chapitre 12

Les nombres complexes

Activités (page 316)

ACTIVITÉ 1

1 **1. a)** $y_4 = i \times 5$, $y_5 = i \times (-2)$.

2. b) $z_4 = 1 + i \times 2$, $z_5 = -3{,}2 + i \times 4$.

2 $2+4i$; $-6+10i$; $1+i$; $-8+6i$; -2 ; $7-24i$; $-i$; -5 ; $(aa'-bb') + i(ab'+a'b)$.

Travaux dirigés (page 331)

TD 1

1 **1.** $P(-1) = 0$.

2. $Q(z) = z^2 - 4z + 7$;
$z_1 = 2 + \sqrt{3}\,i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}\,i$;
$\{-1, 2+\sqrt{3}\,i, 2-\sqrt{3}\,i\}$.

3. $a = -1$, $b = 2 + \sqrt{3}\,i$,
$c = 2 - \sqrt{3}\,i$;
$|b-a| = \sqrt{12}$, $|c-a| = \sqrt{12}$ et $|b-c| = \sqrt{12}$.

2 **1.** Les nombres a_i sont réels donc $\overline{a_i} = a_i$ et, en appliquant le théorème 1, $\overline{(Pz_0)} = P(\overline{z_0})$.

2. Si z_0 est racine, $\overline{z_0}$ est également racine avec $z_0 \neq \overline{z_0}$ et on peut factoriser par $(z - z_0)$ et $(z - \overline{z_0})$.

3 $i\sqrt{3}$ est solution, donc $-i\sqrt{3}$ est racine et on peut factoriser par $(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = z^2 + 3$;
$Q(z) = z^2 - 6z + 21$.
$a = i\sqrt{3}$,
$b = -i\sqrt{3}$;
$c = 3 + 2\sqrt{3}\,i$,
$d = 3 - 2\sqrt{3}\,i$.
Cercle de centre I d'affixe $z_I = 3$ et de rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

TD 2

1. Formule de Moivre ; 2 car $\cos k\theta = 1$ et $\sin k\theta = 0$.

3. $(1 + u + \ldots + u^n)(1-u) = 1 - u^{n+1}$;
en utilisant les formules d'Euler p. 326,

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\left(e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta} - e^{-i\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(\frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\text{D'où } C_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2}$$

$$\text{et } S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}.$$

TD 3

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8};$$

$$\cos^3 2x = \frac{1}{4}\cos(6x) + \frac{3}{4}\cos(2x)$$

$$\sin^4 x\cos^2 x = -\frac{1}{32}\cos(2x) + \frac{1}{32}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{16}.$$

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 333)

1. L'ensemble des nombres complexes

1 **1.** $z_D = \sqrt{3} + 3i$.
2. a) AOCD est un parallélogramme car OC = AD et (OC) // (AD).
3. $|z_A| = 2$; $|z_B| = 2$; $|z_C| = 2$.
Ainsi A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.
4. $z_E = z_D + z_B = 2i = z_C$ donc D = C.

2 **a)** $x = 2$, donc $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 3 + 2 + 4i = 5 + 4i$.
b) $x = -i$, donc $z_1 = 2 + (-i)i = 3$ et $z_2 = 3 - i + 4i = 3 + 3i$.
c) $x = 1 + 2i$, donc :
$z_1 = 2 + (1 + 2i)i = i$ et $z_2 = 3 + 1 + 2i + 4i = 4 + 6i$.

3 *Corrigé dans le manuel.*

4 $z_1 = 8 - i$; $z_2 = 2i$; $z_3 = 14$; $z_4 = 7 - 24i$.

5 $z_1 = 6 + 4i$; $z_2 = 11 - 2i$; $z_3 = 1$.

6 $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{2}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$; $z_3 = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$.

7 $z_1 = -2i$; $z_2 = 7 + i$; $z_3 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

8 $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i$; $z_2 = \frac{234 + 182i}{169} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$.

9 **1.** $\text{Re}(z_1 + z_2 + z_3) = 3$; $\text{Re}(iz_1) = -2$; $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{3}{10}$.
2. $\text{Im}\left(z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3\right) = -4{,}5$; $\text{Im}(z_1z_2) = 7i$.
3. $|z_1| = \sqrt{13}$; $|z_2| = \sqrt{10}$; $|z_1z_2| = \sqrt{130}$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{13}{10}}$.

10 **1.** $(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (2i)^4 = 2^4$.
2. Il est sur la demi-droite $[O\vec{i})$.

11 $f(z) = z^2 - z = (x + iy)^2 - (x + iy)$
$= (x^2 - y^2 + 2\,ixy) - (x + iy)$
$= (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y)$.

12 **1.** $z = \frac{3 - i}{1 + i} = 1 - 2i$. **2.** $z = \frac{1 + 3i}{5}$.
3. $z = \frac{-1 + i}{2}$ ou $z = \frac{-3}{i} = 3i$.
4. $z \neq 1$, $z + 1 = 2iz - 2i \Leftrightarrow z = \frac{-1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{3 - 4i}{5}$.

13 $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$, donc :
- $P(i) = -i + (-2 + 3i)(-1) + (13 - i)(i) + (-6 - 10i)$
$= -3 - i$ donc i n'est pas racine de P ;
- $P(3) = 27 + (-2 + 3i)9 + (13 - i)(3) + (-6 - 10i)$
$= 42 + 14i$ donc 3 n'est pas racine de P.

$(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 + i)^3 = -2 + 2i$,
- $P(1 + i) = (-2 + 2i) + (-2 + 3i)(2i) + (13 - i)(1 + i) + (-6 - 10i)$
$= 0$ donc $1 + i$ est racine de P.

14 **1.** $(-i\,;2 - 2i)$; **2.** $(1 + i\,;2 - i)$; **3.** $(-1\,;4i)$.

15 *Corrigé dans le manuel.*

2. Conjugué d'un complexe

16 **a)** $\bar{z} = 3 + 4i$. **b)** $\bar{z} = \frac{1}{-i - 1} = \frac{-1 + i}{2}$.
c) $\bar{z} = \frac{3 + i}{1 - i} = 1 + 2i$.

17 **1.** $z_1 + z_2$ représente $2\text{Re}(z_1)$ puisque $z_2 = \overline{z_1}$.
Pour la même raison, $z_1 - z_2 = 2i\text{Im}(z_1)$.
2. Par le calcul, $z_1 + z_2 = \frac{8}{5}$ et $z_1 - z_2 = \frac{6i}{5}$.

18 *Corrigé dans le manuel.*

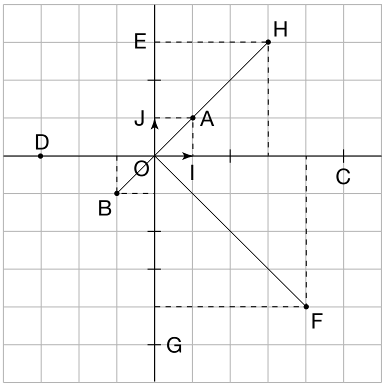
19 **1.** $Z = (x + iy) - 2(x - iy) + 2 = (-x + 2) + i3y$.
2. $Z = 0 \Leftrightarrow y = 2$; $z = x + 2i$.

20 **1.** $Z - \overline{Z} = iz + \bar{z} - 3 - 2i - (-i\bar{z} + z - 3 + 2i)$.
$= (\bar{z} - z) + i(z + \bar{z}) - 4i$
$= -iy + 2ix - 4i$
$= 2i(x - y - 2)$.
2. Cela équivaut à $Z = \overline{Z}$ ie $Z - \overline{Z} = 0$
donc $0 = x - y - 2$ ie $y = x - 2$.

21 **a)** $\bar{z} = \frac{-1 + i}{2}$, donc $z = \frac{-1 - i}{2}$.
b) $z_1 = \frac{-1 + i}{2}$ ou $\overline{z_2} = \frac{-i + 2}{i} = -1 - 2i$, soit $z_2 = -1 + 2i$.
c) $\bar{z} \neq 1$, $\bar{z} = \frac{1 + i}{1 - i} = i$ et $z = -i$.

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

22 $\arg z_A = \frac{\pi}{4}$, $\arg z_B = \frac{-3\pi}{4}$, $\arg z_C = 0$, $\arg z_D = \pi$,
$\arg z_E = \frac{\pi}{2}$, $\arg z_F = -\frac{\pi}{4}$, $\arg z_G = -\frac{\pi}{2}$, $\arg z_H = \frac{\pi}{4}$.



23 $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

$z_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

$z_5 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

$z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

24 *Corrigé dans le manuel.*

25 $z_A = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$;

$z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

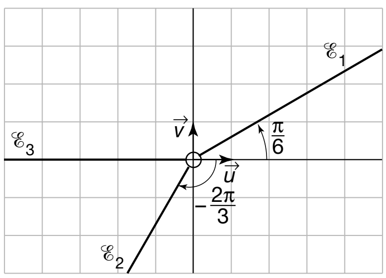
$z_C = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

$z_D = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$;

$z_E = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

$z_F = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

26



27 **a)** $z = 4 - 3i$; $|z| = 5$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $\sin\theta = -\frac{3}{5}$;
$\theta = -0{,}64$ rad.

b) $z = 1 + 2i$; $|z| = \sqrt{5}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\theta = 1{,}11$ rad.

c) $z = -2 + i$; $|z| = \sqrt{5}$; $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\theta = 2{,}68$ rad.

4. Modules et arguments

28 $-z = r(\cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi))$;
$\bar{z} = r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$;
$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$;
$z^3 = r^3(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha))$;
$z^p = r^p(\cos(p\alpha) + i\sin(p\alpha))$;
$\frac{1}{z^p} = \frac{1}{r^p}(\cos(-p\alpha) + i\sin(-p\alpha))$.

29 **a)** $|z| = 4$; $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

b) $|z| = 3$; $\arg z = \frac{\pi}{6} + \pi$.

c) $|z| = 4$; $\arg z = -\frac{2\pi}{5}$.

d) $|z| = 1$; $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

30 *Corrigé dans le manuel.*

31 **a)** $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$;

b) $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$;

c) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) =$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\right).$$

d) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{2\,006} =$

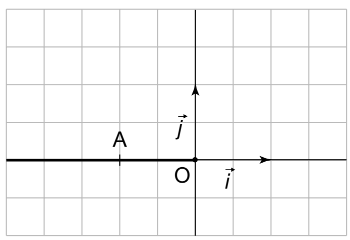
$$(\sqrt{2})^{2\,006}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

32 *Corrigé dans le manuel.*

33 **1.** $\arg(iz) = \arg i + \arg z \qquad (z \neq 0)$

$= \frac{\pi}{2} + \arg z.$

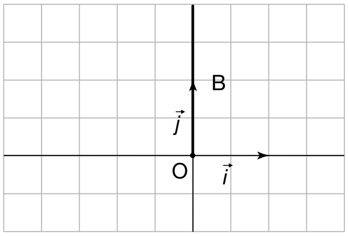
Ainsi $\arg(iz) = \frac{3\pi}{2}$ éq. à $\arg z = \pi$ et ceci revient à dire que M est un point de la demi-droite]OA) à A(– 1 ; 0).



2. $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = \arg z - \arg(1+i) \qquad (z \neq 0)$

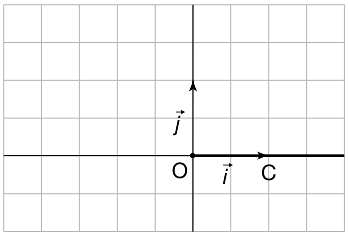
$= \arg z - \dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi $\arg\left(\dfrac{z}{1+i}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ éq. à $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$ et ceci revient à dire que M est un point de la demi-droite]OB) où B(0 ; 1).



3. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \qquad (z \neq 0)$.

Ainsi $\arg(z) = \arg(\bar{z})$ éq. à $\arg(z) = 0$ et ceci revient à dire que M est un point de la demi-droite]OC) où C(1 ; 0).



5. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

34 *Corrigé dans le manuel.*

35 $z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$;

$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

$z_3 = (\sqrt{2}-1)e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{5\pi}{4}}$;

$z_4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$;

$z_5 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

36 **a)** $z = \dfrac{6e^{i0}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

b) $z = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$;

c) $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

d) $z = 12e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = 12e^{-3i\frac{\pi}{4}}$;

e) $z = \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1\,024e^{i\frac{\pi}{2}}$;

f) $z = \dfrac{\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 e^{i4\frac{\pi}{3}}}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = 2^7\,\dfrac{e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{-i\pi}} = 128e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

37 **1. a)** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1-i}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{(-1-i)\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$

$= \left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}}$.

2. Donc $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{11\pi}{12}\,(2\pi)$, d'où :

$\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

38 **1.** $c = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$,

$d = \dfrac{3}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

2. $b = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z_{\overrightarrow{OA}} = 1$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = 1$ donc OACB est un parallélogramme.

$|OA| = |a| = 1$ et $|OB| = |b| = 1$ donc OABC est un losange.

39 $z_1 = e^{i\pi}e^{i\alpha} = e^{i(\pi+\alpha)}$, $|z_1| = 1$ et $\arg(z_1) = \pi + \alpha$;

$z_2 = \cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)$; $|z_2| = 1$ et $\arg(z_2) = \pi - \alpha$;

$z_3 = -i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}e^{i\alpha} = e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$, $|z_3| = 1$ et $\arg(z_3) = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$.

6. Équation du second degré à coefficient réels

40 *Corrigé dans le manuel.*

41 **1.** $\Delta = -4$, $\{1+\sqrt{2}-i\,;\ 1+\sqrt{2}+i\}$.

2. $\Delta = -4\sin^2\theta$, $\{\cos\theta + i\sin\theta\,;\ \cos\theta - i\sin\theta\}$.

42 z_1 et z_2 sont solutions de $z^2 - 2z + 5 = 0$.

$\mathcal{S} = \{(1-2i\,;\ 1+2i)\,;\ (1+2i\,;\ 1-2i)\}$.

Apprendre à chercher (page 336)

43 **Recherche d'ensemble**

Les outils :
- Nombres complexes conjugués.
- Module d'un complexe.
- Équation d'un cercle.

Les objectifs :
- Savoir choisir parmi des équivalences la mieux adaptée au problème.
- Savoir trouver analytiquement un lieu géométrique.

1. a) En utilisant les propriétés de la conjugaison :

$$\overline{Z_1} = \overline{\left(\frac{u-\bar{u}z}{1-z}\right)} = \frac{\overline{u-\bar{u}z}}{\overline{1-z}} = \frac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}.$$

b) $Z_1 = \overline{Z_1}$ équivaut à $\dfrac{u-\bar{u}z}{1-z} = \dfrac{\bar{u}-u\bar{z}}{1-\bar{z}}$ ou encore à :

$$u - u\bar{z} - \bar{u}z + \bar{u}z\bar{z} = \bar{u} - u\bar{z} - \bar{u}z + uz\bar{z},$$

soit à $(u-\bar{u})(1-z\bar{z}) = 0$ ou $(u-\bar{u})(1-|z|^2) = 0$.

2. a) Si $u - \bar{u} = 0$ (c'est-à-dire lorsque u est réel), alors tout nombre complexe, différent de 1, convient.

b) Si $u - \bar{u} \neq 0$, alors $z \in \mathscr{E}_1$ équivaut à $|z| = 1$, c'est-à-dire que M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, privé du point A d'affixe 1.

3. En posant $z = x + iy$:

$$Z = \frac{(x+iy)+i}{x+iy-i} = \frac{(x+iy+i)\,(x-iy+i)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}.$$

4. a) $z \in \mathscr{E}_2$ équivaut à $\text{Re}(Z_2) = 0$ soit $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

b) $\mathscr{E}_2$ est le cercle trigonométrique.

44 **Suites et complexes**

Les outils :
- Conjugués, module et argument d'un nombre complexe non nul.
- Opérations sur modules et arguments.

Les objectifs :
- Savoir calculer une somme.
- Savoir vérifier que cette somme est un entier.

1. Puisque $\left(\overline{u^n}\right) = \bar{u}^n$, S_n est bien la somme de deux complexes conjugués et $S_n = 2\,\text{Re}(u^n)$.

2. a) $|u| = \sqrt{2}$ et $\arg u = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $u = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

$u^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$;

$S_n = (\sqrt{2})^{n+2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

3. $S_n = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow n\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$

4. a) On note $s_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$; $s_0 = 1, s_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, etc.

$s_{n+8} = \cos\left(n\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = s_n.$

b) $S_0 = 2$, $S_1 = 2$, $S_2 = 0$, $S_3 = -4$, $S_4 = -8$, $S_5 = -8$, $S_6 = 0$, $S_7 = 16$. Puis, comme :

$$S_{n+8} = \sqrt{2^{n+8}}\cos\left[(n+8)\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2^{n+2}}(\sqrt{2})^8\left((n)\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 16\,S_n$$

et puisque S_n est un entier pour $n \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, S_n est entier pour tout nombre entier.

Pour progresser (page 337)

Calculs dans $\mathbb{C}$

45 **1.** $Z = 2z^2 - 2z + 4 = 2(x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x + iy) + 4$
$= (2x^2 - 2y^2 - 2x + 4) + i\,(4xy - 2y) = X + iY.$

D'où $X = 2x^2 - 2y^2 - 2x + 4$ et $Y = 4xy - 2y$.

2. Z est réel équivaut à $Y = 0$, soit $2y(2x - 1) = 0$.

Si on appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble solution,

$z \in \mathscr{E}$ équivaut à $z = \dfrac{1}{2} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$) ou $z = x$ ($x \in \mathbb{R}$).

46 **1.** $Z = 2\bar{z} - 2 + 6i = 2x - 2iy - 2 + 6i$
$= (2x - 2) + i(-2y + 6).$

2. $Z = z \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = x \\ -2y + 6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 + 2i.$

47 • **1.** $Z + \overline{Z} = \dfrac{10|z|^2 - 7(z+\bar{z}) + 4}{|z|^2 - (z - \bar{z}) + 1}.$

2. Z imagnaire pur équivaut à $Z + \overline{Z} = 0$ donc à $10|z|^2 - 7(z + \bar{z}) + 4 = 0$ et $z \neq 1$.

Cela revient à $10(x^2 + y^2) - 14x + 4 = 0$ et $(x\,;y) \neq (1\,;0)$.

Or $10(x^2 + y^2) - 14x + 4 = 0$

s'écrit $(x - 0{,}7)^2 + y^2 = 0{,}09$.

Ainsi Z imaginaire pur équivaut à m appartient au cercle de centre $(0{,}7\,;0)$ et de rayon 0,3 privé du point d'affixe 1.

48 • **1.** $-1, -i, 1, 1, i.$

2. La suite est périodique de période 4.

3. a) $1 + i, 0, i, 1 + i.$

b) $S_n - i S_n = (1 + i + \ldots + i^n) - (i + i^2 + \ldots + i^n + i^{n+1})$
$= 1 - i^{n+1}$.

c) Alors $S_n = \dfrac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \dfrac{1 + i}{2}(1 - i^{n+1})$.

En remplaçant successivement, on obtient : $1, 1 + i, i, 0$.

49 • $z_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$, $z_2 = 28 + 96i$.

50 • **1.** $\dfrac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \dfrac{(z - u\bar{z})(1 - \bar{u})}{(1 - u)(1 - \bar{u})}$

$= \dfrac{z - \bar{u}z - u\bar{z} + \bar{z}}{(1 - u)(1 - \bar{u})}$ car $u\bar{u} = 1$.

Ce nombre est égal à son conjugué, donc il est réel.

2. Réciproque : $\dfrac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel équivaut à $\dfrac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \dfrac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}}$

ou $(z - \bar{z})(1 - u\bar{u}) = 0$.

Comme z est non réel $z - \bar{z} \neq 0$ donc $u\bar{u} = 1$ et la réciproque est vraie.

Équations dans $\mathbb{C}$

51 $(z - 1 - 2i)(z - 3 + 5i) = z^2 + (-4 + 3i)z + (13 + i)$;
$p = -4 + 3i$, $q = 13 + i$.

52 • On pose $Z = z^2$.
1. $\Delta = 1$; $Z_1 = -1$ et $Z_2 = -2$, d'où $\{i; -i; \sqrt{2}i; -\sqrt{2}i\}$.
2. $\Delta = 1600$; $Z_1 = 36$ et $Z_2 = -4$, d'où $\{6; -6; 2i; -2i\}$.

53 **1.** $(1 + i)^6 = [(1 + i)^2]^3 = (2i)^3 = -8i$.
2. a) $(1 + i)^3$ est solution car $(1 + i)^6 = [(1 + i)^3]^2 = -8i$.
b) $(-z)^2 = z^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc $-(1 + i)^3$ est aussi solution et $-(1 + i)^3 = -2i(1 + i) = 2 - 2i$.
3. $(1 + i)^2$ est solution.

54 • **1.** $2 + 2i$.

2. $\dfrac{14}{3} - \dfrac{13}{3}i$ (l'équation équivaut à $\begin{cases} 2z + i\bar{z} = 5 - 4i \\ -iz + 2\bar{z} = 5 + 4i \end{cases}$).

55 • **1.** $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.
2. Cela équivaut à $-iz + 3i + 3 = 1 - i$
ou $-iz + 3i + 3 = 1 + i$.
Or $-iz + 3i + 3 = 1 - i$ équivaut à $z = 4 - 2i$
et $-iz + 3i + 3 = 1 + i$ équivaut à $z = 2 - 2i$.
Il y a donc deux solutions $4 - 2i$ et $2 - 2i$.

56 • **1.** $\Delta = -4\cos^2\theta$, $\{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}\}$.

2. $OA = |e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}| = 1$.

$OB = |e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}| = 1$.

$AB = |e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} - e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}| = |2i\cos\theta| = 2|\cos\theta|$.

Ainsi OAB est équilatéral équivaut à $|\cos\theta| = \dfrac{1}{2}$

soit à $\theta \in \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} ; -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} ; \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} ; -\dfrac{2\pi}{3} + 2n'\pi, n' \in \mathbb{Z}\right\}$.

57 **2.** $\{2i; \sqrt{3} + i; \sqrt{3} - i\}$.

58 **1.** • $\Delta = -3$; $\left\{\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

• $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. Ainsi $z^3 - 1 = 0$ équivaut à $z = 1$ ou $z = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2. a) D'après le **1.** $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$ donc

$j^2 = -1 - j = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

$j^{2006} = j^{3 \times 668} j^2 = j^2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

b) $S = 1 + j + j^2 + \ldots + j^{2006} = \dfrac{1 - j^{2007}}{1 - j}$ car $j \neq 1$

$= \dfrac{1 - j^{3 \times 669}}{1 - j} = 0$ car $j^3 = 1$.

59 • **1.** $P(z) = z^4 + (a + 4)z^3 + (2a + 4a + b)z^2 + (2a^2 + 4b)z + 2ab$,

donc $a = -4$ et $b = 5$.
2. $(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0$; $\Delta_1 = -4$ et $\Delta_2 = 48$,
donc : $\{2 + i; 2 - i; 2 + 2\sqrt{3}; 2 - 2\sqrt{3}\}$

60 • **a)** $P(z) = (z - 1)(z + 1)(z + i)(z - i)$.
b) $\{1; -1; -i; i\}$.

c) En posant $Z = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$, $(z \neq 1)$,

$Z \in \{1; -1; i; -i\}$ et $z \in \left\{-2; 0; \dfrac{-1 - 3i}{5}; \dfrac{-1 + 3i}{5}\right\}$.

61 • **1.** $f(ib) = b^4 - 38b^2 + 261 + i(10b^3 - 90b)$.

2. $f(ib) = 0$ éq. à $\begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0 \\ \text{et} \\ 10b^3 - 90b = 0 \end{cases}$ éq. à $\begin{cases} b = -3 \\ \text{ou} \\ b = 3 \end{cases}$

Ainsi $-3i$ et $3i$ sont des imaginaires purs solutions.
3. $\alpha = -10$ $\beta = 29$.
4. $f(3) = 0$ équivaut à $z^2 + 9 = 0$ ou $z^2 - 10z + 29 = 0$ ce qui équivaut à $z = -3i$ ou $z = 5 - 2i$ ou $z = 5 + 2i$.

62 • **1.** Variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

$\alpha = \dfrac{-5-\sqrt{10}}{3}$, $M = f(\alpha) \approx 7{,}3$,

$\beta = \dfrac{-5+\sqrt{10}}{3}$, $m = f(\beta) \approx 2{,}6$.

D'après l'étude des variations, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution réelle, située dans $]-\infty; \alpha[$. Puisque $f(-4) = 0$, il s'agit de -4.

2. a) $r \in \mathbb{R}$;

$$\mathrm{P}(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 + 5r^3 + 5r^2 + 4r = 0 \\ r^3 + 5r^2 + 5r + 4 = 0 \end{cases}$$

Le système équivaut à : $r^3 + 5r^2 + 5r + 4 = 0$, d'où $r = -4$.

b) $r \in \mathbb{R}$; $\mathrm{P}(ir) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r^2(r-5)(2r-1) = 0 \\ (2r-1)(4-5r^2) = 0 \end{cases}$

L'unique solution du système est $r = \dfrac{1}{2}$.

La solution imaginaire pure est donc $\dfrac{1}{2}$ i.

c) $\mathrm{P}(z) = (z+4)\left(z - \dfrac{1}{2}i\right)(z^2 + z + 1)$;

$\mathcal{S} = \left\{-4\,; \dfrac{1}{2}i; j; \bar{j}\right\}$.

63 **1.** • $\mathrm{P}(\bar{\alpha}) = \overline{\mathrm{P}(\alpha)}$ est immédiat.

• Si $\mathrm{P}(\alpha) = 0$, alors $\overline{\mathrm{P}(\alpha)} = \bar{0} = 0$ et $\mathrm{P}(\bar{\alpha}) = 0$.

2. $1 + i$ et $1 - i$.

3. $\mathrm{Q}(z) = z^2 - 2z + 2$; $\mathrm{P}(z) = \mathrm{Q}(z) \times (z^2 - 4z - 13)$;

$\mathcal{S} = \{1 + i\,; 1 - i\,; 2 + 3i\,; 2 - 3i\}$.

64 **1.** • P est à coefficients réels donc :

$$\mathrm{P}(\bar{\alpha}) = \overline{\mathrm{P}(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

• Zéro n'est pas racine de P.

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha^4}\mathrm{P}(\alpha)$: si $\mathrm{P}(\alpha) = 0$, alors $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$.

2. $\mathrm{P}(1 + i) = 0$, donc autres racines :

$\overline{1+i} = 1 - i\,;\ \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$; ainsi que $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2}$.

$\mathcal{S} = \left\{1 + i; 1 - i; \dfrac{1-i}{2}; \dfrac{1+i}{2}\right\}$.

3. $\mathrm{P}(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})(z-\beta)(z-\bar{\beta})$ avec :

$$\alpha = 1 + i \text{ et } \beta = \frac{1+i}{2}.$$

En regroupant les facteurs conjugués :

$$\mathrm{P}(z) = (z^2 - 2z + 2)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right).$$

Modules et arguments

65 $1 \leqslant r \leqslant 2$ et $\theta \in [0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

66 ① $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$; ② $\theta = \dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$; ③ $r = 2$;

④ $r \leqslant 2$; ⑤ $r \leqslant 2$ et $\theta \in \left[2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;

⑥ $1 \leqslant r \leqslant 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

67 **1.** $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') + (z - z')(\bar{z} - \bar{z}')$

$= 2z\bar{z} + 2z'\bar{z}'$

$= 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

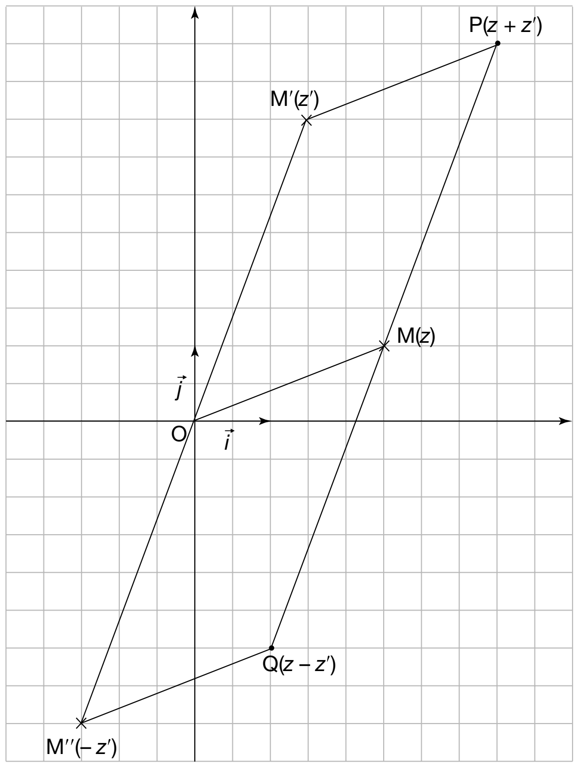
2. Notons M, M′, P, M″, Q les points d'affixes respectives z, z', $z + z'$, $-z'$, $z - z'$ alors OMPM′ et OMQM″ sont des parallélogrammes.

L'égalité du **1.** se traduit par

$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OM}'^2)$ or $\mathrm{OQ} = \mathrm{MM}'$

donc cela revient à $\mathrm{OP}^2 + \mathrm{MM}'^2 = 2(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{OM}'^2)$.

Ainsi dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.



68 **1.** • $|z_1 z_2| = |ac - bd + i(ad + bc)|$

$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

• $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Ainsi $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

2. Avec $a = 5$; $b = 3$; $c = 11$ et $d = 1$ le **1.** s'écrit

$$38^2 + 52^2 = 34 \times 122.$$

69 **1. a)** $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$

$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$.

b) $1 + u = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} + i2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right]$$

2. a) OMPI est un parallélogramme car $z_P = z_M + z_I$.
b) Notons H le milieu de [OP] et [HI], alors $z_P = 2z_H$ (car $x_P = 2x_H$ et $y_P = 2y_H$). De plus le triangle OMI est isocèle en O et OM = OI = 1 et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

Ainsi $OH = \cos\dfrac{\theta}{2}$ et $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OH}) = \dfrac{\theta}{2}$. Il en résulte que

$z_H = \cos\dfrac{\theta}{2}\left[\cos\dfrac{\theta}{2} + i\,\sin\dfrac{\theta}{2}\right]$ d'où le résultat.

70 • **1.** $E_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} : z^2 - 2z + 5 = 0\,;\Delta = -16, \{1-2i\,; 1+2i\}$.

$E_{\left(\frac{\pi}{6}\right)} : z^2 - 2(1+\sqrt{3})\,z + 5 + 2\sqrt{3} = 0\,;\Delta = -4$,

$\{1+\sqrt{3} - i\,; 1+\sqrt{3} + i\}$.
2. b) ABCD trapèze isocèle.
ABD rectangle en B.
c) ABD et ACD sont rectangles en B et C.
A, B, C, D sont sur le cercle de centre le milieu de [AD] d'affixe 1 et de rayon 2.
3. a) $\Delta = -16\sin^2\theta$;
$\{1 + 2\cos\theta - 2i\,|\sin\theta|\,; 1 + 2\cos\theta + 2i\,|\sin\theta|\}$.
b) $|1 + 2\cos\theta - 2i|\sin\theta| - 1|^2 = |2\cos\theta - 2i\,|\sin\theta||^2$
$= 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4$.
Donc $|1 + 2\cos\theta - 2i|\sin\theta| - 1] = 2$
et de même $|1 + 2\cos\theta + 2i|\sin\theta| - 1| = 2$.
Ce qui prouve que les points en question sont des points de $E_{(\theta)}$.

71 • **1.** • $z_1 = 2(1+i)$, $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

• $z_2 = 2i$, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

• $z_3 = -1 + i$, $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

• $z_4 = -1$, $z_4 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

• $z_5 = -\dfrac{1}{2}(1+i)$, $z_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2. a) $\Delta_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$

$$= \left|\frac{1}{2}(1+i)(z_{n+1} - z_n)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_n.$$

b) (Δ_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\Delta_1 = 2\sqrt{2}$.

c) On en déduit que $\Delta_n = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, puis :

$$\Delta_n < 10^{-2} \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{n-4} > 100 \Leftrightarrow n \geqslant 18.$$

72 • **1.** $|z_n| = \left|\left(\dfrac{3}{4}\right)^n(-1 + i\sqrt{3})\right| = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n|-1 + i\sqrt{3}|$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et $|z_n| = OM_n$ donc $OM_n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n| = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n = 0$ et M_n se rapproche de 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. $z_n = -\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + i\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\sqrt{3}$ donc $\mathrm{Re}(z_n) < 0$
et $\mathrm{Im}(z_n) = -\sqrt{3}\,\mathrm{Re}(z_n)$
donc M_n appartient à la demi-droite Δ.

73 • **1.** $z_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}i\right)z_n$, $z_n = z_0\left(\dfrac{1}{2}i\right)^n$.

• $z_0 = (1 + i\sqrt{3}) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$;

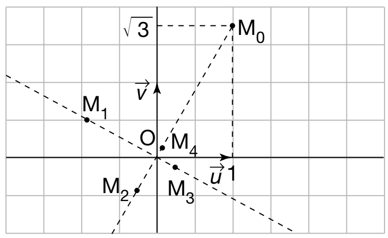
• $z_1 = (1 + i\sqrt{3})\left(\dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
$= 1\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$;

• $z_2 = (1 + i\sqrt{3})\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$= \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$;

• $z_3 = (1 + i\sqrt{3})\left(-\dfrac{i}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{i}{8}$
$= \dfrac{1}{4}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$;

• $z_4 = (1 + i\sqrt{3})\left(\dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{1}{8}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

2.



3. $OM_n = |z_n| = \left|\left(\dfrac{1}{2}i\right)^n(1 + i\sqrt{3})\right| = \dfrac{1}{2^n}\times 2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

4. a) Comme $z_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}i\right)z_n$,

$\arg(z_{n+1}) = \arg\left(\dfrac{1}{2}i\right) + \arg z_n$,

soit $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}_{n+1}) = \dfrac{\pi}{2} + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}_n)$.

Donc on obtient $(\overrightarrow{OM}_n, \overrightarrow{OM}_{n+1}) = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en O.
À l'aide du théorème de Pythagore :

$$M_nM_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}.$$

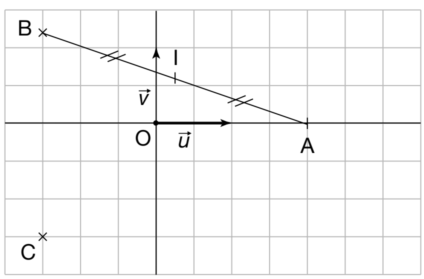
b) L_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{5}$, de raison $\dfrac{1}{2}$.

$$L_n = \sqrt{5}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{5}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right);$$

$\frac{1}{2} \in\,]-1\,;1[$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = 2\sqrt{5}$.

74 **1.** Vrai pour $n = 1$.
Supposons vrai pour n, $n \geqslant 1$, alors
$z_{n+1} = (a_n + ib_n)\,(a + ib)$
$\quad = (a_n a - b_n b) + i(a_n b + ab_n)$.
en posant $a_{n+1} = a_n a - b_n b$ et $b_{n+1} = a_n b + ab_n$,
$z^{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$ donc la propriété est héréditaire.
Par le principe de récurrence, pour tout entier n, $n \geqslant 1$, la propriété est vraie.
2. Si $p = a^2 + b^2$ en posant $z = a + ib$ alors $p = |z|^2$.
D'après le **1.** $p^n = (|z|^2)^n = |z^n|^2 = a_n^2 + b_n^2$ et p^n s'écrit aussi comme la somme de deux carrés d'entiers.

75 **1.** • P(2) = 0 donc on peut mettre $z - 2$ en facteur dans P(3).
• $a = 2\sqrt{2}$; $b = 4$, $P(z) = (z - 2)\,(z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4)$.
• $P(z) = 0$ équivaut à $z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$ ce qui équivaut à $z = 2$ ou $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
2. $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{3i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 2e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.
3.



4. $z_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
• $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$ et OAB isocèle en 0 donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$.
• $|z_3| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.
5. $z_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{3i\frac{\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Formes trigonométrique et exponentielle

76 **1.** Cercle de centre O et de rayon 3.
2. Demi-droite]OA) où A(1 ; 1).
3. Droite (OB) où $B\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

77 **1. a)** $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 1 + e^{i\theta}$ donc
$z = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) $\theta \in\,]-\pi\,;\pi[$ et $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ implique $\cos\frac{\theta}{2} > 0$;
$r = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg z = \frac{\theta}{2}$.

2. $Z = \frac{1+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)}{e^{i\theta}} = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$;
$|Z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg Z = -\frac{\theta}{2}$.

78 **1.** • $\dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{2\left(\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right)}{1+\left(\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{2\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-\frac{\theta}{2}i}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}}{\dfrac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^2}}$,

soit $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} = \frac{2i\,\sin\theta}{2\,\cos\theta} = i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
• $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{4}{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} = \frac{1}{\cos\theta}$.
• $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4i\,\sin\theta}{4} = i\sin\theta$.

2. Comme $t = \dfrac{2i\,\sin\frac{\theta}{2}}{2\,\cos\frac{\theta}{2}} = i\,\tan\frac{\theta}{2}$, $\begin{cases} \dfrac{2i\,\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = i\,\tan\theta \\[2ex] \dfrac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1}{\cos\theta} \\[2ex] \dfrac{2i\,\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = i\sin\theta \end{cases}$

et les résultats proposés en découlent.

79 **1.** $z_1 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$.
2. $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$;
d'où $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
3. L'équation équivaut à $\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.
Deux solutions dans $[-\pi\,;\pi[$: $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

80 **1.** $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} = 0$.
A + B = AB – 1 donc A et B sont solutions de
$$X^2 + X - 1 = 0.$$

2. $\alpha^4 = \overline{\alpha}$, $A = \alpha + \overline{\alpha} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

3. $X^2 + X - 1 = 0$ a pour solutions :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

A est l'un de ces réels. $A > 0$ car $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'où :

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

81 • **1.** $S - e^{i\frac{\pi}{5}}S = (1 - e^{i\frac{5\pi}{5}}) = 2$ d'où $S = \dfrac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}$.

2. $$S = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{10}}\left(-e^{i\frac{\pi}{10}} + e^{-i\frac{\pi}{10}}\right)} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{10}}}{-2i\sin\frac{\pi}{10}}$$

$$= \frac{-i\left(\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}\right)}{-\sin\frac{\pi}{10}}$$

$$= 1 + \frac{i}{\tan\frac{\pi}{10}},$$

d'où $C = 1$ et $S = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{10}}$.

82 • **1. a)** $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\overline{u} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $S_n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$

$S_n = \sqrt{2}^n\left[e^{in\frac{\pi}{4}} + e^{-in\frac{\pi}{4}}\right]$ (d'après Moivre)

$S_n = \sqrt{2}^{n+2}\cos n\dfrac{\pi}{4}$ (d'après formules d'Euler).

c) $S_n = 0$ équivaut à $\cos n\dfrac{\pi}{4} = 0$ donc à n est du type $4k + 2$ où $k \in \mathbb{Z}$.

d) Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ alors $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(p\dfrac{\pi}{2}\right)$ ainsi $\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$ vaut -1 ; 0 ou 1.

Il s'ensuit que S_n vaut $-\sqrt{2}^{n+2}$; 0 ou $\sqrt{2}^{n+2}$ et S_n est bien un entier relatif.

2. a) • $(1+i)^{2m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}i^k$

• $(1-i)^{2m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-i)^k$.

b) • $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} = 0$

• $i^{2p} + (-i)^{2p} = 2(-1)^p$.

c) • $u^{24} + \overline{u}^{24} = \lambda_{24}\cos\left(24\dfrac{\pi}{4}\right) = \lambda_{24} = 2^{13}$ d'après le **1. b)**.

• $u^{24} + \overline{u}^{24} = \displaystyle\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{k}\left[i^k + (-i)^k\right]$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{2p}2(-1)^p$ d'après le **2. b)**.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{2p}2(-1)^p = 2^{13}$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{24}\binom{24}{2p}(-1)^p = 2^{12}$.

Recherche d'ensemble de points

83 • **1.** $x' + iy' = (x+iy)^2 - 2(1+i)(x+iy)$

équivaut à $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 2x + 2y \\ y' = 2xy - 2x - 2y \end{cases}$

2. M′ sur l'axe des abscisses équivaut à $y = 0$ ie à $2xy - 2x - 2y = 0$ donc à $y = \dfrac{x}{x-1}$. $\mathscr{H}$ est donc la courbe représentative de la fonction h :

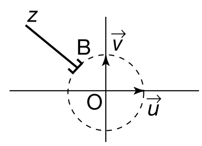
$\mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

84 • **1.** $|z'| \times |z| = 2$ et $\arg z' = \pi - \arg z$.

2. a) $M \in D \Leftrightarrow |z| \leqslant 2, (z \neq 0) \Leftrightarrow |z'| \geqslant 1$.

M′ décrit donc le plan complexe privé de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1.



b) $M \in]OA] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < |z| \leqslant 2 \\ \arg z = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| \geqslant 1 \\ \arg z' = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

M′ décrit la demi-droite $[Bz)$ avec $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{3\pi}{4}$ et $OB = 1$.

85 • Avec $z = x + y$, x et y réels,

$$z + \frac{1}{z} = x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) + iy\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Ainsi $z + \dfrac{1}{z}$ est réel équivaut à $y\left(1 - \dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$ donc à $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$.

L'ensemble est donc la réunion de l'axe des abscisses et du cercle unité.

86 • **1.** $X = \dfrac{x^2 + y^2 + 3x - 2}{(1+x)^2 + y^2}$; $Y = \dfrac{y}{(1+x)^2 + y^2}$.

2. L'axe des réels privé du point $A(-1)$.

3. Le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{3}{2} ; 0\right)$ de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé de A.

87 • **1. a)** Z réel équivaut à Im(Z) = 0 donc à $2y - x + 4 = 0$.

L'ensemble est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.

b) Z imaginaire pur équivaut à Re(Z) = 0 donc à $(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. L'ensemble est donc le cercle de centre $\left(1\,; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

88 • **1.** Deux invariants O et le milieu B de [OA].

2. a) $\frac{z^2}{i-z} = \frac{(x+iy)^2}{i-x-iy} = \frac{(x^2-y^2+2ixy)(-x-i+iy)}{x^2+(1-y)^2}$.

D'où le résultat.

b) M′ sur l'axe des imaginaires purs équivaut à :

$$M \neq A,\ x(x^2+y^2-2y) = 0.$$

L'ensemble cherché est la réunion de l'axe des imaginaires purs et du cercle de centre A(i), de rayon 1, A exclu.

89 • **1.** • $Z = \frac{2ix - 2y - i}{x + 1 + iy}$

$$= \frac{-3y + i(2x^2 + 2y^2 + x - 1)}{(x+1)^2 + y^2}.$$

D'où $\text{Re}(Z) = \frac{-3y}{(x+1)^2+y^2}$,

$\text{Im}(Z) = \frac{2x^2+2y^2+x-1}{(x+1)^2+y^2}$,

$\overline{Z} = \frac{-3y - i(2x^2+2y^2+x-1)}{(x+1)^2+y^2}$.

• $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}} = \sqrt{\frac{4x^2+4y^2-4x+1}{x^2+y^2+2x+1}}$.

2. $|Z| = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$.

L'ensemble $\mathscr{C}_1$ est donc le cercle de centre I, d'affixe 1, de rayon 1.

3. Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Re(Z) = 0 $\Leftrightarrow y = 0$.

L'ensemble $\mathscr{C}_2$ est donc la droite d'équation $y = 0$, privée du point A(– 1; 0).

90 • **1.** $z = re^{i\theta} \Rightarrow Z = \frac{1}{r^2e^{2i\theta}} = \frac{1}{r^2}e^{-2i\theta}$.

2. Z_0 donné non nul,

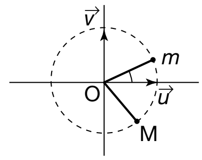
$$z_0^2 = \frac{1}{Z_0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \frac{1}{|Z_0|} \\ 2\theta = -\arg Z_0\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{|Z_0|}} \\ \theta = -\frac{1}{2}\arg(Z_0) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

z_0 existe toujours mais il n'est pas unique.

3. a) $z = e^{i\theta}$, $Z = e^{-2i\theta}$.

Si $(\vec{u}, \overrightarrow{Om}) = \theta$, alors $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -2\theta$.



b) $z = Z \Leftrightarrow e^{i\theta} = e^{-2i\theta}$

$\Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$,

soit $\left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

4. a) On note $(\vec{u}, \vec{u}^*) = \alpha$.

$m \in d^* \Leftrightarrow \theta = \alpha\ [2\pi] \Leftrightarrow -2\theta = -2\alpha\ [4\pi]$.

M appartient à la demi droite $d_1{}^*$avec $(\vec{u}, \vec{u}_1{}^*) = -2\alpha$.

b) $M \in d^* \Leftrightarrow -2\theta = \alpha\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta = -\frac{\alpha}{2}\ [\pi]$.

Donc m appartient à la droite d_2 passant par O telle que $(\vec{u}, \vec{u}_2{}^*) = -\frac{\alpha}{2}$.

91 • **1.** $Z = \frac{r^3e^{i3\alpha}}{2+r^3}$, soit $\rho = \frac{r^3}{2+r^3}$ et $\theta = 3\alpha$.

2. a) $m \in \mathscr{C} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{3} \Rightarrow$ M appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayon $\frac{1}{3}$. Comme α est quelconque, θ est quelconque et l'ensemble est $\mathscr{C}'$.

b) $m \in [OT) \Rightarrow \arg z = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \Rightarrow \arg Z = -\frac{3\pi}{4}\ [6\pi]$.

Donc l'ensemble est la demi-droite [OT′) avec T′(– 1 – i).

3. a) $f(x) = \frac{x^3}{2+x^3}$, $f'(x) = \frac{6x^2}{(2+x^3)^2} > 0$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc :

$$f(\mathbb{R}_+) = [0; 1[.$$

b) Donc lorsque m est un point quelconque, M est un point dont le module est inférieur strictement à 1 et le point M est un point du disque ouvert de centre O et de rayon 1.

92 • **1.** $\forall z, f(z) = e^y \cdot e^{i\pi x}$ donc :

• $f(0) = e^0e^{i0} = 1$

• $f(i) = e^ie^{i0} = e$

• $f(-i) = e^{-1}e^{i0} = \frac{1}{e}$

• $f(1+i) = e^1e^{i\pi} = -e$

• $f(1-i) = e^{-1}e^{i\pi} = -\frac{1}{e}$.

2. $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e^y \neq 0$ et $e^{i\pi x} \neq 0$ donc $e^ye^{i\pi x} \neq 0$.

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \neq 0$.

• $|f(z)| = |e^ye^{i\pi x}| = |e^y|\,|e^{i\pi x}|$

$= |e^y|$ car $|e^{i\pi x}| = 1$

$= e^y$ car $e^y > 0$.

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| = e^y$.

• $\text{Arg}(f(z)) = \arg(e^ye^{i\pi x})$

$= \arg(e^y) + \arg(e^{i\pi x})$

$= 0 + \pi x$ car $e^y \in\ ]0\,; +\infty[$.

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, \arg(f(z)) = \pi x$.

3. a) $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, f(z + z') = e^{y + y'} e^{i\pi(x + x')}$
$= e^{y} e^{y'} e^{i\pi x} e^{i\pi x'}$
$= e^{y} e^{i\pi x} \times e^{y'} e^{i\pi x'}$
$= f(z) \times f(z')$.

$f(z - z') = e^{y - y'} e^{i\pi(x - x')} = e^{y} e^{-y'} e^{i\pi x} e^{-i\pi x'}$

$$= \frac{e^{y} e^{i\pi x}}{e^{y'} e^{i\pi x'}} = \frac{f(z)}{f(z')}$$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nz) = e^{ny} e^{i\pi n x}$ D'après Moivre.
$= (e^{y})^{n} (e^{i\pi x})^{n}$
$= (e^{y} e^{i\pi x})^{n} = f(z)^{n}$.

4. a) • $M(z) \in L$ éq. à $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ éq. à $M(z) \in [AD]$ ou $M(z) \in [BC]$.

Conclusion : $L = [AD] \cup [BC]$.

• Dire que $M(f(z))$ où $z \in L$ éq. à dire que

$\begin{cases} |f(z)| = e \\ \text{et} \\ -\pi \leqslant \text{Arg}\,(f(z)) \leqslant \pi \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} |f(z)| = e^{-1} \\ \text{et} \\ -\pi \leqslant \text{Arg}\,(f(z)) \leqslant \pi \end{cases}$

Conclusion : L'ensemble des points $N(f(z))$ où z est l'affixe d'un point de L est la **réunion** du cercle de rayon e et de centre O et du cercle de rayon e^{-1} de centre O.

b) • $M(z) \in K$ éq. à $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$ éq. à $M(z)$ appartient (au sens large) du carré ABCD

Conclusion : K = intérieur du carré ABCD.

• Dire que $M(f(z))$ où $z \in K$ éq. à dire que

$\begin{cases} e^{-1} \leqslant |f(z)| \leqslant e \\ -\pi \leqslant \text{Arg}\,(f(z)) \leqslant \pi \end{cases}$.

Ce qui équivaut à dire que $M(z)$ est dans la couronne délimitée par les cercles de centre O et de rayon e^{-1} et e.

Prendre toutes les initiatives

93 • $Z^{n} + \overline{Z}^{n} = r^{n} e^{in\theta} + r^{n} e^{-in\theta} = r^{n}\, 2\cos n\theta$ d'après Euler, et par récurrence :

$$Z_n = 2^{n} r^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos\theta \cos 2\theta \dots \cos n\theta.$$

94 $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left[-2i \sin\frac{\theta}{2}\right]$

$= -2i e^{i\frac{\theta}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$.

Ainsi :

• $|1 - e^{i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ et $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4}\right[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

donc $|1 - e^{i\theta}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$.

• $\text{Arg}\,(1 - e^{i\theta}) = \arg(-2i) + \arg\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right) + \arg\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\arg(1 - e^{i\theta}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} + 0$ $\left(\arg\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = 0 \text{ car } \sin\frac{\theta}{2} > 0\right)$

$\arg(1 - e^{i\theta}) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$.

95 • $z = 0$ est solution.

• Pour $z \neq 0$, posons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors $z^{2} = (\overline{z^{6}})$ équivaut à $r^{4} e^{-8i\theta} = 1$ donc à $r = \pm 1$ et $\theta = \frac{k\pi}{4}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi les solutions sont les complexes de l'ensemble $\{0 ; e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \mathbb{Z} ; -e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \mathbb{Z}\}$.

96 Posons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$z^{3} = r^{3} e^{3i\theta}$ donc z^{3} réel et $1 \leqslant z^{3} \leqslant 8$

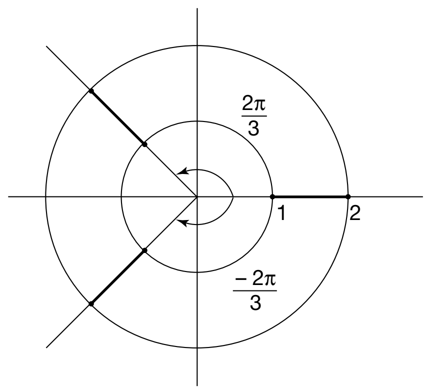
équivaut à $3\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $1 \leqslant r^{3} \leqslant 8$

donc à $\theta = \frac{2k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$ et $1 \leqslant r \leqslant 2$.

L'ensemble des z solutions est donc l'ensemble :

$\{r, 1 \leqslant r \leqslant 2 ; k e^{\frac{2i\pi}{3}}, 1 \leqslant k \leqslant 2 ; k' e^{\frac{4i\pi}{3}}, 1 \leqslant k' \leqslant 2\}$.

L'ensemble des points est donc :



97 $z' = -1 + \frac{i}{\tan\varphi}$; $|z'|^{2} = \frac{i}{\sin^{2}\varphi}$, donc $|z'| = \frac{1}{\sin\varphi}$

car $\varphi \in]0 ; \pi[$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Donc $z' = \frac{i}{\sin\varphi} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$.

98 Supposons qu'il existe z complexe tel que

$$|1 + z| < \frac{1}{2} \text{ et } |1 + z^{2}| \leqslant 1.$$

Avec $z = x + iy$, x et y réels, on obtient :

• $|1 + z^{2}| < 1$ équivaut à $(x^{2} + y^{2}) + 2(x^{2} - y^{2}) < 0$
ce qui implique $x^{2} \leqslant y^{2}$

et

• $|1 + z| < \frac{1}{2}$ équivaut à $x^2 + y^2 + 2x + \frac{3}{4} < 0$.

Ainsi ces deux conditions impliquent $2x^2 + 2x + \frac{3}{4} < 0$ d'où la contradiction.

99 • z est un complexe de module 1, $z \neq 1$, donc $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$.

En résolvant $e^{i\theta} = \frac{x+i}{x-i}$ on obtient $x = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ qui est un réel.

Ainsi en posant $x = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ on a bien $z = \frac{x+i}{x-i}$, x réel.

100 • $r \in \mathbb{R}$;

$$P(ir) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3r(r-4) = 0 \\ (r^2 + 18)(4 - r) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r = 4.$$

• $P(z) = (z - 4i)\,Q(z)$, avec $Q(z) = z^2 - 3z - 18$;
$\mathcal{S} = \{4i; -3; 6\}$.

101 • $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{i\beta}$,

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{(e^{i\alpha} + e^{i\beta})^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}$$

$$= \frac{\left[e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)}\right)\right]^2}{e^{i(\alpha+\beta)}}$$

$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \in \mathbb{R}_+^*.$$

102 • $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right]$

$$e^{ia} + e^{ib} = 2e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Donc $|e^{ia} + e^{ib}| = 2\left|\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right|$

$$\arg(e^{ia} + e^{ib}) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} \text{ si } \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0 \\ \frac{a+b}{2} + \pi \text{ si } \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) < 0 \end{cases}.$$

Problèmes

(page 348)

103 • **A. 1.** • $E_1 = \mathbb{R} - \{1\}$, $\gamma'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$;

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
γ'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
γ	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

$\gamma(E_1) =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$.

• $E_2 = \mathbb{R} - \{0\}$, $\psi'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$;

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ψ'(x)		+	‖	+	
ψ	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$\psi(E_2) = \mathbb{R}$.

B. 1. $f(z) = 3$
$\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}; \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right\}.$$

2. a) $Z = \frac{(1 + e^{i\theta})^2}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta} = 2\cos\theta + 2$

$$= 2(1 + \cos\theta).$$

Donc quand $\theta \in \mathbb{R}$, Z est réel et $Z \in [0; 4]$.

3. a) $Z = X + iY = \frac{(x^2 - y^2 + 2ixy)}{(x-1) + iy}$

$$= \frac{x^3 + y^2x - x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + i\,\frac{y(x^2 + y^2 - 2x)}{(x-1)^2 + y^2}.$$

b) $m \in (OA) - \{A\} = d$, donc :

$$Z = \frac{z^2}{z-1} \text{ avec } z \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

D'après la partie **A**, Z est réel avec
$Z \in]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$.

c) $m \in \Delta$ donc $z = 1 + iy$ avec $y \neq 0$.

$Z = \frac{1 - y^2 + 2iy}{iy} = 2 + i\,\frac{y^2 - 1}{y}$, M appartient donc à la droite d'équation $x = 2$. De plus, d'après la partie **A**, $\psi(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$ donc l'ensemble est la droite toute entière.

d) M décrit $(O; \vec{u})$ donc $Y = 0$ ou $y(x^2 + y^2 - 2x) = 0$ d'où m appartient à la droite d'équation $y = 0$ ($z \in \mathbb{R} - \{1\}$) ou m appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

104 • **A. 1.** $F(1) = A + B$; $F(i) = (A - B)i$

2. D'après le **1.**, $A + B = 0$ et $(A - B)i = 0$ donc $A = B = 0$.

B. 1. $(f_{a,b})\,(f_{a,b}(z)) = a(az + b\bar{z}) + b(a\bar{z} + bz)$

$$= (a^2 + b^2)z + 2ab\bar{z}.$$

2. $f_{a,b}$ involutive équivaut à a et b vérifient $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$.

3. D'après le système précédent il y a 4 $f_{a,b}$ involutives : $f_{0,1} : z \mapsto \bar{z}$; $f_{0,-1} : z \mapsto -\bar{z}$; $f_{1,0} : z \mapsto z$ et $f_{-1,0} : z \mapsto -z$.

C. 1. Oui car $(g \circ g)(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{4}}z = z$.

2. $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$.

3. a) M′ = M équivaut à $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = y \end{cases}$

donc à $\begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)x \\ y = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}x \end{cases}$

or $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ donc Δ est la droite d'équation $y = (\sqrt{2} - 1)x$ qui est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$.

4. Pour tout point M du plan,

$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = x' - x + (\sqrt{2} - 1)(y' - y)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) - x + (\sqrt{2} - 1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) - y\right)$

$= 0$.

Donc $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$.

5. a) $x_I = \frac{\sqrt{2}}{4}((1 + \sqrt{2})x + y)$; $y_I = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + (\sqrt{2} - 1)y)$.

b) $I \in \Delta$ car $(\sqrt{2} - 1)\, x_I = (\sqrt{2} - 1)\frac{\sqrt{2}}{4}((1 + \sqrt{2})x + y)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}(x + (\sqrt{2} - 1)y) = y_I$.

6. M′ est l'image de M dans la symétrie d'axe Δ.

C'est nouveau au bac (page 344)

105 **1.** $z^2 = 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$

$z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$, réponse **b**.

2. $z^2 = 2\sqrt{2}(1 - i) = 2\sqrt{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$, réponse **b**.

3. Posons $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.

Alors $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ équivaut à $r^2 = 4$ et $2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mais $x_z < 0$ et $y_z > 0$ donc $\theta = \frac{7\pi}{8}$ convient, réponse **a**.

106 **1. Faux**, contre-exemple $z = 1$.

2. Faux si $r < 0$.

3. Faux, contre-exemple $\theta = \pi$. $e^{i\pi} = -1$ et $\overline{e^{i\pi}} = -1$.

4. Vrai, $Z = 2iz$ équivaut à $\frac{Z}{z} = 2i$ donc à $\left|\frac{Z}{z}\right| = 2$

et $\arg\left(\frac{Z}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

5. Faux si $n \neq 0$, posons $z = (1 + i)^n$ alors $\bar{z} = (1 - i)^n$

donc $Z_n = \frac{z - \bar{z}}{2} = \frac{2i\mathrm{Im}(z)}{2} = i\,\mathrm{Im}(z)$

donc Z_n est un imaginaire pur si $n \neq 0$.

107 **1.** • Posons $Z = \frac{z}{z'}$ alors $z'Z = z$

et d'après le prérequis $\arg z = \arg z' + \arg Z$

donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

• Prenons $z = 1$ et $z' = z^2$ dans le **1.** alors

$\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = \arg 1 - \arg z^2 = -\arg z^2$ car $\arg 1 = 0$.

En appliquant le prérequis avec $z = z'$ on en tire

$$\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2\arg z.$$

2. a) M décrit d privé de 0 équivaut à $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$;

ainsi cela revient à $\arg(z') = -\frac{2\pi}{3}$ donc M′ décrit la demi-droite privée de 0 dirigée par $\vec{t}$ tel que

$$(\vec{u}, \vec{t}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

b) M′ décrit d privé de 0 équivaut $\arg(z') = \frac{\pi}{3}$; ainsi cela revient à $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$ donc M décrit la demi-droite privée de 0 dirigée par $\vec{s}$ tel que $(\vec{u}, \vec{s}) = -\frac{\pi}{6}$.