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et $1 + 1 + 1 - 3 = 0$: le plan $\mathcal{P}$ passe par A.

3. $\mathcal{P}' : x - z - 1 = 0$.

4. $\Delta \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$

Choisissons $x = 1$, alors $M(1\,;2\,;0)$: le vecteur $\overrightarrow{AM}(-2\,;4\,;-2)$ est un vecteur directeur de Δ.

Partie B :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$: la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. $\mathcal{V}(ABDC) = \dfrac{1}{3} \times AD \times \dfrac{AB \times AC}{2} = 27$.

3. $\cos\widehat{BDC} = \dfrac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC} = \dfrac{54}{54\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. a) $S = \dfrac{1}{2} DB \times DC \times \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 27$.

b) Soit d la distance de A au plan (BDC) :

$\mathcal{V}(ABDC) = \dfrac{1}{3} \times d \times 27 = 27$ d'où $d = 3$.

67 • **1.** $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$: ABC est équilatéral.

2. $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + 0 = 0$.

(OH) est orthogonale à (AB) et par hypothèse à (IC) donc au plan (ABC) et en particulier à (BC).

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$.

3. L'introduction d'un repère judicieusement choisi n'arrive qu'à la question **4**…

$\mathcal{V}(ABDC) = \dfrac{1}{3} \times OC \times \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{1}{3} \times OH \times \dfrac{IC \times AB}{2}$

$OH = \dfrac{OA \times OB \times OC}{IC \times AB} = \dfrac{a^3}{a\dfrac{\sqrt{6}}{2} \times a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

4. a) Cela résulte de la nature de H : isobarycentre des points A, B et C.

b) $D\left(-\dfrac{a}{3}\,;-\dfrac{a}{3}\,;-\dfrac{a}{3}\right)$ d'où :

$\overrightarrow{DA}\left(\dfrac{4a}{3}\,;\dfrac{a}{3}\,;\dfrac{a}{3}\right)$ et $DA = a\sqrt{2}$.

De même, $DB = DC = a\sqrt{2}$: ABCD est régulier.

c) (OH) est contenue dans les plans médiateurs de [AB], [BC] et [CA] : $\Omega \in$ (OH).
Comme $\overrightarrow{O\Omega}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OH}$, les coordonnées de Ω sont de la forme $(x\,;x\,;x)$.

$\Omega A^2 = \Omega D^2 \Leftrightarrow (a - x^2) + 2x^2 = 3\left(-\frac{a}{3} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$.
Donc $\Omega\left(\frac{a}{6}\,;\frac{a}{6}\,;\frac{a}{6}\right)$.

Problèmes (page 401)

68 **1. b)** $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}(2\,\overrightarrow{OA} + 3\,\overrightarrow{OB})$; G(2; 3; 0).

2. a) $(\overrightarrow{MO} + 2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
$\Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de diamètre [CG].

b) $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) + y(y-3) + z(z-4) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 4z = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

3. Notons $\mathscr{C}$ l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$.

$$M(x; y; z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{25}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(0\,; \frac{3}{2}\,; 2\right)$, de rayon $\frac{5}{2}$, dans le plan (yOz).

4. $MO^2 + 2\,MA^2 - 3\,MB^2 = 24$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BG})^2 = 24$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}) + GO^2 + 2GA^2 - 3GB^2 = 24$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}) = 0$.
Or, le vecteur $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $(12; -18; 0)$, donc :

$$MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \vec{u} = 0,$$

avec $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. L'ensemble $\mathscr{P}$ est donc le plan passant par le point G et de vecteur normal $\vec{u}$.

C'est nouveau au bac (page 402)

69 **1.** b – **2.** a – **3.** c – **4.** a ; b – **5.** a.

70 **1.** F – **2.** V – **3.** V – **4.** V – **5.** V.

71 **1.** Cours.

2. $\frac{|x + y + z + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y - z - 3|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$
ou $2y + 2z - 3 = 0$.