

Activités (page 346)

ACTIVITÉ 1

1. $z_A = 2 + i, z_B = 1 + i.$

2. $r = \frac{OB}{OA} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = |Z|.$

$\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$
 $= \arg(z_B) - \arg(z_A)$
 $= \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg Z \text{ (modulo } 2\pi).$

3. $Z = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, r = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}.$

ACTIVITÉ 2

1. $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}_1$ équivaut à $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}_1,$
 d'où $z' = z + a.$

2. $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM},$ d'où $z' = kz.$

3. 2. a) $z = x + iy, z' = -y + ix.$ Conjecture : $z' = iz.$

b) $M(r; \theta), M' = (r'; \theta'). r = r', \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi).$

$z = re^{i\theta}, z' = r'e^{i\theta'}$ d'où $z' = re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = re^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}$

soit $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z.$

On retrouve $z' = iz.$

c) • $t = -\frac{\pi}{2}, z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = -iz.$

• $t = \frac{\pi}{3}, z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z.$

• $t = -\frac{\pi}{4}, z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z.$

Travaux dirigés (page 355)

TD 1

1. Par le quart de tour $R_{\left(P; -\frac{\pi}{2}\right)} : A \mapsto B;$

$b - p = -i(a - p)$ d'où $p = \frac{1}{2}[a(1 + i) + b(1 - i)].$

2. De même : $q = \frac{1}{2}[b(1 - i) + c(1 + i)];$

$r = \frac{1}{2}[c(1 + i) + d(1 - i)]; s = \frac{1}{2}[a(1 + i) + d(1 - i)].$

3. $p + r = \frac{1}{2}[(1 + i)(a + c) + (1 - i)(b + d)] = q + s.$

D'où $q - p = r - s$; $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

TD 2

2 1. a) R pour affixe $r = i(a - p).$

b) Par la rotation $R_{\left(Q; \frac{\pi}{2}\right)} : R \mapsto P;$

d'où $p - q = i(r - q).$

On en déduit que $q = \frac{a(1 + i)}{2}$ (indépendant de p).

c) Or $P_0(a)$ et $Q_0(ia)$, donc Q est le milieu de $[P_0R_0].$

2. Par la rotation $R_{\left(S; \frac{\pi}{2}\right)} : P \mapsto R;$

d'où $r - s = i(p - s).$

On en déduit que $s = (p - \frac{a}{2})(1 - i)$ [1].

Remarque : On peut aussi obtenir l'affixe s de S en remarquant que S est tel que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ d'où $s = p + r - q.$

3. a) On pose $s = x + iy, (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}).$

De la relation [1] on déduit :
$$\begin{cases} x = p - \frac{a}{2} \\ y = -\left(p - \frac{a}{2}\right) \end{cases} [2].$$

b) On note Σ le lieu du point S.

Si $M \in \Sigma,$ alors ses coordonnées sont telles que $y = -x,$ donc S est contenu dans la droite Δ d'équation $y = -x.$

Mais M décrit-il toute la droite Δ ?

p décrit l'intervalle $[0 ; a]$ et :

$$0 \leq p \leq a \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \leq p - \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

M ne décrit que le segment de Δ défini pour les abscisses dans $\left[-\frac{a}{2} ; \frac{a}{2}\right]$.

Ainsi $\Sigma = [AB]$ avec $A\left(-\frac{a}{2} ; \frac{a}{2}\right)$ et $B\left(\frac{a}{2} ; -\frac{a}{2}\right)$.

TD 3

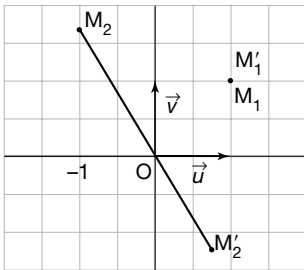
1 1. Pour $z \neq 0, z' = \frac{k}{\bar{z}} = \frac{k}{\bar{z}z}z = \frac{k}{|z|^2}z$ avec $\frac{k}{|z|^2} \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{d'où } \overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM} \quad [1].$$

2. a) • Si $k > 0, \overrightarrow{OM'}$ et \overrightarrow{OM} sont non nuls, colinéaires de même sens, donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$ et en considérant les normes dans [1], $OM' \times OM = k$.

• Si $k < 0, \overrightarrow{OM'}$ et \overrightarrow{OM} sont non nuls, colinéaires de sens contraires, donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi$ et $OM' \times OM = |k| = -k$.

b) Application : $M'_1 = M_1 ; \overrightarrow{OM}'_2 = -\frac{3}{4} \overrightarrow{OM}_2$.



3. De [1] on déduit que M' est sur (OM) et :

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{k}{OM^2} \overrightarrow{OM}^2 = k \quad [2].$$

4. L'image de M' a pour affixe $\frac{k}{z'} = \frac{k}{\frac{k}{\bar{z}}} = z$ donc l'image de M' est M .

Commentaire : L'inversion est une transformation involutive du plan privé de $O : \Phi \circ \Phi = Id$.

2 1. M désigne un point d'affixe $z, z \neq 0$.

$$M = \Phi(M) \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1.$$

L'ensemble des points invariants est le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

2. a) M' est le projeté orthogonal de T sur (OM) donc :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OT}.$$

T est le projeté orthogonal de M sur (OT) donc :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT}^2 = OT^2.$$

b) $M' \in (OM)$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = OT^2 = 1$; d'après [2] :

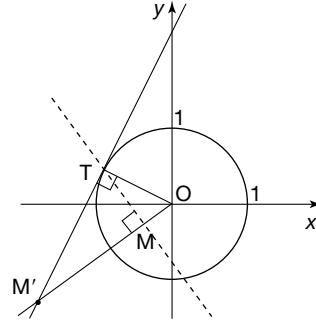
$$M' = \Phi(M).$$

3. Lorsque M est intérieur à $\mathcal{C}, M \neq O$:

– la perpendiculaire à (OM) coupe en M le cercle \mathcal{C} en deux points T et T' ;

– (OM) coupe la perpendiculaire en T à (OT) en M' . Ainsi, $(M'T)$ est tangente en T au cercle \mathcal{C} ; d'après

2.2., $M = \Phi(M')$ et d'après **1** **4.**, $M' = \Phi(M)$.



3 2. a) Pour tout $z \neq 0$:

$$|z - i| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z'} - i \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |1 - iz'| = |z'|$$

$$\Leftrightarrow |(-i)(z' + i)| = |z'| \Leftrightarrow |z' + i| = |z'|.$$

Or, deux complexes conjugués ont même module d'où :

$$|z - i| = 1 \Leftrightarrow |z' - i| = |z'|.$$

Géométriquement, $AM = 1$ équivaut à $AM' = OM'$ d'où Γ' est la médiatrice de $[OA]$.

b) Pour tout $z \neq 0$:

$$|z - i|^2 = 2 \Leftrightarrow (z - i)(\bar{z} + i) = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z'} - i\right)\left(\frac{1}{z'} + i\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - iz')(1 + iz') = 2z'\bar{z}' \Leftrightarrow z'\bar{z}' + iz'\bar{z}' - iz'\bar{z}' - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z' + i)(\bar{z}' - i) - 2 = 0 \Leftrightarrow (z' + i)(\bar{z}' - i) = 2,$$

$$\text{soit } |z - i|^2 = 2 \Leftrightarrow |z' + i|^2 = 2.$$

Géométriquement, $AM^2 = 2 \Leftrightarrow BM'^2 = 2$,

soit $AM = \sqrt{2} \Leftrightarrow BM' = \sqrt{2}$, d'où Σ' est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

3. a) M désigne un point d'affixe $z, z \neq 0$;

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow AM^2 = AO^2 \Leftrightarrow |z - a|^2 = |a|^2$$

$$\Leftrightarrow (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = a\bar{a} \Leftrightarrow z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z = 0.$$

$$\text{b) } z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z'} \times \frac{1}{z'} - \frac{a}{z'} - \frac{\bar{a}}{z'} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - az' - \bar{a}z' = 0.$$

Ainsi $M(z)$ appartient à Γ équivaut à dire que $M'(z')$ appartient à l'ensemble des points d'affixe z' tels que :

$$1 - az' - \bar{a}z' = 0.$$

c) On pose $z' = X + iY$:

$$1 - a\bar{z}' - \bar{a}z' = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - (\alpha + i\beta)(X - iY) - (\alpha - i\beta)(X + iY) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\alpha X - 2\beta Y = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha X + \beta Y = \frac{1}{2}.$$

d) D'après b) et c), Γ' est la droite d'équation :

$$\alpha X + \beta Y - \frac{1}{2} = 0.$$

Note : Par hypothèse, $\alpha \neq 0$, donc α et β ne sont pas simultanément nuls. $\overline{OA}(\alpha; \beta)$ est un vecteur normal à Γ' et donc Γ' est perpendiculaire à (OA) .

TD 4

1. a) Dans \mathbb{C}^* :

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

b) • $\theta_0 = 1, \theta_1 = \frac{2\pi}{3},$

$\theta_2 = \frac{4\pi}{3}.$

Donc 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont solutions de l'équation

$$z^3 = 1.$$

• Lorsque $k = 3p$ ($p \in \mathbb{Z}$),

$$\theta_k = \frac{2 \times 3p\pi}{3} = 2p\pi = \theta_0 \text{ (modulo } 2\pi);$$

lorsque $k = 3p + 1,$

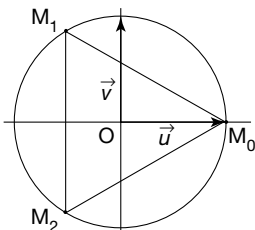
$$\theta_k = \frac{2 \times (3p + 1)\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2p\pi = \theta_1 \text{ (modulo } 2\pi);$$

lorsque $k = 3p + 2,$

$$\theta_k = \frac{2 \times (3p + 2)\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2p\pi = \theta_2 \text{ (modulo } 2\pi).$$

Ainsi les seules solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont celles indiquées ci-dessus.

c) La rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ a pour



écriture complexe $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z.$

Par $R : M_0 \mapsto M_1, M_1 \mapsto M_2, M_2 \mapsto M_0$; R conserve les longueurs donc $M_0M_1 = M_1M_2 = M_2M_0$ et le triangle $M_0M_1M_2$ est équilatéral.

d) $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

Commentaire : La notion de suite géométrique complexe permet de retrouver ce résultat.

$S = 1 + j + j^2$ est la somme des trois premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison j ($j \neq 1$),

d'où $S = \frac{1-j^3}{1-j}$; or $j^3 = 1$ donc $S = 0.$

j est de module 1 donc $j\bar{j} = |j|^2 = 1$; d'où $j\bar{j} = j^3$

donc $\bar{j} = j^2$; or, $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$, donc $j^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$

2. « ABC équilatéral direct » $\Leftrightarrow a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b);$

or, $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc :

« ABC équilatéral direct » $\Leftrightarrow a - b = -j^2(c - b)$
 $\Leftrightarrow a + b - (1 - j^2)c = 0,$

soit « ABC équilatéral direct » $\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0.$

3. a) $M = M' \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ réel $\Leftrightarrow M \in (Ox).$

Donc $M \neq M'$ signifie que $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$

b) Sous cette hypothèse, R, M et M' sont distincts deux à deux.

$M \in \Delta \Leftrightarrow RMM'$ équilatéral direct

$$\Leftrightarrow 1 + zj + \bar{z}j^2 = 0 \Leftrightarrow zj + \bar{z}j = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(zj) = -\frac{1}{2}.$$

Posons $z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \neq 1$ et $y \neq 0$, alors

$$\operatorname{Re}(zj) = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y).$$

Ainsi, $M \in \Delta \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 1 = 0.$

Donc Δ est la droite d'équation $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$, privée du point $R(1; 0).$

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 360)

1. et 2. Affixe d'un vecteur

1 2. $\overline{AB}(3), \overline{AC}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right), \overline{BC}\left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i\right).$

3. $AB^2 = 9, AC^2 = \frac{5}{2}, BC^2 = \frac{17}{2}.$ ABC n'est pas un triangle rectangle.

2 2. $\overline{AB}\left(\frac{4}{3} + 4i\right), \overline{AC}\left(\frac{8}{3} + 8i\right).$

3. $\overline{AC} = 2\overline{AB}$ donc A, B et C sont alignés.

3 2. $\overline{AB}(3,5 - 0,5i), \overline{DC}(3,5 - 0,5i)$ donc ABCD

est un parallélogramme; de plus, $AB = AD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ donc ABCD est un losange.

- 4** 1. $|z_A| = |z_B| = 4$ donc $OA = OB = 4$.
 2. O centre de gravité de ABC $\Leftrightarrow \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$
 d'où :

$$z_C = -z_B - z_A = -4.$$

3. $AB = AC = BC = 4\sqrt{3}$ donc ABC est équilatéral.

- 5** 1. $Z = 0$.

2. $z_G = \frac{a+b+c}{3} = 2+i$.

3. $\frac{a'+b'+c'}{3} = 2+i = z_G$.

6 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$

d'où $\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

7 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ d'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.

$\overrightarrow{AB}(3; 4), \overrightarrow{AC}(4; -3), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

8 Corrigé dans le manuel.

9 1. $-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; 0; \pi$.

2. $\bullet \overrightarrow{FA}(3-2i); \theta$ est tel que $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

et $\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, d'où $\theta \approx -0,588$.

$\bullet \overrightarrow{AD}(-5-i); \theta = -2,944$.

Commentaire : Pour \cos^{-1} l'intervalle de définition (calculatrice) est $[0; \pi]$; pour \sin^{-1} , il est de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; il faut veiller à ajuster le résultat dans le bon intervalle.

10 2. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$;

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}; (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6}$.

3. ABC est un triangle rectangle en B (demi-triangle équilatéral).

11 1. $\Omega A = |a - \omega| = |3 - 4i| = 5; \Omega B = \Omega C = \Omega D = 5$.

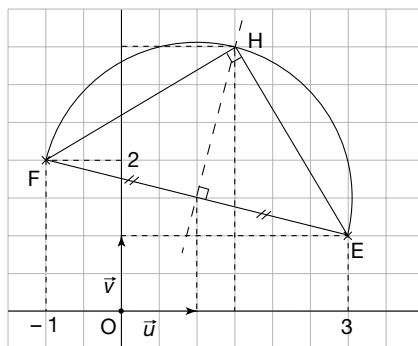
2. a) $e = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$.

b) $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$.

b) De l'égalité des arguments, on déduit :
 $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$.

(EA) est la bissectrice de \widehat{DEC} .

12 1.



2. a) $|Z| = \frac{HE}{HF} = 1, \arg Z = (\overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HE}) = \frac{\pi}{2}$.

b) $Z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ d'où $z_E - z_H = i(z_F - z_H)$.

$z_H = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$.

13 1. Une égalité entre vecteurs équivaut à celle de leurs affixes.

2. Si G est barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ alors pour tout point M :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

3. Si $M = O$ alors

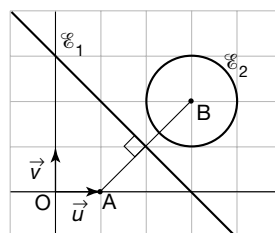
$$3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OA_1} - 2\overrightarrow{OA_2} + 5\overrightarrow{OA_3} - 3\overrightarrow{OA_4}$$

D'où $z_G = \frac{3z_1 - 2z_2 + 5z_3 - 3z_4}{3}$.

Ainsi $z_G = 8 + \frac{4}{3}i$.

14 a) Médiatrice de $[AB]$: \mathcal{E}_1 .

b) Cercle de centre B et de rayon 1 : \mathcal{E}_2 .



15 1. $M \in \Gamma_B \Leftrightarrow BM \leq OB \Leftrightarrow |z - z_B| \leq |z_B|$
 $\Leftrightarrow |z - 2 - i| \leq \sqrt{5}$.

2. $M \in \Gamma_C \Leftrightarrow |z + 2 - i| \leq 2\sqrt{2}$.

3. L'ensemble \mathcal{E} est l'intersection des deux disques.

16 1. a) $M \in \Delta \Leftrightarrow |z - a| = |z - b|$

$\Leftrightarrow |z - (-i)| = |z - 2 - i|$.

b) $M \in \Delta' \Leftrightarrow |z - 2 - 2i| = |z + 1 - 3i|$.

b) Par la rotation $R_{\left(P; \frac{\pi}{3}\right)} : Q \mapsto R$ donc PQR est un triangle équilatéral direct.

30 1. a) Par $R_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)} : N \mapsto A, B \mapsto Q$.

b) $a = in$ donc $n = -ia; q = ib$.

2. a) $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$ donc $r = n + q$.

b) D'où $r = i(b - a)$.

c) $\frac{r}{b-a} = i$ d'où par interprétation géométrique du module et d'un argument du quotient

$$\begin{cases} OR = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Apprendre à chercher

(page 363)

31 Étudier une configuration

Les outils :

- Écriture complexe d'une rotation.
- Interprétation géométrique d'un quotient.

Les objectifs :

- Établir une relation entre des distances.
- Démontrer l'orthogonalité de deux droites.

1. Par $R_{\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto B'$ donc $b' = -ib$.

Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)} : C \mapsto C'$ donc $c' = ic$;

$$m = \frac{b+c}{2}.$$

2. $Q = \frac{c'-b'}{m} = 2i$, d'où par interprétation géométrique :

$$\begin{cases} \frac{B'C'}{AM} = 2 \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

32 Recherche géométrique d'ensembles

Les outils :

- Argument d'un quotient
- Interprétation géométrique d'un argument
- Angles orientés et colinéarité ou orthogonalité de vecteurs.

Les objectifs :

- Déterminer des ensembles de points
- Exploiter l'argument d'un quotient
- Caractériser des ensembles de points à l'aide des angles orientés.

1. Pour $z \neq a$ et $z \neq b$,

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right).$$

2. a) « z' réel » signifie « soit $z' = 0$, soit lorsque $z' \neq 0$, $\arg z' = 0$ ou $\arg z' = \pi$ ».

D'où « $z' \in \mathbb{R}$ » équivaut à « $M = B$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ ou $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ ».

b) Δ est la droite (AB) privée de A. (Par hypothèse $M \neq A$).

3. « z' imaginaire pur »

signifie « soit $z' = 0$, soit lorsque $z' \neq 0$,

$$\arg z' = \frac{\pi}{2}$$

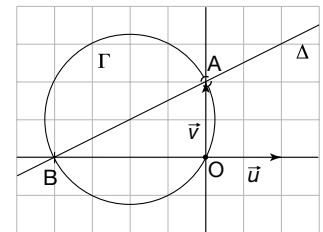
$$\text{ou } \arg z' = -\frac{\pi}{2} \text{ ».}$$

« z' imaginaire pur »

équivaut à « $M = B$

$$\text{ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} \text{ ».}$$

Γ est le cercle de diamètre [AB] privé de A.



33 Utiliser des quarts de tour

Les outils :

- Relations dans un parallélogramme
- Écriture complexe d'une rotation
- Caractérisation d'un triangle rectangle isocèle.

Les objectifs :

- Reconnaître des figures clés associées à un quart de tour
- Traduire une propriété géométrique à l'aide d'une transformation.

1. a) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ donc $b = a + c$.

b) Par $R_{\left(C; -\frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto M$ donc $m - c = -i(b - c)$ d'où

$$m = c - ia.$$

c) Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto N$ donc $n - a = i(b - a)$ d'où

$$n = a + ic.$$

2. $n = im$. Ainsi par $R_{\left(D; \frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto N$ donc DMN est

un triangle rectangle isocèle direct en D.

34 Trouver des lieux géométriques

Les outils :

- Argument d'un quotient.
- Caractérisation d'une demi-droite ouverte par $\arg(z - a) = \theta$.

Les objectifs :

- Déterminer un ensemble de points.
- Utiliser des conditions angulaires.
- Examiner des cas particuliers.

1. a) $M = M' \Leftrightarrow z(1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
 $M = M'' \Leftrightarrow z(1-z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$.

b) Lorsque $z \neq 0$ et $z \neq 1$,

$$(\overline{MM'}, \overline{MM''}) = \arg\left(\frac{z^2 - z}{iz - z}\right) = \arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right);$$

M, M', M'' alignés équivaut à $\arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) = 0$ ou π [1].

c) $\arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$, donc la condition [1] s'écrit aussi $\arg(z-1) - \arg(i-1) = 0$ ou π , donc M, M', M'' alignés équivaut à $\arg(z-1) = \frac{3\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$ [2].

2. L'ensemble des points M définis par [2] est la droite passant par I , dirigée par \vec{w} tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{\pi}{4}$, privée de I . Or O et I sont, d'après 1. a), aussi deux solutions particulières donc Δ est la réunion de cette droite d et de l'origine O .

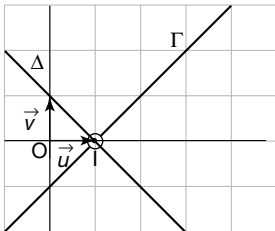
3. $M \in \Gamma$ équivaut à $M' \neq M, M'' \neq M$ et :

$$(\overline{MM'}, \overline{MM''}) = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2},$$

soit $M \neq O, M \neq I$ et $\arg\left(\frac{z-1}{i-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$,

et donc $M \neq O, M \neq I$ et $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$.

Ainsi Γ est la droite passant par I dirigée par \vec{t} tel que $(\vec{u}, \vec{t}) = \frac{\pi}{4}$, privée de I .



Pour progresser

(page 365)

Vecteurs et affixes

36 ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$

$$\Leftrightarrow b - a = c - d$$

$$\Leftrightarrow a + c = b + d.$$

Note : Cette équivalence peut aussi être établie à partir de la propriété caractéristique des diagonales.

37 1. b) $OA = OB$ donc OAB est un triangle isocèle.

c) $(\vec{u}, \overline{OI}) = \frac{1}{2}(\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{3\pi}{8}$.

2. a) $z_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} e^{i \frac{3\pi}{8}}$.

b) $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

35 Longueur d'une ligne brisée

Les outils :

- Interprétation géométrique des complexes.
- Suite géométrique, somme des termes.

Les objectifs :

- Établir un programme de construction.
- Calculer la longueur d'une ligne polygonale.
- Examiner la convergence d'une suite.

1. a) **Conjecture** : les triangles $OA_k A_{k+1}$ sont rectangle en O .

b) Pour tout entier naturel k , $a_{k+1} = \left(\frac{1}{2}i\right)a_k$, donc :

$$\begin{cases} |a_{k+1}| = \frac{1}{2}|a_k| \\ \arg a_{k+1} = \frac{\pi}{2} + \arg a_k \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} OA_{k+1} = \frac{1}{2}OA_k \\ (\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

c) Connaissant A_k , la construction de A_{k+1} est immédiate d'après (1).

2. a) $A_{k+1}A_{k+2} = |a_{k+2} - a_{k+1}| = \left|\frac{1}{2}ia_{k+1} - \frac{1}{2}ia_k\right|$
 $= \frac{1}{2}|a_{k+1} - a_k| = \frac{1}{2}A_k A_{k+1}$

soit $d_{k+1} = \frac{1}{2}d_k$.

b) (d_k) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $d_0 = 4\sqrt{5}$.

c) L_n est la somme des n premiers termes de cette suite géométrique;

$$L_n = 8\sqrt{5} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 8\sqrt{5}.$$

Prolongement : on pose $s_k = \text{aire}(OA_k A_{k+1})$, (s_k) est une suite géométrique de raison $q' = \frac{1}{4}$ et de premier terme $s_0 = 16$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

38 1. a) $a = 1, b = 3, c = 3 + i$.

b) $\alpha = \arg c = \arg(3 + i), \beta = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{2}\right)$.

2. $\alpha + \beta = \arg\left(\frac{(3+i)(2+i)}{2}\right)$, d'où $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

39 $\alpha = \arg d = \arg(8 + i), \beta = \arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{5+i}{3}\right)$,

$$\gamma = \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{2+i}{2}\right).$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg\left(\frac{(8+i)(5+i)(2+i)}{2}\right) \text{ d'où } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

40 Corrigé dans le manuel.

41 1. $\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = 3$ d'où $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = 0$ et l'alignement de A_1, B_1, C_1 .

2. Par $R_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)}: A_1 \mapsto A_3, B_1 \mapsto B_3, C_1 \mapsto C_3$; R conserve l'alignement, d'où le résultat.

3. a) $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_3}$ d'où :

$$c_2 = c_1 + c_3 = c_1 + ic_1 = (1+i)c_1.$$

b) De même : $b_2 = (1+i)b_1$ et $a_2 = (1+i)a_1$.

Ainsi $\frac{c_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1}$ d'où l'alignement de A_2, B_2, C_2 .

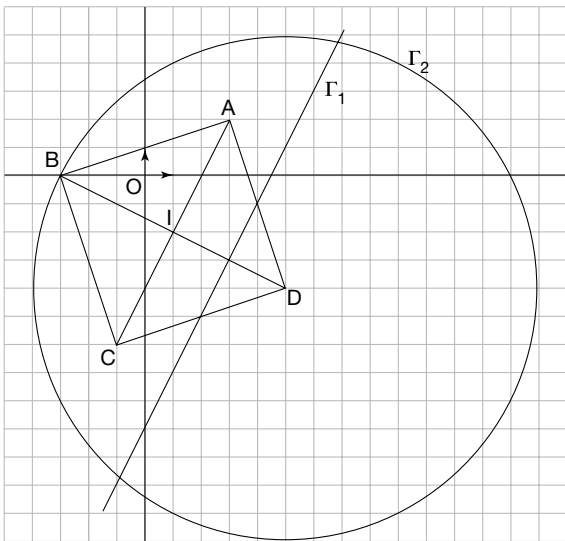
42 1. $s = a(1+ix), t = a(x+i)$.

2. a) $\theta = \arg\left(\frac{t}{s}\right)$. Or $\frac{t}{s} = \frac{2x}{1+x^2} + i\frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\left|\frac{t}{s}\right| = \frac{|t|}{|s|} = 1$,

donc θ est tel que $\cos \theta = \frac{2x}{1+x^2}$ et $\sin \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ lorsque $x = \sqrt{2} - 1$.

43 • 1. a)



b) $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$.

$$\begin{cases} |Z| = 1 \\ \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} AI = BI \\ (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc le triangle IAB est rectangle isocèle en I.

c) $z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$ d'où $z_C = -1 - 6i$.

d) $z_D = z_A - z_B + z_C = 5 - 4i$.

e) D est tel que $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ donc DABC est un parallélogramme.

De plus : $\begin{cases} IA = IB \\ (IA) \perp (IB) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} AC = BD \\ (AC) \perp (BD) \end{cases}$.

Le parallélogramme ABCD dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un carré.

2. $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MI}\|.$$

Γ_1 est la médiatrice de $[DI]$.

3. a) Posons $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Alors $\overrightarrow{V}(B) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$

d'où $\|\overrightarrow{V}(B)\| = |z_D - z_B| = |8 - 4i| = 4\sqrt{5}$ donc $B \in \Gamma_2$.

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = 4\sqrt{5}.$$

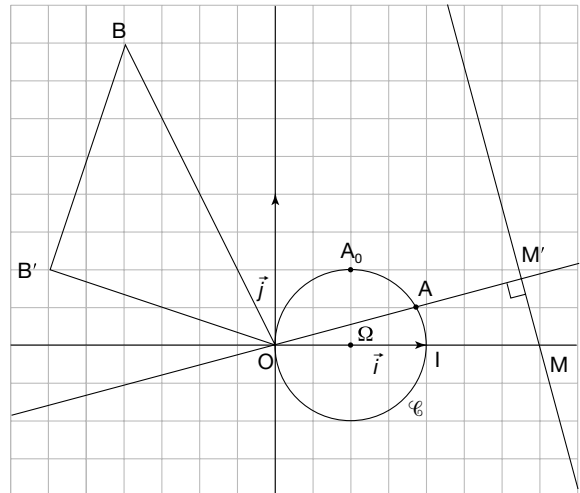
Γ_2 est le cercle de centre D et de rayon $r = 4\sqrt{5}$. (Γ_2 passe par B).

44 • A. 1. $\Omega A_0 = \left|a_0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ donc $A_0 \in \mathcal{C}$.

2. a) $b' = a_0 b = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) $\frac{b' - b}{b'} = i$ d'où $(\overrightarrow{B'O}, \overrightarrow{B'B}) = \arg\left(\frac{b' - b}{b'}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi le triangle $OB'B$ est rectangle en B' .



B. 1. a) Par hypothèse $z \neq 0, a \neq 0, a \neq 1$ donc $z' = az$ et $z' - z = a(z - 1)$ sont tels que $z' \neq 0$ et $z' - z \neq 0$.

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z' - z}{z'}\right) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) [2\pi],$$

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z(a-1)}{az}\right) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) [2\pi].$$

$$\text{Donc } (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI})$.

c) OMM' triangle rectangle en M'

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}) = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow OAI \text{ triangle rectangle en } A.$$

Ainsi OMM' triangle rectangle en $M' \Leftrightarrow A \in \mathcal{C} - \{O, I\}$.

2. M est sur l'axe (Ox) privé de O et I donc $\arg z = 0$ ou $\pi [2\pi]$.

Ainsi $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{a}\right) = \arg z = 0$ ou $\pi [2\pi]$

donc $M' \in (OA)$.

Par hypothèse, $A \in \mathcal{C} - \{0, I\}$ donc d'après **B. 1. c)** le triangle OMM' est rectangle en M' , ainsi M' est le projeté orthogonal de M sur (OA) (droite confondue avec (OM')).

Ensemble de points

45 1. $M \in \Gamma \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + 3i|^2 = 2$

$\Leftrightarrow |(x-2) + i(-y+3)|^2 = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2;$

Γ est le cercle $\mathcal{C}(I; \sqrt{2})$ avec $I(2+3i)$.

2. $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - 2 - 3i| = \sqrt{2}$. On retrouve $\mathcal{C}(I; \sqrt{2})$.

46 1. $M \in \Delta \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + i|^2 = |z + 3 - 2i|^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (-y+1)^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2$

$\Leftrightarrow 5x - y + 4 = 0$.

Δ est la droite d'équation $5x - y + 4 = 0$.

2. $M \in \Delta \Leftrightarrow |z - 2 - i| = |z + 3 - 2i|$.

Δ est la médiatrice de $[AB]$, où $A(2+i)$, $B(-3+2i)$.

47 Corrigé dans le manuel.

48 • a) $\Gamma : (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25;$

$\Gamma = \mathcal{C}(I; 5)$ avec $I(-3-4i)$.

b) $\Gamma : 4x - 6y - 15 = 0;$

Γ : médiatrice de $[AB]$ avec $A(2+i)$, $B(4-2i)$.

49 • On suppose $M \in \Gamma$ soit $z\bar{z} = 1$.

Note : Sous cette hypothèse, nécessairement $z \neq -\frac{1}{2}i$.

Alors $z'\bar{z}' = \frac{z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) + 4}{4z\bar{z} - 2i(z - \bar{z}) + 1} = 1$, donc $M' \in \Gamma$.

On suppose $M' \in \Gamma$ d'où $|z + 2i|^2 = |1 - 2iz|^2$.

Note : Par hypothèse, $z \neq -\frac{1}{2}i$.

On en déduit $(z+2i)(\bar{z}-2i) = (1-2iz)(1+2i\bar{z})$, d'où :
 $z\bar{z} = 1$ donc $M \in \Gamma$.

Remarque : $M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \Gamma$.

50 • Corrigé dans le manuel.

51 • a) $m \in \Delta$ où Δ est la médiatrice de $[AB]$, $A(3+i)$, $B(-2i)$ (méthode géométrique).

b) $m \in \Gamma$ où Γ est le cercle d'équation $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 8$ (méthode analytique).

c) $m \in \Gamma$ où Γ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de $A(-2i)$ et $B(3+i)$ défini par $(\overrightarrow{m\bar{A}}, \overrightarrow{m\bar{B}}) = \frac{\pi}{2}$ (méthode géométrique).

52 • 1. a) $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (x+iy)^2 - 4 = 4 - (x-iy)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

b) Vérification immédiate : $A \in \mathcal{H}$, $B \in \mathcal{H}$, $C \in \mathcal{H}$.

2. a) La rotation r a pour écriture complexe $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z$ d'où :

$a' = \sqrt{2}(1-i)$, $b' = \frac{1}{2}[-3\sqrt{2} - \sqrt{10} + i(3\sqrt{2} - \sqrt{10})]$,

$c' = \frac{1}{2}[-3\sqrt{2} + \sqrt{10} + i(3\sqrt{2} + \sqrt{10})]$.

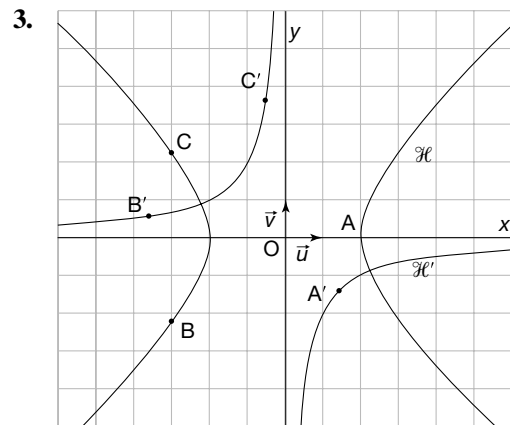
b) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}}z'$

$\Leftrightarrow x+iy = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(x'+iy')$.

D'où les relations :
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

$M' \in \mathcal{H}' \Leftrightarrow M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 4 \Leftrightarrow x'y' = -2$.



53 • 1. a) $(z-7i)(z+i) = z^2 - 6iz + 7$.

b) Dans $\mathbb{C} - \{3i\}$: $f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 6iz + 7 = 0$

$\Leftrightarrow (z-7i)(z+i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 7i$ ou $z = -i$.

f admet deux points invariants $B(-i)$ et $C(7i)$.

2. a) Σ est le cercle de centre $A(3i)$ et de rayon 4.

$M \in \Sigma \Leftrightarrow AM = 4 \Leftrightarrow |z - 3i| = 4$.

Ainsi $z - 3i = 4e^{i\theta}$ soit $z = 3i + 4e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

Note : La condition $M \neq B$ et $M \neq C$ signifie que

$\theta = \arg(z - 3i) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ est tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

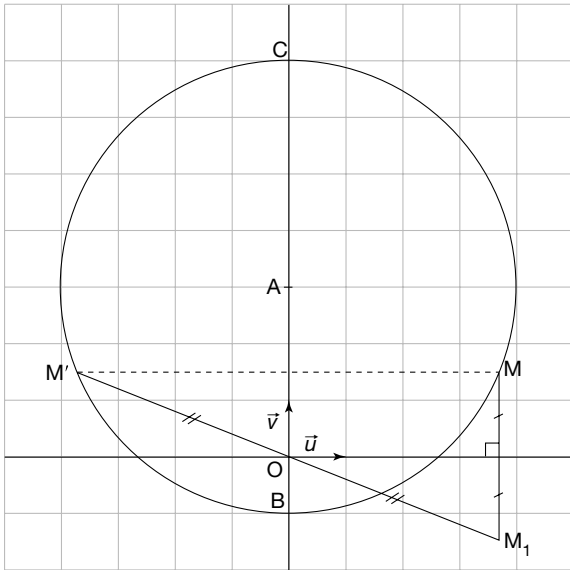
b) $z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i} = \frac{3i(3i + 4e^{i\theta}) - 7}{4e^{i\theta}}$
 $= 3i - 4e^{-i\theta} = 3i + 4e^{i(\pi - \theta)}$.

Ainsi $|z' - 3i| = 4$ donc $M' \in \Sigma$.

c) $z' + \bar{z} = 3i + 4e^{i(\pi - \theta)} - 3i + 4e^{-i\theta}$
 $= 4(e^{i(\pi - \theta)} + e^{-i\theta})$
 $= 4(-e^{-i\theta} + e^{-i\theta}) = 0$

donc $z' = -\bar{z}$.

Construction de M' :



Pour tout point $M(z)$ de $\Sigma - \{B, C\}$, plaçons $M_1(\bar{z})$ symétrique de M par rapport à l'axe réel ; alors l'égalité $z' = -\bar{z}$ se traduit par $OM' = -OM_1$ ce qui prouve que M' est le symétrique de M_1 par rapport à O .

Remarque : Notons $S_{(Ox)}$ la réflexion d'axe réel et S_0 la symétrie de centre O .

$$\text{Alors } M \xrightarrow{S_{(Ox)}} M_1 \xrightarrow{S_0} M'.$$

$$\text{Ainsi } M' = (S_0 \circ S_{(Ox)})(M).$$

Or $S_0 \circ S_{(Ox)} = S_{(Oy)}$ donc M' est le symétrique de M par rapport à (Oy) .

3. Notons Γ le cercle de centre $A(3i)$ et de rayon r ($r > 0$) et Γ' l'image de Γ par f .

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow z = 3i + re^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

M' et Γ' signifie qu'il existe $M \in \Gamma$ tel que $M' = f(M)$ donc $M' \in \Gamma'$ équivaut à

$$z' = \frac{3i(3i + re^{i\theta}) - 7}{re^{i\theta}} = 3i - \frac{16}{r}e^{-i\theta} = 3i + \frac{16}{r}e^{i(\pi-\theta)}$$

Lorsque θ décrit \mathbb{R} , $\pi - \theta$ décrit \mathbb{R} donc Γ' est le cercle de centre A et de rayon $\frac{16}{r}$.

54 • Notons a, b, c les affixes de A, B, C .

1. a) $b' = 1 + i = b$ et $c' = -1 + i = c$. Ainsi B et C sont invariants par f .

b) Pour tout $z \neq i$, $(z' - i)(z - i) = 1$. (Immédiat)

c) Par interprétation géométrique : $AM' \times AM = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$ [2 π].

D' est tel que : $AD' = \frac{1}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (demi-diagonale du carré unité) et $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{4}$.

2. Notons Γ le cercle de centre A et de rayon r et Γ' son image.

$$M \in \Gamma_A \Leftrightarrow z = i + re^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

$$M' \in \Gamma' \text{ équivaut à } z' = \frac{i(i + re^{i\theta}) + 2}{re^{i\theta}} = i + \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Lorsque θ décrit \mathbb{R} alors $-\theta$ décrit \mathbb{R} donc Γ' est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{r}$.

3. a) Si $z = iy$ ($y \neq 1$) alors $z' = \frac{-y+2}{i(y-1)} = i\frac{y-2}{y-1}$ est imaginaire pur.

Remarque : $u : t \mapsto \frac{t-2}{t-1}$ est une bijection de $\mathbb{R} - \{1\}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

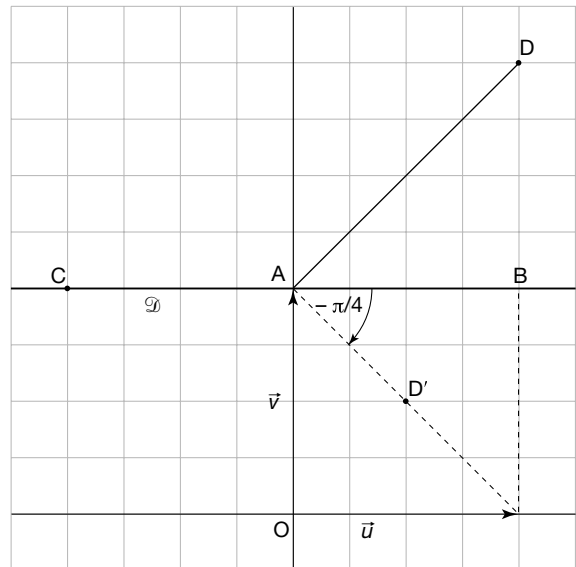
t	$-\infty$	1	$+\infty$
u'	$+$	$+$	$+$
u	1	$+\infty$	1

Si z décrit $i\mathbb{R} - \{i\}$ alors z' décrit lui aussi $i\mathbb{R} - \{i\}$. Ainsi l'image de l'axe imaginaire pur privé de A est lui-même.

b) Tout point de $\mathcal{D} - \{A\}$ a une affixe du type $z = x + i$

$$(x \neq 0); \text{ alors } z' = \frac{1+ix}{x} = \frac{1}{x} + i.$$

Si x décrit \mathbb{R}^* alors $\frac{1}{x}$ décrit \mathbb{R}^* . Ainsi l'image de $\mathcal{D} - \{A\}$ est $\mathcal{D} - \{A\}$.



55 • ① : Les régions ① et ② sont définies comme l'intersection d'un demi-plan, dont la frontière est la médiatrice de $[OA]$, et du disque de centre A et de rayon AO .

$$\textcircled{1} : \begin{cases} |z| \leq |z-1+2i| \\ |z-1+2i| \leq \sqrt{5} \end{cases} \quad \textcircled{2} : \begin{cases} |z| \geq |z-1+2i| \\ |z-1+2i| \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

② : Les régions ① et ② sont définies comme l'intersection d'un disque et de l'extérieur d'un autre.

$$\textcircled{1} : \begin{cases} |z-1| \leq \sqrt{2} \\ |z-2+i| \geq \sqrt{5} \end{cases} \quad \textcircled{2} : \begin{cases} |z-1| \geq \sqrt{2} \\ |z-2+i| \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

56 1. Calcul immédiat.

2. a) \vec{w} colinéaire à $\vec{w}' \Leftrightarrow xy' - x'y = 0 \Leftrightarrow \overline{ZZ'}$ réel $\Leftrightarrow \overline{ZZ'} = Z\overline{Z'}$.

b) \vec{w} orthogonal à $\vec{w}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \overline{ZZ'}$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{ZZ'} = -Z\overline{Z'}$.

3. Application : $z \in \mathbb{C}^*$.

a) $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \bar{z} \times \frac{1}{z} = z \times \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z}^2 - z^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ ou $\bar{z} = -z$.

Donc \mathcal{C} est la réunion de l'axe réel et de l'axe des imaginaires pur privée de O.

b) $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{z} \times \frac{1}{z} = -z \times \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z}^2 + z^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (\bar{z} + iz)(\bar{z} - iz) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -iz$ ou $\bar{z} = iz$.

On pose $z = x + iy$, $\bar{z} = -iz$ équivaut à $y = x$ et $\bar{z} = iz$ équivaut à $y = -x$.

Donc \mathcal{F} est la réunion des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ privée de O.

57 1. a) $\Phi(i; 3) = 0$, $\Phi(1 + 2i; -2 + 2i) = 4$,

$\Phi(2 + i; -3 + 2i) = -8$, $\Phi\left(e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 0$.

b) $\overline{\Phi(z; z')} = \Phi(z; z')$ donc $\Phi(z; z') \in \mathbb{R}$.

2. a) $\Phi(z; z') = 2(xx' + yy')$.

b) $M \in \Delta \Leftrightarrow \Phi(z; 1 + i) = 2\sqrt{2}$.

Δ est la droite d'équation $y = -x + \sqrt{2}$.

3. a) $\Phi(z; z') = 2rr' \cos(\theta - \theta')$. b) $\Phi(z; z) = 2r^2$.

c) $M \in \Gamma \Leftrightarrow \Phi(z; z) = 2 \Leftrightarrow r = 1$. Γ est le cercle $\mathcal{C}(\text{O}; 1)$.

d) Γ et Δ ont un seul point commun $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; ils sont tangents en I.

58 1. a) $O \mapsto B$; le point d'affixe $2-i$ a pour image C.

b) $z = 1$ ou $z = -1$.

Autrement dit les points d'affixes 1 et -1 sont invariants.

2. $z' = \frac{1 + iz}{z + i} = \frac{i(z - i)}{z + i}$. D'où, par interprétation géométrique du module et d'un argument, $OM' = \frac{AM}{BM}$ [1]

et $(\vec{u}, \overline{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overline{MB}, \overline{MA})$ (modulo 2π) [2].

3. Si M est sur (Ox) alors $MA = MB$ (car (Ox) est la médiatrice de [AB]), donc, d'après [1], $OM' = 1$.

Ainsi $M' \in \mathcal{C}(\text{O}; 1)$.

4. Si M est sur $\mathcal{C}(\text{O}; 1)$, cercle de diamètre [AB], privé de A et B, $(\overline{MB}, \overline{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) d'où, d'après [2] :

$(\vec{u}, \overline{OM'}) = 0$ ou π (modulo 2π).

Ainsi $M' \in (\text{Ox})$.

59 1. a) $M = A$ ou $M' = A \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^3 = 1$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ ou $z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$.

b) Lorsque $M \neq A$ et $M' \neq A$, c'est-à-dire $z \neq 1$, $z \neq j$ et $z \neq \bar{j}$, alors :

A, M et M' alignés $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3 - 1}{z - 1}\right) = 0$ ou π

$\Leftrightarrow \arg[z^2 + z + 1] = 0$ ou $\pi \Leftrightarrow z^2 + z + 1$ réel.

On pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

A, M et M' alignés $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ réel $\Leftrightarrow y(2x + 1) = 0$.

Dans ce cas, l'ensemble des points M est la réunion des droites (Ox) : $y = 0$ et Δ : $x = -\frac{1}{2}$, privée des points A(1), J(j) et J'(j).

c) A, J et J' sont des solutions possibles pour M d'après a), donc l'ensemble Γ cherché est la réunion des droites (Ox) et Δ .

2. A, M, M' alignés $\Leftrightarrow \overline{AM}$ et $\overline{AM'}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z}^3 - 1) = (\bar{z} - 1)(z^3 - 1)$

$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1)(\bar{z}^2 + \bar{z} + 1) = (\bar{z} - 1)(z - 1)(z^2 + z + 1)$

$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1)[z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z}] = 0$

$\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1)(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z = \bar{z}$ ou $\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$.

On retrouve Γ .

60 1. a) $x' = x^2 - y^2 - 2x + 2y$ et $y' = 2xy - 2x - 2y$.

Note : si $x = 1$ alors $y' = -2$ et donc z' n'est pas réel. Ainsi z' réel implique $x \neq 1$.

b) z' réel $\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y(x - 1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{x - 1}$.

Donc \mathcal{H} est la représentation graphique de la fonction h .

2. a) $OA = |a| = 2\sqrt{2}$ donc $A \in \Gamma$.

$h(x_A) = y_A$ donc $A \in \mathcal{H}$.

b) T_A a pour coefficient directeur $h'(2) = -1$ donc pour vecteur directeur $\vec{w}(1; -1)$.

Or $\overline{OA}(2; 2)$ donc $\overline{OA} \cdot \vec{w} = 0$. Ainsi T_A est aussi tangente au cercle Γ en A. \mathcal{H} et Γ sont tangents en A.

3. a) Conjecture : B et C semblent être les points d'intersection de Γ et \mathcal{H} .

b) $r : z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ d'où les affixes

$b = e^{i\frac{2\pi}{3}} a = -1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$,

$c = e^{i\frac{2\pi}{3}} b = -1 + \sqrt{3} + i(-\sqrt{3} - 1)$.

c) $OB = OC = 2\sqrt{2}$ donc B et C sont sur Γ .

$h(x_B) = y_B$ et $h(x_C) = y_C$ donc B et C sont sur \mathcal{H} .

$r(C)$ pour affixe $e^{i\frac{2\pi}{3}} c = 2 + 2i = a$.

$r(A) = B$, $r(B) = C$, $r(C) = A$ et r conserve les distances donc $AB = BC = CA$. ABC est un triangle équilatéral.

61 1. Si $(x; y) \neq (0; -2)$ alors :

$X = \text{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$,

$Y = \text{Im}(Z) = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$.

2. a) \mathcal{C} est la droite d'équation $-x + 2y + 4 = 0$ privée de B. \mathcal{F} est le cercle de centre $\Omega\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon

$$R = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ privé de B.}$$

3. • Lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$,
 Z réel $\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0$ ou π
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et \overrightarrow{BM} colinéaires
 $\Leftrightarrow M \in (AB) - \{A; B\}$.

Lorsque $M = A$, $Z = 0$ réel; ainsi $\mathcal{C} = (AB) - \{B\}$.

• Lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$,

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \in \Gamma - \{A; B\}$$

où Γ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Lorsque $M = A$, $Z = 0$ imaginaire pur; ainsi $\mathcal{F} = \Gamma - \{B\}$.

4. Lorsque $z \neq -2i$, $[f(z) - 1][z + 2i] = -2 - i$ d'où :

$$|f(z) - 1| \times |z + 2i| = \sqrt{5}.$$

On note $I(1)$; par interprétation géométrique,

$$IM' \times BM = \sqrt{5}.$$

Ainsi, $M \in \mathcal{C}(B, \sqrt{5}) \Rightarrow M' \in \mathcal{C}(I, 1)$.

Configurations – Transformations

62 • 1. a) A et B sont symétriques par rapport à l'axe réel donc $a = \bar{b}$.

$$h - k = x_A + iy_M - (x_M + iy_A) = x_A - x_M - i(y_A - y_M) = \overline{a - m}.$$

2. a) $(OB) \perp (MA)$ d'où $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{b) } \arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = \arg\left[\frac{\overline{a-m}}{b}\right] = -\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{KH}) = \pm \frac{\pi}{2}$; ainsi $(OA) \perp (HK)$.

63 • 1. a) $z_B = ia$, $z_D = ic$.

D'autre part, $z_E - a = i(z_D - a)$ donc $z_E = a - c - ia$.

$$\text{b) } z_I = \frac{1}{2}a(1+i), z_J = \frac{1}{2}c(1+i), z_K = \frac{1}{2}(a-c)(1-i).$$

2. On vérifie aisément que $z_K - z_I = i(z_J - a)$; d'où on déduit $IK = AJ$ et $(IK) \perp (AJ)$.

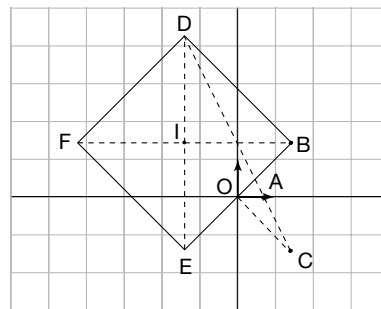
64 • 1. $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

$$2. d - a = -3(c - a) \text{ d'où } d = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}.$$

$$3. e = -ic \text{ d'où } e = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

$$4. \text{ a) } Z = \frac{d-b}{e-b} = -i.$$

b) I est le milieu de $[BF]$ et $[DE]$ donc BDFE est un parallélogramme; de 4. a), on déduit que $BD = BE$ et $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{2}$ donc le parallélogramme BDFE est un carré.



65 • Corrigé dans le manuel.

66 • 1. a) Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)} : B \mapsto C$

$$\text{donc } c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a).$$

b) Par $R_{\left(D; \frac{\pi}{3}\right)} : E \mapsto F$ donc $f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d)$.

2. a) Par $T_{\overline{DE}} : B \mapsto G$ donc $g = b + e - d$.

b) Par $T_{\overline{DC}} : F \mapsto H$ donc $h = f + c - d$.

3. a) $h - a = c - a + f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a + e - d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(g - a)$.

b) Par $R_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)} : G \mapsto H$; ainsi AGH est un triangle

équilatéral direct.

67 • 1. a) $z_A = a$, $z_M = im$, $z_C = -c$, $z_I = \frac{1}{2}im$.

b) B est tel que $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$ donc $z_B = c + 2im$.

2. a) $Z = \frac{z_A - z_I}{z_B}$ soit :

$$Z = \frac{1}{2} \times \frac{2(ac - m^2) - im(c + 4a)}{c^2 + 4m^2}.$$

b) $AB = AC \Leftrightarrow |z_B - z_A|^2 = |z_C - z_A|^2$
 $\Leftrightarrow (c - a)^2 + 4m^2 = (-c - a)^2 \Leftrightarrow m^2 = ac$.

c) Ainsi $\text{Re}(Z) = 0$, Z est imaginaire pur, donc :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{IA}) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } (OB) \perp (IA).$$

68 • Corrigé dans le manuel.

69 • 1. $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}c$, $z_I = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})c}{3}$.

$$2. z_D = tc, z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_D = te^{-i\frac{\pi}{3}}c.$$

Par $R_{\left(C; \frac{\pi}{3}\right)} : D \mapsto F$ d'où $z_F - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)$ donc :

$$z_F = c(1 - e^{i\frac{\pi}{3}} + te^{i\frac{\pi}{3}}).$$

$$\text{Ainsi, } z_J = \frac{z_B + z_D + z_E}{3} = \frac{tc(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})}{3},$$

$$z_K = \frac{z_C + z_D + z_F}{3} = \frac{c[2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + t(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})]}{3}.$$

$$3. z_K - z_I = \frac{c[1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + t(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})]}{3},$$

$$z_J - z_I = \frac{c[-(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}) + t(1 + e^{-i\frac{\pi}{3}})]}{3}.$$

$$\text{D'où } e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = \frac{c[-(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}) + t(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})]}{3};$$

$$\text{or, } -(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -i\sqrt{3} = 1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ donc :}$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I) = z_K - z_I.$$

Par $R_{(I; \frac{\pi}{3})} : J \mapsto K$ donc IJK est équilatéral direct.

70 • 1. a) A(-a), B(-ia), C(a), D(ia).

$\overline{BM} = t\overline{BC}$, $t \in [0; 1]$, d'où :

$$z_M = z_B + t(z_C - z_B) \text{ donc } z_M = at - ia(1-t).$$

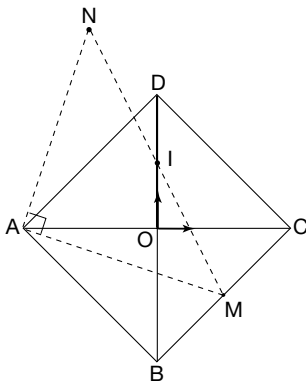
$R_{(A; \frac{\pi}{2})} : M \mapsto N$ d'où :

$$z_N - z_A = i(z_M - z_A) \text{ donc } z_N = -at + ia(1+t).$$

b) \overline{DC} a pour affixe $a(1-i)$ et \overline{DN} a pour affixe $-ta(1-i)$, d'où $\overline{DN} = -t\overline{DC}$ et les points C, D et N sont alignés.

2. a) $z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = iat.$

b) Ainsi, $z_I = tz_D$, $t \in [0; 1]$ ce qui équivaut à $\overline{OI} = t\overline{OD}$, $t \in [0; 1]$. Le lieu du point I est le segment [OD].



71 • 1. $z_P = z + 1$ donc $P = T_{\vec{u}}(M)$.

$$z_Q = z^2 = e^{2i\theta} \text{ d'où } \begin{cases} OQ = 1 \\ (\vec{u}, \overline{OQ}) = 2\theta \end{cases}$$

Q est à l'intersection du cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ et de la demi-droite]O \vec{t}) dont un vecteur directeur \vec{w} est tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = 2\theta$. (OM) est bissectrice de $(\overline{OA}, \overline{OQ})$ donc Q est l'image de A par la réflexion $S_{(OM)}$.

2. Lorsque θ décrit $[0; 2\pi[$, M décrit le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$ donc P décrit le cercle image par $T_{\vec{u}}$ soit $\mathcal{C}(A, 1)$.

3. a) $s = (1+z) + z^2 = z_P + z_Q$ d'où $\overline{OS} = \overline{OP} + \overline{OQ}$; ainsi S est tel que OPSQ est un parallélogramme.

b) Conjecture : O, M, S alignés.

c) Pour tout $\theta \in [0; 2\pi[$,

$$Z = \frac{1+z+z^2}{z} = \frac{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} = 1 + 2\cos\theta.$$

Ainsi Z est réel.

• Si S = O alors O, M, S sont évidemment alignés.

$$S = O \Leftrightarrow 1+z+z^2=0 \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } z = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

• Si S \neq O alors dans $[0; 2\pi[$, $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ et $\theta \neq \frac{4\pi}{3}$ donc $Z = 1 + 2\cos\theta$ est un réel non nul.

Ainsi $\arg Z = (\overline{OM}, \overline{OS}) = 0$ ou π donc O, M et S sont alignés.

72 • 2. a) $R_{(M_1; \frac{\pi}{2})} : B \mapsto M$ d'où $z - z_1 = i(i - z_1)$;

$R_{(M_2; \frac{\pi}{2})} : M \mapsto A$ d'où $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

b) D'où les expressions :

$$z_1 = \frac{z+1}{1-i} = \frac{1+i}{2}(z+1),$$

$$z_2 = \frac{1-iz}{1-i} = \frac{-i(z+i)}{1-i} = \frac{1-i}{2}(z+i).$$

3. a) $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$.

Δ est la médiatrice de $[A'B']$ ($\Delta : y = x$).

b) $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2 - z_1|^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|z+1|^2 = |-iz|^2$$

$$\Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2.$$

c) On pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow |(x+1) + iy|^2 = 2|x + iy|^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$

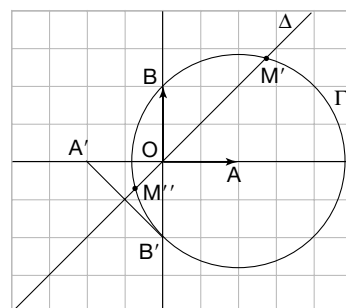
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

Ainsi, Γ est le cercle de centre A(1) et de rayon $\sqrt{2}$.

d) OM_1M_2 est équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = OM_2 \\ OM_1 = M_1M_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow M \in \Delta \cap \Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Il existe deux points solutions M' et M'' .



73 1. \mathcal{C} est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}\right)$ et de rayon

$\frac{1}{2}$. Pour tout M de \mathcal{C} , $IM = \frac{1}{2}$ donc $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

2. $R_{\left(O; \frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto L$ donc $l = im$.

$R_{\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto P$ d'où $p - 1 = -i(m - 1)$

donc $p = -im + 1 + i$.

3. Ω milieu de $[PL]$ a pour affixe $\omega = \frac{p+l}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Ainsi $\left|\omega - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ donc $\Omega \in \mathcal{C}$.

Ω est le milieu du demi-cercle supérieur $[\widehat{OA}]$.

Remarque : Pour $M \neq O$ et $M \neq A$, $\widehat{MLP} = \widehat{MLO} + \widehat{OMA} + \widehat{AMP} = \pi$ et puisque Ω est le milieu de $[PL]$, les points M, L, P, Ω sont alignés. Ainsi M et Ω sont les points d'intersection de \mathcal{C} et (PL) .

4. a) $KN = |n - k| = |i - 2im| = |-2i| \left|m - \frac{1}{2}\right| = 2 \left|m - \frac{1}{2}\right|$.

Or $M \in \mathcal{C}$ donc $\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ d'où $KN = 1$ est constant.

b) $Z_{\overline{ON}} = (1 - i)m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $Z_{\overline{OK}} = (1 + i)m - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ d'où $Z_{\overline{OK}} = iZ_{\overline{ON}}$.

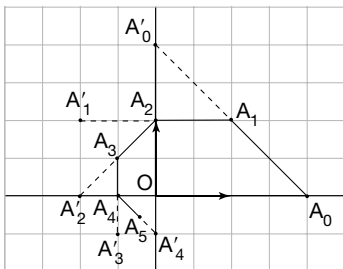
Ainsi ΩNK est un triangle rectangle isocèle en Ω .

5. $\Omega N = \left|(1 - i)\left(m - \frac{1}{2}\right)\right| = |1 - i| \left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $N \in \Gamma$ cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suites de points et complexes

74 1.



2. a) Pour tout n de \mathbb{N} , A_{n+1} est le milieu de $[A_n A'_n]$ donc :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + iz_n}{2} = \frac{1+i}{2} z_n$$

b) • $r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$; (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 2$ et de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• $\theta_{n+1} = \frac{\pi}{4} + \theta_n$; (θ_n) est une suite arithmétique de premier terme $\theta_0 = 0$ et de raison $r = \frac{\pi}{4}$.

c) $r_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; $\theta_n = n\frac{\pi}{4}$.

206

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$; lorsque n tend vers $+\infty$, le point A_n tend vers l'origine O .

e) Puisque pour tout n , $r_n \neq 0$, les points A_n et O sont distincts.

O, A_0, A_n alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_n}) = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow \theta_n = k\pi$$
 ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow n = 4k$$
 ($k \in \mathbb{Z}$).

3. a) Pour tout n de \mathbb{N} , on pose $d_n = A_n A_{n+1}$. Pour $n \geq 1$,

$$d_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n - z_{n-1}| = \frac{\sqrt{2}}{2} d_{n-1}$$

b) $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} d_k$. Or (d_k) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = A_0 A_1 = \sqrt{2}$ et de raison

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } L_n = \sqrt{2} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$$

Or $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} + 1)$.

75 1. a) $r_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n r_0$. b) $\theta_n = \theta_0 + \frac{2n\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } z_0 z_1 z_2 = 8 &\Leftrightarrow r_0 e^{i\theta_0} \times \frac{2}{3} r_0 e^{i\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right)} \\ &\quad \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 r_0 e^{i\left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right)} = 8 \end{aligned}$$

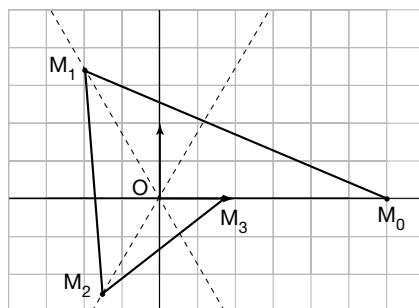
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} r_0\right)^3 e^{3i\theta_0} = 8$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \left(\frac{2}{3} r_0\right)^3 = 8 \\ 3\theta_0 = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} ; \text{ or } \theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{donc } \begin{cases} r_0 = 3 \\ \theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } z_0 = 3, z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}, z_2 = \frac{4}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

2. a)



b) Pour tout n de \mathbb{N} , on pose $d_n = \|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\|$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d_n &= |z_{n+1} - z_n| = |r_{n+1}e^{i\theta_{n+1}} - r_n e^{i\theta_n}| \\ &= \left| \frac{2}{3}r_n e^{i\left(\theta_n + \frac{2\pi}{3}\right)} - \frac{2}{3}r_{n-1} e^{i\left(\theta_{n-1} + \frac{2\pi}{3}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{2}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}} \right| |r_n e^{i\theta_n} - r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}| = \frac{2}{3} |z_n - z_{n-1}| = \frac{2}{3} d_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = M_0M_1 = \sqrt{19}$ et de raison $q = \frac{2}{3}$.

$$\text{D'où } d_n = \sqrt{19} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

c) $L_n = \sum_{k=0}^n d_k$ (somme de $n+1$ termes consécutifs de la suite géométrique (d_k));

$$L_n = \sqrt{19} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\sqrt{19} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right].$$

Or $0 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 3\sqrt{19}$.

Prendre toutes les initiatives

76 On choisit un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Notons : $A(a)$, $B(b)$, $C(-b)$, $M(m)$, $N(n)$.

$R_{\left(M, \frac{\pi}{2}\right)} : B \mapsto A$ d'où $a - m = i(b - m)$

$$\text{donc } m = \frac{1}{2}(1+i)(a-ib).$$

$R_{\left(N, \frac{\pi}{2}\right)} : A \mapsto C$ d'où $-b - n = i(a - n)$

$$\text{donc } n = \frac{1}{2}(1+i)(-b-ia).$$

D'où $n = -im$. Ainsi $R_{\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto N$ donc le triangle

OMN est rectangle isocèle en O.

77 On choisit un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Notons $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$, $Q(q)$.

$R_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)} : A \mapsto B$ d'où $b = ia$; de même $d = ic$.

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{a(1+i)}{2}, n = \frac{b+c}{2} = \frac{ia+c}{2},$$

$$p = \frac{c+d}{2} = \frac{c(1+i)}{2}, q = \frac{a+d}{2} = \frac{a+ic}{2}.$$

Alors $n - m = \frac{c-a}{2}$ et $p - q = \frac{c-a}{2}$ donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ [1];

de plus, $q - m = \frac{i(c-a)}{2} = i(n - m)$ donc $MQ = MN$

et $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}$ [2].

On déduit de [1] et [2] que MNPQ est un carré.

78 • Posons $r = |z|$ et $r' = |z'|$, alors $r' = \frac{2r}{1+r^2}$.

Notons que : $r' \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2r}{1+r^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1+r^2-2r \geq 0$
 $\Leftrightarrow (1-r)^2 \geq 0$.

Alors, pour tout $r (r \in [0; +\infty[)$, $r' \leq 1$ donc pour tout point M, son image M' appartient au disque $\mathcal{D}(O; 1)$.

Note : Le résultat peut aussi être établi à partir des variations de la fonction $r \mapsto \frac{2r}{1+r^2}$ sur $[0; +\infty[$.

79 • On choisit un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Notons $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$, $D'(d')$, $P(p)$, $Q(q)$, $R(r)$, $S(s)$.

Alors $a' = ia$, $b' = ib$, $c' = ic$, $d' = id$.

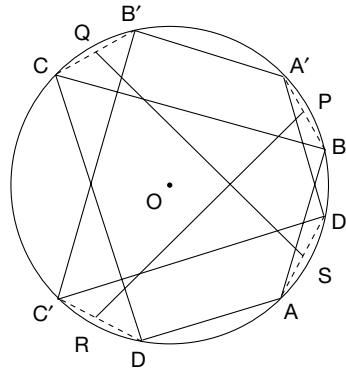
$$\text{D'où } p = \frac{b+a'}{2} = \frac{ia+b}{2}, q = \frac{c+b'}{2} = \frac{c+ib}{2},$$

$$r = \frac{d+c'}{2} = \frac{ic+d}{2}, s = \frac{a+d'}{2} = \frac{a+id}{2}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{PR} et \overrightarrow{QS} ont pour affixes :

$$r - p = \frac{1}{2}[d - b + i(c - a)] \text{ et } s - q = \frac{1}{2}[a - c + i(d - b)].$$

Ainsi $s - q = i(r - p)$ d'où par interprétation géométrique : $PR = QS$ et $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS}) = \frac{\pi}{2}$.



80 • On choisit un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Notons $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$, $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$.

$$\text{Alors } a' = e^{i\frac{\pi}{3}}a, b' = e^{i\frac{\pi}{3}}b, c' = e^{i\frac{\pi}{3}}c.$$

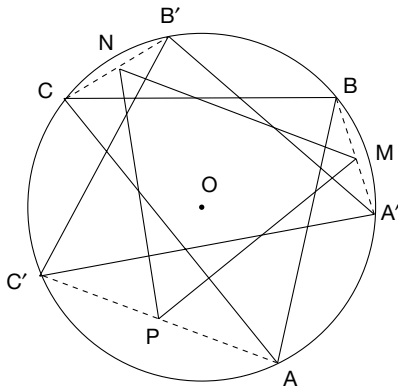
$$\text{D'où } m = \frac{a'+b}{2} = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{3}}a + b \right],$$

$$n = \frac{b'+c}{2} = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{3}}b + c \right], p = \frac{c'+a}{2} = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{3}}c + a \right].$$

Pour démontrer que MNP est un triangle équilatéral prouvons que $R_{\left(M, \frac{\pi}{3}\right)} : N \mapsto P$.

$$n - m = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) + c - b \right]$$

$$\text{et } p - m = \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) + a - b \right].$$



Note : il s'agit de comparer $p - m$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}(n - m)$. Il est judicieux ici d'utiliser le nombre $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et ses propriétés :

$$j^3 = 1, 1 + j + j^2 = 0 \text{ et } -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}}(n - m) &= \frac{1}{2} (-j^2) [-j^2(b - a) + c - b] \\ &= \frac{1}{2} [j(b - a) - j^2(c - b)] \\ &= \frac{1}{2} [-j^2c + (j + j^2)b - ja] \\ &= \frac{1}{2} [-j^2c - b + (1 + j^2)a] \\ &= \frac{1}{2} [-j^2(c - a) + a - b] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) + a - b \right] = p - m. \end{aligned}$$

Ainsi $R_{\left(M, \frac{\pi}{3}\right)} : N \mapsto P$ donc le triangle MNP est équilatéral.

81 : Notons Γ l'ensemble cherché. M' a pour affixe $z' = iz$.

• Si $M = B$ ou $M' = B$ alors B, M et M' sont évidemment alignés.

Cette condition signifie $z = i$ ou $z = 1$. Ainsi A(1) et B(i) sont deux points de Γ . [1]

• Si $M \neq B$ et $M' \neq B$ alors :

« B, M, M' alignés » $\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) = 0$ ou π

$$\text{ou } \pi \Leftrightarrow \arg \left(\frac{i(z - 1)}{z - i} \right) = 0 \text{ ou } \pi$$

$$\text{ou } \pi \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z - 1}{z - i} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB] privé de A et de B. [2]

Finalement, d'après [1] et [2], Γ est le cercle de diamètre [AB].

82 : **Note :** $M = M'$ ou $M = M''$ ou $M' = M'' \Leftrightarrow z(z - 1) = 0$ ou $z(z - 1)(z + 1) = 0$ ou $z^2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1; 0; 1\}$.

Ainsi M, M' et M'' sont deux à deux distincts si et seulement si $z \in \mathbb{C} - \{-1; 0; 1\}$.

Sous cette condition :

• $MM'M''$ triangle rectangle en M

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z + 1) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $M \in \Delta - \{A\}$ où Δ est la droite d'équation $x = -1$ et A le point d'affixe -1 .

• $MM'M''$ triangle rectangle en M'

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'M''}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^3 - z^2}{z - z^2} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg(-z) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi + \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $M \in (Oy) - \{O\}$.

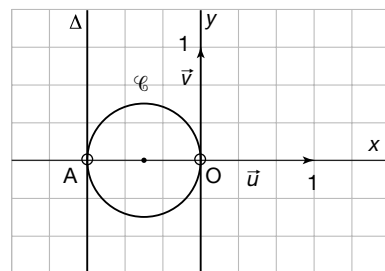
• $MM'M''$ rectangle en M''

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M''M}, \overrightarrow{M''M'}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z^2 - z^3}{z - z^3} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z}{z + 1} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $M \in \mathcal{C} - \{O, A\}$ où \mathcal{C} est le cercle de diamètre [OA].

Finalement l'ensemble cherché e est la réunion de Δ , (Oy) et \mathcal{C} privée des points O et A.



83 : On suppose que ABC est équilatéral avec ses sommets à coordonnées entières.

• Si ABC est direct, par $R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)} : B \mapsto C$; donc les

affixes sont telles que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

On pose $c - a = \delta + i\gamma$ et $b - a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ entiers.

Ainsi, $\delta + i\gamma = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\alpha + i\beta)$ équivaut à :

$$\begin{cases} 2\delta = \alpha - \beta\sqrt{3} & [1] \\ 2\gamma = \alpha\sqrt{3} + \beta & [2] \end{cases}$$

Les entiers α et β ne sont pas simultanément nuls (sinon $A = B$). On suppose par exemple que $\alpha \neq 0$; d'après [2], $\sqrt{3} = \frac{2\gamma - \beta}{\alpha}$; ainsi $\sqrt{3}$ serait un rationnel ce qui est faux. (Si $\alpha = 0$, on utilise [1] avec $\beta \neq 0$.)

• Si ABC est indirect, on obtient la même contradiction à partir de $R_{(A; -\frac{\pi}{3})}$. Ainsi, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

Problèmes

(page 373)

84 • **1. a)** $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0$ car $\omega^5 = 1$.

b) Cette somme s'écrit aussi $1 + \alpha + \beta$ donc $\alpha + \beta = -1$.
 $\alpha\beta = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$
 $= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \alpha + \beta$
 donc $\alpha\beta = -1$.

c) Les complexes α et β sont tels que $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$

donc ils sont les solutions de l'équation du second degré $(X - \alpha)(X - \beta) = 0$, c'est-à-dire $X^2 + X - 1 = 0$ [1].

d) $\alpha = \omega + \omega^4 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Note : $\beta = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

e) L'équation [1] admet pour solutions $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc α est la racine positive et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Note : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

2. a) La rotation $R_{(O; \frac{2\pi}{5})}$ a pour écriture complexe

$z' = \omega z$.

Ainsi $A_0 \mapsto A_1$, $A_1 \mapsto A_2$, $A_2 \mapsto A_3$, $A_3 \mapsto A_4$, $A_4 \mapsto A_5$, $A_5 \mapsto A_0$, d'où le résultat.

b) $\omega^4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \bar{\omega}$ donc A_1 et A_4 sont symétriques par rapport à l'axe réel. (A_1A_4) coupe cet axe en H d'abscisse $x_H = \operatorname{Re}(\omega) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ d'où $\overrightarrow{OH} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\vec{u}$.

c) Le rayon de Γ est $r = \Omega B = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega O} = \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = \alpha\vec{u}$;

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega O} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} = \beta\vec{u}$.

Puisque $\alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on obtient l'égalité $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OH}$, donc H est le milieu de $[OM]$.

d) $A_0A_1^2 = \left|1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right|^2 = \left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{5}$
 $= 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$.

La longueur du côté du pentagone est :

$$L = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

3. La construction ci-après résulte immédiatement des résultats du **2**. On construit \mathcal{C} puis le cercle Γ et le point M . La médiatrice de $[OM]$ coupe \mathcal{C} en A_1 et A_4 . On obtient enfin A_2 et A_3 avec le compas.

4. a) Par construction, les triangles AKO , ABO , BOI sont équilatéraux donc

$$\widehat{KOI} = \widehat{KOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BOI} = 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi.$$

b) $I(1; 0)$, $J(0; 1)$, $K(-1; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(KC) : y = x + 1$.

c) $C(\alpha; \alpha + 1)$ d'où $\overline{BC}\left(\alpha - \frac{1}{2}; \alpha + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

or $BC^2 = 1$ donc $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ [1].

[1] équivaut à $2\alpha^2 + (1 - \sqrt{3})\alpha + 1 - \sqrt{3} = 0$.

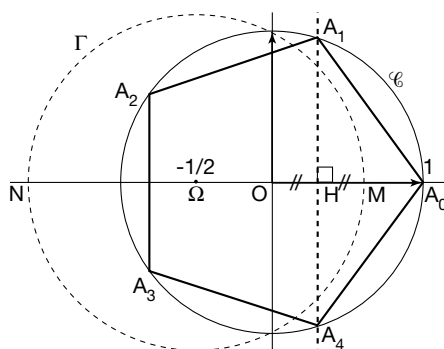
Comme $\alpha > 0$, on obtient $\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$.

d) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = \cos(\widehat{ABC})$;

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{YY'} = \frac{1}{2} - \alpha$.

e) Dans un pentagone régulier, $\widehat{ABC} = 108^\circ$; par la méthode de Dürer : $\widehat{ABC} \approx 108,37^\circ$.

La construction de Dürer est inexacte.



85 • $1. j^3 = e^{2i\pi} = 1.$

$(1-j)(1+j+j^2) = 1-j^3 = 0$, or $1-j \neq 0$
donc $1+j+j^2 = 0.$

$$-j^2 = -e^{\frac{4\pi}{3}} = -e^{i\pi} \times e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

$$-j = e^{i\pi} \times e^{\frac{2\pi}{3}} = e^{\frac{5\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

2. a) $A' = r_C(B)$ donc

$$a' = c + e^{\frac{i\pi}{3}}(b-c) = 8j^2 - j^2(6j-8j^2) \\ = -6 + 8(j^2 + j) = -6 - 8 = -14.$$

Ainsi a' est réel.

b) De même :

$$b' = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c-a) = 8 - j^2(8j^2 - 8) \\ = -8j + 8(1+j^2) = -8j - 8j = -16j;$$

$$c' = b + e^{\frac{i\pi}{3}}(a-b) = 6j - j^2(8-6j) = -8j^2 + 6(1+j) \\ = -8j^2 - 6j^2 = -14j^2.$$

c) (AA') est l'axe réel donc $O \in (AA')$. D'autre part,

$$b' = -\frac{8}{3}b \text{ et } c' = -\frac{7}{4}c \text{ d'où } \overrightarrow{OB'} = -\frac{8}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{et } \overrightarrow{OC'} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{OC}.$$

De ces relations de colinéarité on déduit que :

$$O \in (BB') \text{ et } O \in (CC').$$

Ainsi (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en O .

3. a) $S_0 = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 22.$

b) Pour tout point $M(z)$,

$$(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j = a + bj^2 + cj - z(1+j+j^2) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_0$$

$$= a + bj^2 + cj \text{ d'où}$$

$$|(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| = |8 + 6j^3 + 8j^3| = 22.$$

c) Pour tout point M , $S_M = |a-z| + |b-z| + |c-z|$; or

$|j| = 1$ donc $|b-z| = |(b-z)j^2|$ et $|c-z| = |(c-z)j|$ d'où

$$S_M = |a-z| + |(b-z)j^2| + |(c-z)j|.$$

D'après l'inégalité sur les modules

$$S_M \geq |(a-z) + (b-z)j^2 + (c-z)j| \text{ soit } S_M \geq 22.$$

Ainsi $S_M \geq S_0$ donc S_M est minimale lorsque $M = O$.

C'est nouveau au bac (page 374)

86 • $1. Z_{\overline{AB}} = -1 - 4i, Z_{\overline{AC}} = 4,08 - 1,02i.$

Ainsi $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = XX' + YY' = 0$ donc $\overline{AB} \perp \overline{AC}.$

Une seule réponse exacte **b)**.

2. Notons A et B les points d'affixes respectives -2 et $4i$. Par hypothèse $M \neq A$.

• Soit Δ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \left| \frac{z-z_B}{z-z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM.$$

Ainsi Δ est la médiatrice de $[AB]$.

Une seule réponse exacte **b)**.

• Soit Γ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est un réel. Par hypothèse $M \neq A$.

- Pour $z \in \mathbb{C} - \{-2; 4i\}$ c'est-à-dire $M \neq A$ et $M \neq B$:

$$z' \text{ réel} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow (\overline{MA}, \overline{MB}) = 0 \text{ ou } \pi.$$

Sous cette condition, l'ensemble des points M est la droite (AB) privée de A et B .

- Lorsque $z = 4i$ alors $z' = 0$ est réel. Ainsi le point B appartient aussi à Γ .

Finalement $\Gamma = (AB) - \{A\}$.

Une seule réponse exacte **c)**.

87 **1. Vrai.**

Par $R_{\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)} : A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto A$; d'après la propriété de conservation de la distance $AB = BC = CA$.

2. Faux.

Notons \mathcal{E} l'ensemble des points $M(z)$ tels que

$$\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}.$$

$A \in \Delta$ mais $\arg(z-i)$ n'est pas défini lorsque $z = i$, ainsi $A \notin \mathcal{E}$. [En fait, \mathcal{E} est la demi-droite ouverte d'origine A dirigée par \vec{w}].

3. Faux.

$$OM' = |z'| = \left| \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right| |z| = \frac{\sqrt{10}}{5} OM. \text{ Ainsi pour tout}$$

point $M \neq O$, $OM' \neq OM$ donc T n'est pas une rotation.

4. Vrai.

La symétrie S_A n'est autre que la rotation $R_{(A, \pi)}$ d'où une écriture complexe $z' - i = e^{i\pi}(z-i)$ soit

$$z' = -z + 2i.$$

5. Vrai.

$$\text{Par } R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} : M \mapsto N \text{ d'où } n - a = i(m - a).$$

$$\text{Ainsi } a = \frac{1}{2}(1+i)(n-im) = 1+i.$$

88 **1.** Pour tous points $A(a)$, $B(b)$, $M(z)$ deux à deux distincts :

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \arg(z-b) - \arg(z-a) \\ = (\vec{u}, \overline{BM}) - (\vec{u}, \overline{AM}) = (\overline{AM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overline{BM})$$

d'où d'après la relation de Chasles,

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = (\overline{AM}, \overline{BM}) = (\overline{MA}, \overline{MB}).$$

2. a) Notons Δ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est un réel strictement négatif.

$A \neq B$ et par hypothèse $M \neq A$; en outre $M \neq B$ signifie $Z \neq 0$. Alors :

$M \in \Delta \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right) = \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$. Ainsi Δ est le segment ouvert $]A, B[$.

b) Notons Γ l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z est un imaginaire pur non nul.

Sous les conditions précédentes :

$M \in \Gamma \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Ainsi Γ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B .

