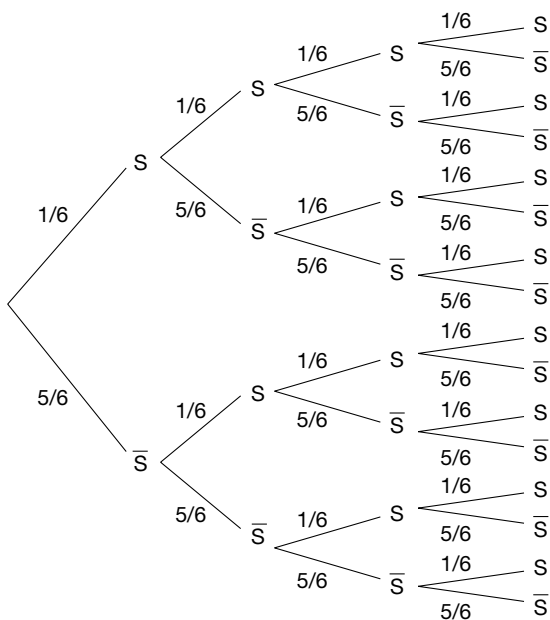


Activités (page 286)

ACTIVITÉ 1

1. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

2. Arbre



3. a) $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$;

$P(X = 4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$.

b) $P(X = 1) = 4 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324}$;

$P(X = 3) = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$.

c) $P(X = 2) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$.

d) Loi de X.

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

4. a) Nombre de listes :

sans S : 5^4 ;

avec un S : $\binom{4}{1} \times 5^3$;

avec deux S : $\binom{4}{2} \times 5^2$;

avec trois S : $\binom{4}{3} \times 5$;

avec quatre S : 1.

b) Chaque issue de l'événement $X = k$ correspond à une liste contenant k lettres S et $4 - k$ lettres \bar{S} et en raison de l'équiprobabilité, chacune de ces listes a pour probabilité $\frac{1}{6^4}$. Il y a $\binom{4}{k} \times 5^{4-k}$ telles listes.

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } P(X = k) &= \binom{4}{k} \times 5^{4-k} \times \frac{1}{6^4} = \binom{4}{k} \times \frac{5^{4-k}}{6^4} \\
 &= \binom{4}{k} \times \frac{1}{6^k} \times \frac{5^{4-k}}{6^{4-k}} \\
 &= \binom{4}{k} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k} .
 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la loi de X.

c) $\sum_{k=0}^4 P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$
 $+ \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^4$

On reconnaît la formule du binôme donc

$$\sum_{k=0}^4 P(X = k) = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^4 = 1.$$

ACTIVITÉ 2

1. $P(X < 6) = 0,85$.

2. $P(3 \leq X \leq 5) = 0,125 + 0,225 = 0,35$.

3. $P(X > 7) = 0,05 + 0,05 = 0,1$.



TD 1

1. Loi de X

k	0	1
$p(X = k)$	$\frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{57}{203}$	$\frac{\binom{10}{1} \times \binom{20}{2}}{\binom{30}{3}} = \frac{95}{203}$

k	2	3
$p(X = k)$	$\frac{\binom{10}{2} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{45}{203}$	$\frac{\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{6}{203}$

2. Loi de Y

L'expérience est la répétition de trois épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.

L'épreuve de Bernoulli est caractérisée par l'événement S « tirage d'une boule blanche » de probabilité $p = \frac{1}{3}$.

Y indique le nombre de réalisations de S donc Y suit une loi de $\mathcal{B}(3; \frac{1}{3})$.

k	0	1
$p(Y = k)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	$\binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

k	2	3
$p(Y = k)$	$\binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

3. Tableau des différences

k	0	1
$p(X = k) - p(Y = k)$	$\approx -0,0155$	$\approx 0,0235$

k	2	3
$p(X = k) - p(Y = k)$	$\approx -0,0005$	$\approx -0,0075$

2. Loi de X_1

k	0	1	2	3
$p(X_1 = k)$	$\frac{13\ 134}{44\ 551}$	$\frac{19\ 900}{44\ 551}$	$\frac{9\ 900}{44\ 551}$	$\frac{1\ 617}{44\ 551}$

2. Loi de Y_1

La loi de Y_1 est aussi une loi binomiale $\mathcal{B}(3; \frac{1}{3})$. (Les proportions de boules blanches et noires n'ont pas changé).

3. Tableau des différences

k	0	1
$p(X_1 = k) - p(Y_1 = k)$	$\approx -0,001\ 488$	$\approx 0,002\ 235$

k	2	3
$p(X_1 = k) - p(Y_1 = k)$	$\approx -0,000\ 005$	$\approx -0,000\ 742$

TD 2

1. Moyenne : 597,4 ; Variance : 99,24.

2. a) $P(X = 10) = 0,45^{10} \approx 0,000\ 34$.

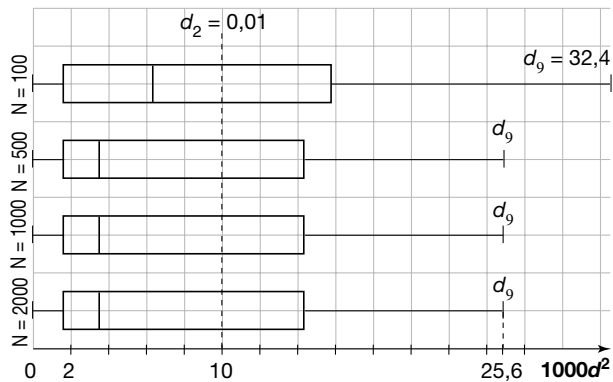
b) La variable aléatoire N donnant le nombre de pains de masse inférieur à 585 g suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,12)$.

$$P(N \leq 2) = 0,88^{12} + 10 \times 0,88^9 \times 0,12 + 45 \times 0,88^8 \times 0,12^2 \approx 0,891.$$

TD 3

1 2. $d^2 = \frac{0,002\ 5}{0,5} + \frac{0,002\ 5}{0,5} = 0,01$.

3.



5. • Pour A : $d^2 = 0,0196$.

• Pour B : $d^2 = 0,0036$.

• Pour C : $d^2 = 0,04$.

Au risque de 10%, les résultats de A et B sont en adéquation avec les résultats d'une pièce équilibrée, ce qui n'est pas le cas de C.

2 a) $d^2 = 0,01$, valeur qui dépasse 0,002 704. On ne peut donc pas accepter, au seuil de risque de 10%, que la pièce soit équilibrée.

Note : Les fréquences sont les mêmes qu'au 1 2. (ainsi que la valeur de d^2), mais les valeurs de n ne sont pas les mêmes.

b) $d^2 = 0,0036$; $d^2 > d_0$. La conclusion est la même.

- 3** 1. $P(X = 50) \approx 0,079\,59$; $P(X \leq 40) \approx 0,028\,44$;
 $P(X > 70) = 1 - P(X \leq 70) \approx 1,608 \times 10^{-5}$;
 $P(45 \leq X \leq 55) = P(X \leq 55) - P(X \leq 44) \approx 0,728\,75$.
 2. a) $P(X \leq 530) - P(X \leq 469) \approx 0,946\,32$.

- b) La probabilité d'un tel résultat est de l'ordre de $P(X = 450)$, soit $0,000\,17$. Ce qui est peu probable.
 3. En supposant que le nombre X de NON suit la loi binomiale telle que $n = 1000$ et $P = 0,5$, alors :
 $P(X \leq 400) \approx 1,3 \times 10^{-10}$,
 ce qui représente un événement pratiquement impossible.



Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 303)

1. et 2. Expérience de Bernouilli. Loi binomiale

- 1** 1. Soit a le nombre de boules blanches :

$$p = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}.$$

2. Loi de X : X suit une loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{3}{4}\right)$.

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

- 2** « Lancer six dés parfaits » peut être assimilé à « lancer six fois de suite le même dé ».
 X : nombre de sortie du 6.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(6; \frac{1}{6}\right)$.

$$P(X = 3) = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11\,664}.$$

- 3** N : nombre de tirs dans la cible.
 N suit la loi $\mathcal{B}(10; 0,5)$.

$$P(N = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}.$$

- 4** X : nombre de rois lors des huit tirages.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{8}\right)$.

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \times \left(\frac{1}{8}\right)^5 \times \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7^4}{8^7}.$$

- 5** « Lancer six pièces de monnaie équilibrées » peut être assimilé à « lancer six fois de suite une même pièce ».

X : nombre de pile.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(6; \frac{1}{2}\right)$.

- a) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{11}{32}.$$

- b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$.

- 6** X : nombre de réponses vraies.

X suit une loi $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10};$$

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Or $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ donc les deux probabilités sont égales.

- 7** Loi de X : X suit une loi $\mathcal{B}(6; 0,4)$.

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	0,046 656	0,186 624	0,311 04	0,276 48

k	4	5	6
$p(X = k)$	0,138 24	0,036 864	0,004 096

- 8** $E(X) = np$ donc $p = \frac{3}{10}$.

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 P(X=k) = \left(\frac{7}{10}\right)^{10} + 10 \times \left(\frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{7}{10}\right)^9$$

$$+ 45 \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^8 + 120 \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^7 \approx 0,649\,6.$$

$$P(X \geq 7) \approx 0,010\,6.$$

- 9** $\sigma^2(X) = np(1-p)$ donc $n = 25$.

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 P(X=k)$$

$$= 0,8^{25} + 25 \times 0,2 \times 0,8^{24} + 300 \times 0,2^2 \times 0,8^{23}$$

$$\approx 0,098 2.$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,901 8.$$

10 X : nombre de sorties d'un numéro impair. X suit une loi $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{2}\right)$.

A : « au moins trois fois un nombre pair ».

\bar{A} signifie « X ≤ 2 » ;

$$P(\bar{A}) = \sum_{k=0}^2 P(X=k)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{37}{256}$$

$$\text{d'où } P(A) = \frac{219}{256}.$$

11 Corrigé dans le manuel.

12 Expérience de Bernoulli d'ordre 20 associés à la probabilité de succès $p = 0,1$ (achat).

X : nombre d'acheteurs. X suit une loi $\mathcal{B}(20; 0,1)$.

1. $P(X = 0) = 0,9^{20} \approx 0,121 6.$

2. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$
 $= 1 - 0,9^{20} - 20 \times 0,1 \times 0,9^{19} \approx 0,608 3.$

3. Lois de probabilité continues

13 1. f est continue sur \mathbb{R} sauf en 1, positive et

$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$ donc f est une densité de probabilité.

2. $P(X \geq 0,5) = \int_{0,5}^1 3x^2 dx = 0,875 ;$

$$P(X < 0,1) = \int_0^{0,1} 3x^2 dx = 0,001 ;$$

$$P(0,2 < X < 0,8) = \int_{0,2}^{0,8} 3x^2 dx = 0,504.$$

14 1. $I(x) = \int_0^x 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^x = 1 - e^{-x^2}$
d'où $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = 1.$

2. f est continue sur \mathbb{R} , positive et d'après 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1.$$

3. Pour m positif :

$$P(X \leq m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^m 2xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-m^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-m^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt{\ln 2}.$$

15 1. λ est défini par :

$$\int_{-1}^1 \lambda(1-x^2) dx = 1.$$

Or $\int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}$ donc $\frac{4}{3}\lambda = 1$, ainsi $\lambda = \frac{3}{4}$.

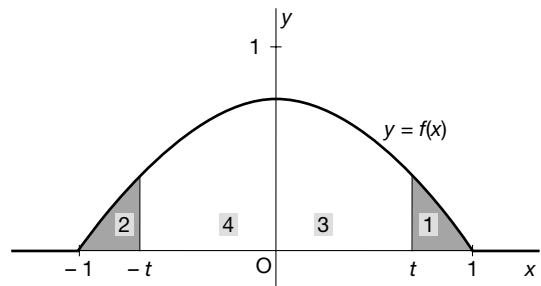
2. a) La fonction densité est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$P(X \geq t) = \int_t^1 f(t) dt = \text{aire (1) et}$$

$$P(X \leq -t) = \int_{-1}^{-t} f(t) dt = \text{aire (2)}.$$

Les deux domaines sont symétriques par rapport à l'axe (Oy) donc ils ont la même aire.

Ainsi $P(X \geq t) = P(X \leq -t).$



b) $P(0 \leq X \leq t) = \int_0^t f(t) dt = \text{aire (3)}$

et $\text{aire (3)} = \frac{1}{2} - \text{aire (1)} = \frac{1}{2} - P(X \geq t).$

Ainsi $P(0 \leq X \leq t) = \frac{1}{2} - P(X \geq t).$

4. Lois uniforme et exponentielle

16 1. $P(X < 3) = \frac{\text{longueur de } [0; 3[}{\text{longueur de } [0; 10]} = \frac{3}{10}.$

2. $P(X > 6) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$

3. $P(3 < X < 8) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$

17 Corrigé dans le manuel.

18 a) Bruno arrive entre 12 h et 12 h 20.

$$P(0 \leq d < 20) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

b) Bruno arrive entre 12 h 40 et 13 h.

$$P(40 < d \leq 60) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

c) Bruno arrive entre 12 h 20 et 12 h 25.

$$P(20 \leq d < 25) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}.$$

19 a) $P(T > 300) = 1 - P(T \leq 300)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_0^{300} 0,005e^{-0,005t} dt \\ &= 1 - (1 - e^{-0,005 \times 300}) \\ &= e^{-1,5} \approx 0,223. \end{aligned}$$

b) $P(T \leq 365) = \int_0^{365} 0,005e^{-0,005t} dt$

$$\begin{aligned} &= 1 - e^{-1,825} \\ &\approx 0,839. \end{aligned}$$

c) $P(365 \leq T \leq 730) = \int_{365}^{730} 0,005 \times e^{-0,005t} dt$

$$\begin{aligned} &= e^{-1,825} - e^{-3,65} \\ &\approx 0,135. \end{aligned}$$

20 1. Par hypothèse $P(X > 60) = 0,942$ soit $e^{-60\lambda} = 0,942$ d'où $\lambda = -\frac{1}{60} \ln(0,942) \approx 0,001$.

2. $P(240 \leq X \leq 300) = \int_{240}^{300} \lambda e^{-\lambda t} dt$

$$\begin{aligned} &= e^{-240\lambda} - e^{-300\lambda} \\ &\approx 0,046. \end{aligned}$$

5. Loïs sans mémoire

21 1. $P(X \geq 5 / X \geq 2) = P(X \geq 3) = 0,452$.

2. X est alors une loi exponentielle de paramètre λ .

Or $P(X \geq 3) = 0,452$ donc $e^{-3\lambda} = 0,452$

d'où $\lambda = -\frac{1}{3} \ln(0,452)$.

Ainsi $P(X \leq 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-5\lambda} \approx 0,734$.

22 1. $P(T \geq 2000 / T \geq 1000) = P(T \geq 1000) = 1 - 0,095 = 0,905$.

2. T est une loi exponentielle de paramètre λ .

$P(X \leq 1000) = 0,095$ soit $1 - e^{-1000\lambda} = 0,095$

d'où $\lambda = -\frac{1}{1000} \ln(0,905)$.

Alors la demi-vie est $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ soit $\tau \approx 6944$ (en h).

23 Corrigé dans le manuel.

24 B : la durée de vie du système dépasse 1 000 h. Les durées de vie de chaque composant sont des variables aléatoires de même type et deux à deux indépendantes.

B signifie que chaque composant fonctionne au moins 1 000 h donc $P(B) = P(X \geq 1000)^3$.

$P(B) = (e^{-1000\lambda})^3$ avec $\lambda = 10^{-4}$ soit

$P(B) = e^{-0,3} \approx 0,741$.

Apprendre à chercher

(page 305)

25 Plusieurs lancers de deux pièces de monnaie

Les outils :

- Loi binomiale.
- Événements contraires (ou complémentaires).

Les objectifs :

- Savoir calculer des probabilités.

1. a) FF, FP, PF, PP. b) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}$. c) $p = \frac{1}{4}$.

2. a) Trois succès et sept échecs, donc $(X = 3)$.

b) $p(A) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

3. \bar{B} : 0 fois «deux pile»,

$$p(\bar{B}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}, \text{ d'où } p(B) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

26 La roue de la fortune

Les outils :

- Variable aléatoire.
- Espérance.
- Loi binomiale.

Les objectifs :

- Savoir interpréter l'espérance dans un jeu.

1. • Aucun dé ne marque c : $Y = -1$.

• un dé marque c : $Y = 1$.

• deux dés marquent c : $Y = 2$.

• trois dés marquent c : $Y = 3$.

2. a) On lance trois dés, le résultat est, pour chaque dé, c ou \bar{c} . On réalise une expérience de Bernouilli

avec $p = \frac{1}{6}$; $n = 3$. Donc X suit une loi $\mathcal{B}(n; p)$

b) $Y = -1$, donc $X = 0$;

$Y = 1$, donc $X = 1$;

$Y = 2$, donc $X = 2$;

$Y = 3$, donc $X = 3$.

c) • $P(Y = -1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$;

• $P(Y = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$;

• $P(Y = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

$$\bullet P(Y = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

y_i	-1	1	2	3
$p(Y = y_i)$	$\frac{125}{6^3}$	$\frac{75}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

$$\bullet E(Y) = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{6^3} = \frac{-17}{6^3}.$$

d) Sur un grand nombre de cycles de 216 parties, le joueur perdra en moyenne $\frac{-17}{6^3} \times 216$ jetons, soit 17 jetons.

27 Fonctionnement d'un système de communication

Les outils :

- Variables aléatoires
- Calcul algébrique : inéquation.

L'objectif :

- Étudier la fiabilité d'un système sous condition.

2. a) Le système à cinq composants fonctionne lorsque au moins trois composants fonctionnent.

$p_5 = P(X_5 \geq 3)$ donc

$$p_5 = P(X_5 = 3) + P(X_5 = 4) + P(X_5 = 5)$$

$$p_5 = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5.$$

b) Le système à trois composants fonctionne lorsque au moins deux composants fonctionnent.

$$p_3 = P(X_3 \geq 2) \text{ donc } p_3 = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3.$$

c) $p_5 > p_3$

$$\Leftrightarrow 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$

$$\Leftrightarrow 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) - 3p^2(1-p) - p^3(1-p) > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(1-p)[10p(1-p) + 5p^2 - 3 - p(1+p)] > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(1-p)(-6p^2 + 9p - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow -3p^2(1-p)(p-1)(2p-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow p^2(1-p)^2(2p-1) > 0.$$

d) Donc $p > \frac{1}{2}$. Le système à cinq composants est préférable à celui à trois dans le cas où $p \in]0,5; 1[$.

Prolongement : Dans le cas général de systèmes à $2k+1$ et $2k-1$ ($k \geq 2$), composants,

$$p_{2k+1} - p_{2k-1} = \binom{2k-1}{k} p^k (1-p)^k (2p-1).$$

$$\text{Ainsi } p_{2k+1} - p_{2k-1} > 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}.$$

D'où la généralisation du résultat établi lorsque $k = 2$.

28 Combien d'enfants pour avoir une fille ?

Les outils :

- Loi binomiale.
- Événements contraires.
- Calcul algébrique : inéquation.

L'objectif :

- Optimiser sous condition probabiliste.

1. Mise en place d'une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{B}(n; 0,5)$.

2. a) \bar{A} : « avoir n garçons lors de n naissances ».

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ donc } P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{b) } P(A) \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(0,01)}{\ln 2}.$$

D'où l'entier n minimum : $n_0 = 7$.

29 Fonctionnement d'un feu tricolore

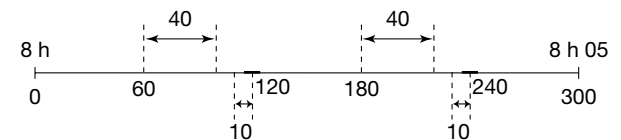
Les outils :

- Représentation graphique.
- Loi uniforme.

L'objectif :

- Calculer des probabilités.

1. Représentation graphique :



2. a) A : « Attente de moins de 10 s ».

A signifie :

« $T \in]0; 60[$ ou $T \in]110; 180[$ ou $T \in]230; 300[$ » (réunion d'événements incompatibles).

$$\text{b) } P(A) = \frac{60}{300} + \frac{70}{300} + \frac{70}{300} = \frac{2}{3}.$$

3. B : « Attente de plus de 20 s ».

$$\begin{aligned} P(B) &= P(60 < T < 100) + P(180 < T < 220) \\ &= \frac{40}{300} + \frac{40}{300} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Pour progresser

(page 307)

Loi binomiale

30 1. On utilise la loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,92$ (pas de défaut).

$$P(X = 10) = (0,92)^{10} \approx 0,4344.$$

2. $P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$\begin{aligned} &= \binom{10}{7} \times (0,92)^7 \times (0,08)^3 + \binom{10}{8} \times (0,92)^8 \\ &\times (0,08)^2 + \binom{10}{9} \times (0,92)^9 \times 0,08 + (0,92)^{10} \\ &\approx 0,994. \end{aligned}$$

31 B gagne le tournoi s'il gagne cinq parties au moins. On utilise la loi binomiale avec $n = 9, p = 0,4$.
 $P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$
 $\approx 0,2666$.

32 X : nombre de Pile. X suit une loi $\mathcal{B}(20 ; 0,5)$.

Y : gain en e.

$$P(Y = 1) = P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11)$$

$$= \binom{20}{9} \times 0,5^{20} + \binom{20}{10} \times 0,5^{20} + \binom{20}{11} \times 0,5^{20}$$

$$\approx 0,4966$$

$$P(Y = -1) = 1 - P(Y = 1) \approx 0,5034$$

$E(Y) = P(Y = 1) - P(Y = -1) < 0$ donc le jeu n'est pas équitable.

33 1. Pour une journée, un client achète (succès)

avec une probabilité $p = \frac{1}{15}$, d'où la répétition de dix épreuves identiques et indépendantes.

Donc le nombre d'acheteurs suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.

$$2. \bullet P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{15}\right)^k \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}$$

$$\bullet P(X = 0) \approx 0,5016;$$

$$\bullet P(X = 1) \approx 0,3583;$$

$$\bullet P(X = 5) \approx 0,00024.$$

$$3. E(X) = n \times p = \frac{2}{3}.$$

4. Y : gain en e.

$$Y = 100X, \text{ donc } E(Y) = 100 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{3} \text{ e.}$$

34 1. X suit une loi $\mathcal{B}(100 ; 0,02)$.

$$2. P(X = 0) = 0,98^{100} \approx 0,1326;$$

$$P(X = 1) = 100 \times 0,02 \times 0,98^{99} \approx 0,2707;$$

$$P(X = 2) = 4950 \times 0,02^2 \times 0,98^{98} \approx 0,2734.$$

35 1. X : nombre de succès ;

X suit une loi $\mathcal{B}\left(5 ; \frac{1}{3}\right)$.

A : « au moins deux succès ».

$$P(A) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right] = \frac{131}{243}.$$

$$2. 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0,1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Ainsi $n \geq 6$.

36 Corrigé dans le manuel.

37 1. La même épreuve (test du microprocesseur) est répétée cinquante fois de façon indépendante, et $p = 0,05$ donc X suit une loi $\mathcal{B}(50 ; 0,05)$.

2. Tableau de valeurs $0 \leq k \leq 15$.

k	P(X = k)	P(X < k)
0	0,076944975	0,076944975
1	0,202486777	0,279431752
2	0,26110137	0,540533123
3	0,219874838	0,760407961
4	0,135975229	0,89638319
5	0,065840637	0,962223827
6	0,025989725	0,988213552
7	0,008598105	0,996811657
8	0,002432359	0,999244015
9	0,000597421	0,999841437
10	0,000128917	0,999970354
11	2,46732E-05	0,999995027
12	4,22041E-06	0,999999248
13	6,49294E-07	0,999999897
14	0,03153E-08	0,999999987
15	1,14082E-08	0,999999999

$$3. P(X = 3) \approx 0,220.$$

$$4. P(X \leq k) > 0,999 \Leftrightarrow k \geq 8.$$

38 • Appelons A l'événement « On a obtenu six fois "face" », B l'événement « Les trois premiers tirages sont FPF ».

$$1. P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

• $A \cap B$ est l'événement « FPF puis il y a quatre "face" dans les sept autres tirages ».

$$P(A \cap B) = p \times (1-p)p \times \binom{7}{4} p^4 \times (1-p)^3.$$

$$\bullet P(A) = \binom{10}{6} p^6 \times (1-p)^4.$$

$$\bullet \text{D'où } P_A(B) = \frac{35p^6(1-p)^4}{210p^6(1-p)^4} = \frac{1}{6}.$$

2. Le résultat est :

$$P(A \cap B') = (1-p)p(1-p) \binom{7}{5} p^5(1-p)^2.$$

$$P_A(B') = \frac{21p^6(1-p)^4}{210p^6(1-p)^4} = \frac{1}{10}.$$

39 • R est l'événement « un lot est remboursable ».

$$p(R) = 1 - (0,992)^{12} - 12(0,992)^{11} \times 0,008 \approx 0,004.$$

« Un seul lot sur les trois est remboursable » a pour probabilité : $3 \times (0,004) \times (0,996)^2 \approx 0,012$.

40 • On désigne par p_3 la probabilité pour un trimoteur et p_5 pour un cinq moteurs de terminer leur vol.

$$p_3 = p^3 + 3p^2(1-p);$$

$$p_5 = p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2;$$

$$p_3 - p_5 = p^3 + 3p^2(1-p) - p^5 - 5p^4(1-p) - 10p^3(1-p)^2$$

$$= p^2(p-1)^2(3-6p).$$

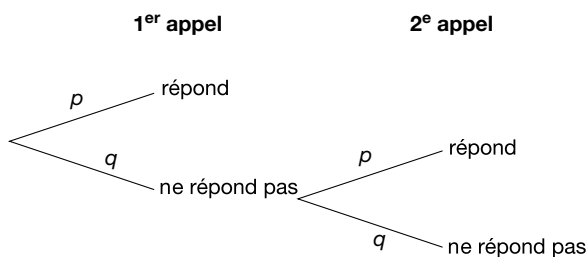
$$\text{Donc } p_3 \leq p_5 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}.$$

41 • 1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p .

Donc : $p(X = 0) = (1 - p)^3 = q^3$;
 $p(X = 1) = 3(1 - p)^2 p = 3q^2 p$;
 $p(X = 2) = 3(1 - p) p^2 = 3q p^2$ et $p(X = 3) = p^3$.

2. • Un arbre permettrait la visualisation des valeurs de Y conditionnées par celles de X. C'est un procédé long. Chaque probabilité est obtenue par des formules du type : $p(Y = 0) = p(X = 0 \text{ et } Y = 0) + p(X = 1 \text{ et } Y = 0) + p(X = 2 \text{ et } Y = 0)$.

Il vaut mieux renoncer, mais on arrive au résultat.
 • Il faut faire un arbre : pour un correspondant, il y a deux possibilités au premier appel, puis éventuellement deux autres au deuxième appel.



Ainsi, la probabilité qu'un correspondant réponde au second appel est pq .

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et pq , d'où la loi de Y.

y_i	0	1	2	3
$p(Y = y_i)$	$(1 - pq)^3$	$3(1 - pq)^2 pq$	$3(1 - pq)(pq)^2$	$(pq)^3$

Remarque : $1 - pq = q + p^2$.

3. a) Le problème est de connaître la probabilité qu'un correspondant réponde au premier ou au second appel.

Or, la probabilité qu'un correspondant réponde au premier ou au second appel est :

$$p + pq = p(1 + q) = (1 - q)(1 + q) = 1 - q^2.$$

Ce qui permet de répondre à la question.

b) Les formules donnent :

$$E(X) = 3p = 1; E(Y) = 3pq = \frac{2}{3}; E(Z) = 3(1 - q^2) = \frac{5}{3}.$$

On peut remarquer que $E(X) + E(Y) = E(Z)$.

c) $P(Z = 3) > 0,5 \Leftrightarrow (1 - q^2)^3 > 0,5 \Leftrightarrow 1 - q^2 > \sqrt[3]{0,5}$

$$\Leftrightarrow q < \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}}$$

$$P(Z = 3) > 0,5 \Leftrightarrow (1 - p) < \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}}$$

$$\Leftrightarrow p > 1 - \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,5}}.$$

D'où la valeur cherchée : $p_{\text{mini}} \approx 0,55$.

42 • 1. Loi de X_i

k	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p = q$	p

2. a) $X = \sum_{i=1}^n X_i$ prend les valeurs 0, 1, 2, ..., n.

b) Chaque X_i prend la valeur 1 lorsque S est réalisé à la $i^{\text{ème}}$ épreuve, 0 sinon, donc leur somme indique le nombre de succès sur les n épreuves. (Les X_i servent de « compteur »).

c) X suit une loi $\mathcal{B}(n; p)$. $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$.

Note : on a prouvé le résultat donné dans le cours p. 290.

43 • 1. X suit une loi $\mathcal{B}\left(30; \frac{1}{3}\right)$.

2. Tableau de valeurs.

k	$P(X = k)$	$P(X < k)$
0	5,2151E-06	5,2151E-06
1	7,82264E-05	8,34415E-05
2	0,000567142	0,000650583
3	0,002646661	0,003297244
4	0,00893248	0,012229724
5	0,023224448	0,035454172
6	0,048384267	0,083838438
7	0,082944457	0,166782896
8	0,119232657	0,286015553
9	0,145728803	0,431744356
10	0,153015243	0,584759599
11	0,139104767	0,723864365
12	0,110124607	0,833988972
13	0,076240112	0,910229085
14	0,04628864	0,956517724
15	0,024687275	0,981204999
16	0,011572216	0,992777159
17	0,004765007	0,997542166
18	0,001720697	0,999262863
19	0,000543378	0,999806241
20	0,000149429	0,99995567
21	3,55783E-05	0,999991248
22	7,27738E-06	0,999998525
23	1,26563E-06	0,999999791
24	1,84571E-07	0,99999976
25	2,21486E-08	0,99999998
26	2,12967E-09	1
27	1,57753E-10	1
28	8,45107E-12	1
29	2,91416E-13	1
30	4,85694E-15	1

3. $m = E(X) = 30 \times \frac{1}{3} = 10$.

$P(X = k)$ maximale pour $k = 10$.

44 • La probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{3}$ ($\frac{1}{3}$ pour une face blanche).

1. Il faut B B B B N, d'où la probabilité : $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^5}$.

2. $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$.

3. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$; $p = \frac{2}{3}$, d'où :

$P(X = k) = \binom{5}{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ pour $k = 0, 1, \dots, 5$.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

45 • 1. a) Deux feux verts :

$0,75 \times 0,5 = 0,375 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

b) $1 - 0,25 \times 0,5 = 1 - 0,125 = 0,875 = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$.

2. X suit la loi binomiale de paramètres :

$n = 5$ et $p = 0,75 = \frac{3}{4}$.

D'où $P(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,75)^k \times 0,25^{5-k}$; $k = 0, \dots, 5$.

• $P(X = 0) = \frac{1}{1\,024}$; • $P(X = 1) = \frac{15}{1\,024}$;

• $P(X = 2) = \frac{45}{512}$; • $P(X = 3) = \frac{135}{512}$;

• $P(X = 4) = \frac{405}{1\,024}$; • $P(X = 5) = \frac{243}{1\,024}$.

46 • A. 1. $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{21}$.

2. $P(E_1) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{28}$; $P(E_2) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{20}{21}$.

3.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

B. 1. $\binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{21}\right)^2 \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 \approx 0,02$.

2. On est amené à résoudre : $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n > 0,95$,

soit $n > \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)}$..., d'où $n_0 = 62$.

47 • 1. Remplir une grille de loto-foot est une expérience de Bernoulli d'ordre 13 dont l'épreuve est définie par S « bon pronostic pour un match » de probabilité $p = \frac{1}{3}$. Ainsi N suit une loi $\mathcal{B}\left(13 ; \frac{1}{3}\right)$.

2. $P(G) = \sum_{k=10}^{13} P(N = k)$
 $= \binom{13}{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{13}{11} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$
 $+ \binom{13}{12} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{13}$
 $\approx 0,0016$

48 • 1. $a + b$ ne prend jamais la valeur -4 donc $a + b + 4 \neq 0$. Ainsi G existe.

2. Ω : ensemble des trente couples de jetons. Tous les couples sont équiprobables.

a) E_1 signifie que $a = 0$. $P(E_1) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

E_2 signifie que $a = 0$ et $b \geq 0$ (du signe de 4).

$P(E_2) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

b) E_3 signifie que a et b sont strictement positifs (du signe de 4).

$P(E_3) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

3. a) X suit une loi $\mathcal{B}\left(n ; \frac{2}{5}\right)$.

$E(X) = 4 \Leftrightarrow \frac{2n}{5} = 4 \Leftrightarrow n = 10$.

b) I : « au moins un des barycentres est strictement intérieur à ABC ».

$P(I) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

$P(I) > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0,001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,001}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$.
Ainsi $n_0 = 14$.

49 • 1. a) A : « les douze groupes sont présents un jour donné ». $P(A) = \left(\frac{7}{8}\right)^{12}$ d'où $0,20 < P(A) < 0,21$.

b) La répétition 30 fois de l'épreuve de Bernoulli définie par l'événement \bar{A} « les douze groupes ne se présentent pas tous un jour donné », de probabilité $p \approx 0,8$, de façon indépendante, définit une expérience de Bernoulli d'ordre 30.

« X = 30 » signifie que chaque jour du mois, les douze groupes ne sont pas tous présents au départ.

« X = 0 » signifie que durant le mois, douze groupes sont toujours présents au départ.

Ainsi X suit une loi $\mathcal{B}(30 ; p)$. $E(X) = 30p \approx 2,4$. Sur une grande série de telles expériences, indépendantes, la moyenne des jours où les douze groupes ne se sont pas présentés durant un mois est 2,4.

c) « S = 11 » signifie que 11 groupes sont présents ce jour-là. $P(S = 11) = \binom{12}{1} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{11} \times \frac{1}{8} \approx 0,35$.

S suit une loi $\mathcal{B}\left(12; \frac{7}{8}\right)$ donc

$$E(X) = 12 \times \frac{7}{8} = 10,5 \text{ (crédits).}$$

2. a) $p_{13} = \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 0,18$.

b) Loi de R.

k	2	0
P(R = k)	p_{13}	$1 - p_{13}$

Note : $\frac{1}{2}$ R suit une loi de Bernoulli.

$$E(R) = 2p_{13} \approx 0,36.$$

c) G : variable aléatoire donnant le gain journalier. Notons N la variable aléatoire donnant le nombre de groupes présents un jour donné.

N suit une loi $\mathcal{B}\left(13; \frac{7}{8}\right)$.

Chaque groupe présent apporte un crédit et le coût de l'activité de substitution est R donc $G = N - R$. Ainsi $E(G) = E(N) - E(R)$.

$$\text{D'où } E(G) = \sum_{k=0}^{13} kP(N=k) - 2p_{13}$$

$$\text{soit } E(G) = \sum_{k=0}^{13} k \binom{13}{k} \times \left(\frac{7}{8}\right)^k \times \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k} - 2p_{13}.$$

$$E(G) = 13 \times \frac{7}{8} - 2\left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 11,02 \text{ (crédits).}$$

d) L'espérance de gain a augmenté donc la décision est rentable.

Lois continues

50 a) f positive sur \mathbb{R} , f continue sur \mathbb{R} sauf en 1 et pour tout $b \geq 1$,

$$\int_1^b f(x) dx = \int_1^b \frac{3}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{x^3} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b^3}.$$

$$\text{D'où } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = 1.$$

Ainsi f définit une densité de probabilité.

b) f positive et continue sur \mathbb{R} et pour tout $b \geq 0$,

$$\int_1^b f(x) dx = \int_0^b xe^{-x} dx = 1 - e^{-b} - be^{-b} \text{ (intégration par parties).}$$

$$\text{D'où } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = 1.$$

Ainsi f définit une densité de probabilité.

51 A : durée d'attente en min ; T : temps écoulé en min entre 10 h et l'arrivée du bus.

1. $P(A \geq 10) = P(T \geq 10) = \frac{30-10}{30} = \frac{2}{3}$.

2. L'événement « T \geq 15 » est réalisé. Dire que l'attente dure au moins 10 min supplémentaires signifie « T \geq 25 ».

On cherche la probabilité conditionnelle

$$P(T \geq 25 / T \geq 15) = \frac{P(T \geq 25 \text{ et } T \geq 15)}{P(T \geq 15)}.$$

$$\text{Or } P(T \geq 25 \text{ et } T \geq 15) = P(T \geq 25) = \frac{30-25}{30} = \frac{1}{6}$$

$$\text{et } P(T \geq 15) = \frac{1}{2} \text{ donc } P(T \geq 25 / T \geq 15) = \frac{1}{3}.$$

52 Corrigé dans le manuel.

53 1. Aire(ABM) = t^2 d'où

$$P(S \leq 0,25) = P(t^2 \leq 0,25) = P(-0,5 \leq t \leq 0,5) = \frac{1}{2}.$$

$$P(S > 0,5) = P\left(t^2 > \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(-1 \leq t < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1\right)$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P(S = 1) = P(t^2 = 1) = P(t = -1 \text{ ou } t = 1) = 0.$$

2. Pour $\tau \geq 0$, $P(S \leq \tau) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(t^2 \leq \tau) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow P(-\sqrt{\tau} \leq t \leq \sqrt{\tau}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{1}{4}.$$

54 1. $P(T \leq 70) = 1 - e^{-\lambda \times 70}$, d'où :

$$1 - e^{-\lambda \times 70} = 0,05 \Leftrightarrow e^{-\lambda \times 70} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,95}{70} (\approx 0,000733).$$

2. $P(T > 30) = e^{-\frac{\ln 0,95}{70} \times 30} \approx 0,978$.

55 1. a) $P(X < 1000) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5568} \times 1000} \approx 0,117$.

b) On écrit que $1 - e^{-\frac{\ln 2}{5568} \times x} = 0,2$ soit $x \approx 1792,5$ années.

2. a) $P(T < 1000) = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 1000} \approx 1$.

b) On écrit que $1 - e^{-\frac{\ln 2}{30} \times t} = 0,2$ soit $t \approx 9,66$ années.

56 1. T : temps de réparation en h.

$$P(T \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-1} \approx 0,368.$$

2. T est sans mémoire :

$$P(T \geq 10 / T \geq 9) = P(T \geq 1) = e^{-\lambda} = e^{-0,5} \approx 0,606.$$

57 Corrigé dans le manuel.

58 • 1. Le système a une durée de vie inférieure à t si et seulement si les deux composants ont une durée de vie inférieure à t :

$$P(T \leq t) = P(T_1 \leq t) \times P(T_2 \leq t).$$

2. $P(T \leq t) = (1 - e^{-\lambda t}) \times (1 - e^{-\lambda t}) = (1 - e^{-\lambda t})^2.$

3. $P(T > 365) = 1 - P(T \leq 365) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 365})^2.$
 $\approx 0,00135.$

4. $p(T' \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^3$, d'où :

$$p(T' > 365) = 1 - (1 - e^{-\lambda \times 365})^3 \approx 0,002.$$

59 • 1. $P(X > 10) = 0,286 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0,286$
 $\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,286}{10}.$

Ainsi $\lambda \approx 0,125.$

2. $P(X \leq 0,5) = 1 - e^{-0,5\lambda} \approx 0,061.$

3. La loi de X est sans mémoire donc
 $P(T \geq 10 / T \geq 8) = P(X \geq 2) = e^{-2\lambda} \approx 0,779.$

4. A : au moins un appareil a une durée de vie supérieure à 10 ans.

$$P(A) = 1 - [P(X \leq 10)]^{15} = 1 - (1 - 0,286)^{15} \approx 0,994.$$

5. On cherche l'entier n tel que $1 - (1 - 0,286)^n \geq 0,999.$

D'où $n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,714}$ donc $n_0 = 21.$

60 • 1. a) $P(50 \leq D \leq 100) = e^{-50\lambda} - e^{-100\lambda} \approx 0,248.$

b) $P(D \geq 300) = e^{-300\lambda} \approx 0,026.$

2. D est sans mémoire donc

$$P(T \geq 375 / T \geq 350) = P(X \geq 25) = e^{-25\lambda} \approx 0,737.$$

3. a) Par intégration par parties

$$I(A) = \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = -Ae^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}$$

soit $I(A) = 82 - 82e^{-\frac{A}{82}} - Ae^{-\frac{A}{82}}.$

b) $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\frac{A}{82}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} Ae^{-\frac{A}{82}} = 0$ donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = 82.$$

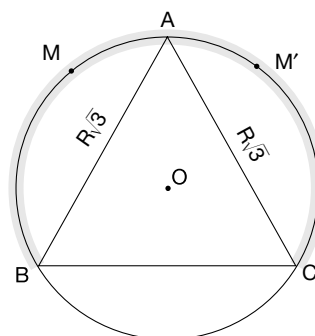
Note : Cette distance moyenne n'est autre que $E(D) = \frac{1}{\lambda}$ (espérance d'une variable aléatoire de type exponentiel).

4. a) X_d traduit le nombre de réalisations de S lors de la répétition de N_0 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes associées à S « l'autocar ne subit aucun incident pendant d km » de probabilité $p = P(D \geq d) = e^{-\lambda d}.$

Donc X_d suit une loi $\mathcal{B}(N_0; e^{-\lambda d}).$

b) $E(X_d) = N_0 e^{-\lambda d}.$

61 • 1. a) M doit être sur les arcs $[\widehat{AB}]$ ou $[\widehat{AC}]$.

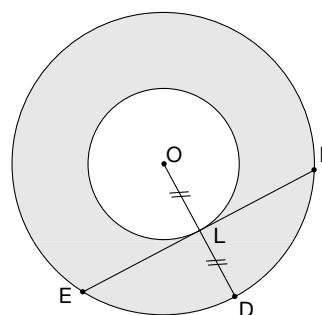


b) D'où la probabilité : $P = \frac{2}{3}.$

2. Si $EF = R\sqrt{3}$, L est le milieu du rayon $[OD]$.

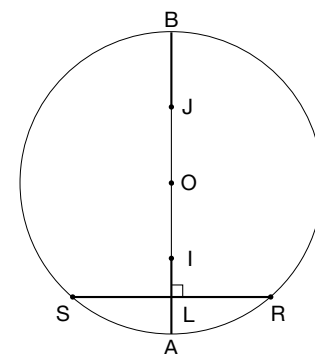
Pour que $0 \leq X \leq R\sqrt{3}$, il faut et il suffit que L soit à l'extérieur du cercle de rayon $\frac{R}{2}.$

$$\text{Donc } P' = \frac{\text{aire de la couronne}}{\text{aire du disque de rayon } R} = \frac{3}{4}.$$



3. Notons $[AB]$ le diamètre tel que $\vec{AB} \perp \vec{SR}$. Soit L' le milieu de la corde. $0 \leq X \leq R\sqrt{3}$ si et seulement si $L' \in [AI] \cup [BJ].$

$$\text{Donc } P'' = \frac{1}{2}$$



Prendre toutes les initiatives

62 Notons $p = P(D) = 0,01.$

A : « le paquet contient au moins deux objets défectueux ».

\bar{A} : « le paquet contient aucun ou un objet défectueux ».

$$P(\bar{A}) = 0,99^{10} + 10 \times 0,01 \times 0,99^9.$$

Ainsi $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,0043$.

$P(A) < 0,01$ donc la proposition est réaliste.

63 Non ! X : partie entière du réel choisi.

$P(X = 10) = 0$ et pour tout k de $\{1; 2; 3; \dots; 9\}$,

$$P(X = k) = \frac{\text{longueur } [k; k+1[}{\text{longueur de } [1; 10]} = \frac{1}{9}.$$

64 • $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = \frac{1}{5}$.

X : nombre de moteurs n'ayant pas d'incident durant les deux premières années.

X suit une loi $\mathcal{B}(100; p)$ avec $p = P(T \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-\frac{2}{5}}$.

Le nombre cherché est $E(X) = 100p = 100e^{-\frac{2}{5}} \approx 67$.

65 • N : Note obtenue.

La note est égale au nombre de réponses justes sur les dix. Ainsi N suit une loi $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$.

$$P(N \geq 5) = 1 - P(N \leq 4)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \approx 0,0781.$$

66 • N : Note obtenue.

X : nombre de réponses justes ;

X suit une loi $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$.

$$N = X - 0,5(10 - X) = 1,5X - 5.$$

$$N \geq 5 \Leftrightarrow 1,5X - 5 \geq 5 \Leftrightarrow X \geq \frac{20}{3}.$$

Puisque X ne prend que des valeurs entières $N \geq 5$ signifie $X \geq 7$.

$$P(N \geq 5) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \approx 0,0035.$$

Note : Il a 22 fois moins de chances « d'avoir la moyenne » qu'avec le protocole du 65.

67 • X : nombre de « Face » durant les n lancers,

X suit une loi $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

A : obtenir un nombre impair de « Face ».

Notons I l'ensemble des entiers impairs inférieurs ou égaux à n .

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i \in I} P(X = i) = \sum_{i \in I} \binom{n}{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left[\sum_{i \in I} \binom{n}{i} \right]. \quad [1] \end{aligned}$$

Or d'après la formule du binôme

$$\begin{aligned} (1-1)^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \\ &\quad + (-1)^n \binom{n}{n} \end{aligned}$$

donc en séparant les termes d'indices pairs et impairs,

$$0 = \sum_{j \in \bar{I}} \binom{n}{j} - \sum_{i \in I} \binom{n}{i} \text{ d'où } \sum_{i \in I} \binom{n}{i} = \sum_{j \in \bar{I}} \binom{n}{j}$$

La somme de toutes les combinaisons vaut 2^n d'où

$$\sum_{i \in I} \binom{n}{i} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}. \text{ Ainsi d'après [1], } P(A) = \frac{1}{2}.$$

Note : Un calcul direct à partir du développement de $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^n$ par la formule du binôme est aussi possible.

Problèmes

(page 313)

68 • 1. • $P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{38}$ (0,079);

• $P(B) = 1 - \frac{\binom{14}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{99}{190}$ (0,521);

• $P(C) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{9}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{61}{190}$ (0,321).

2. $P_{\bar{C}}(B) = p \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{6 \times 14}{190} \times \frac{190}{129} = \frac{28}{43}$ (0,651).

3. • $P(E_0) = \left(\frac{129}{190}\right)^3 \approx 0,313$;

• $P(E_1) = 3 \times \left(\frac{61}{190}\right) \times \left(\frac{129}{190}\right)^2 \approx 0,444$;

• $P(E_2) = 3 \times \left(\frac{61}{190}\right)^2 \times \left(\frac{129}{190}\right) \approx 0,210$;

• $P(E_3) = \left(\frac{61}{190}\right)^3 \approx 0,033$.

69 • 1. $E(S_n) = np = 10$ donc $p = \frac{10}{n}$.

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{10}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

2. a) $P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{10}{n}\right)^n$ donc

$$\ln[P(S_n = 0)] = n \ln\left(1 - \frac{10}{n}\right) = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}$$

Posons $u = -\frac{10}{n}$ d'où $\ln(P(S_n = 0)) = -10 \times \frac{\ln(1+u)}{u}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P(S_n = 0)) = -10.$$

La fonction exp est continue en -10 donc

$$P(S_n = 0) = e^{-10}.$$

$$\text{b) } P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$$

$$= \binom{n}{k} \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1} \times \left(\frac{10}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n-k}{k+1} \times \frac{10}{n\left(1 - \frac{10}{n}\right)} \times \left(\frac{10}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k-1}$$

$$= \binom{n}{k+1} \times \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \times \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-(k+1)}$$

$$\text{donc } P(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1} = P(S_n = k+1).$$

c) k est fixé ;

supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \times \frac{10^k}{k!}$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-k}{n-10} = 1$ et d'après l'égalité du 2. b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k+1) = \frac{10}{k+1} \times e^{-10} \times \frac{10^k}{k!} \text{ soit}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k+1) = e^{-10} \times \frac{10^{k+1}}{(k+1)!}.$$

d) Récurrence immédiate : la propriété est vraie au rang 0 (voir 2. a)) et si elle est vraie au rang k , elle se transmet au rang $k+1$ (voir 2. b)).

3. $P(S_n \geq 3) = 1 - P(S_n \leq 2)$.

$$\text{D'où } P(S_n \geq 3) = 1 - e^{-10} \left(1 + \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!}\right)$$

$$= 1 - 61e^{-10} \approx 0,9972.$$

70 • 1. $P(X = k) = \binom{50}{k} \left(\frac{20}{N}\right)^k \left(\frac{N-20}{N}\right)^{50-k}$.

$$2. f'(x) = 2 \left(\frac{20}{x^2}\right) \left(\frac{20}{x}\right)^3 \left(1 - \frac{20}{x}\right)^{45} \left(-2 + \frac{25 \times 20}{x}\right).$$

D'où un maximum pour $x = 250$.

3. a) $N = 250$ (maximum de vraisemblance).

b) La proportion : $\frac{20}{N} = \frac{4}{50}$, soit $N = 250$.

C'est nouveau au bac (page 314)

71 • 1. a), d) $P(T < t) = P(T \geq t)$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

2. a) $P(T < 1) = 0,18 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda} = 0,18$
 $\Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,82$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\ln\left(\frac{41}{50}\right) = \ln\left(\frac{50}{41}\right)$$

$$= \ln 2 + 2 \ln 5 - \ln 41.$$

3. a), d) T est sans mémoire donc

$$P(T \geq 3 / T \geq 2) = P(T \geq 1) = e^{-\lambda}.$$

4. d) Par intégration par parties

$$I(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{d'où } E(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Ainsi } E(T) = \frac{1}{0,2} = 5.$$

72 • 1. Vrai. N : nombre de « Face ». N suit une loi

$$\mathcal{B}\left(20; \frac{1}{2}\right).$$

$$P(N = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20};$$

$$P(N = 15) = \binom{20}{15} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5;$$

or $\binom{20}{5} = \binom{20}{15}$ d'où le résultat.

2. Faux. De même $P(N = 5) = \binom{20}{5} \times 0,6^5 \times 0,4^{15}$ et

$$P(N = 15) = \binom{20}{15} \times 0,6^{15} \times 0,4^5 \text{ donc}$$

$$P(N = 5) \neq P(N = 15).$$

3. Faux. X : nombre de réponses justes. X suit une loi

$$\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{3}\right).$$

$$P(X \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^4 P(X = k)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k} \approx 0,21.$$

4. **Vrai.** X suit une loi $\mathcal{B}\left(4k; \frac{3}{4}\right)$ donc

$$E(X) = 4k \times \frac{3}{4} = 3k.$$

5. **Faux.** A : « tirer au moins une vis défectueuse ».

$$P(A) = 1 - 0,99^n.$$

$$P(A) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,99^n > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 0,99^n < 0,01$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,99}.$$

D'où $n \geq 459$.

Note : on peut aussi tester la valeur 100.

$$\text{Pour } n = 100, P(A) = 1 - 0,99^{100} \approx 0,634.$$

73 • 1. Par définition, pour tout $t \geq 0$,

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$\text{D'où } P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = e^{-\lambda t}.$$

Pour tout $t \geq 0, h \geq 0$,

$$P(T \geq t+h / T \geq t) = \frac{P((T \geq t+h) \text{ et } (T \geq t))}{P(T \geq t)}$$

$$= \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

Ainsi T est une loi « sans vieillissement ».

2. Application :

$$\text{a) } P(T \geq 400 / T \geq 200) = P(T \geq 200)$$

$$= 1 - P(T < 200) = 0,5.$$

$$\text{b) } P(200 \leq T \leq 400)$$

$$= P((T \geq 200) \cap (T \leq 400))$$

$$= P(T \geq 200) \times P(T \leq 400 / T \geq 200).$$

$$\text{Or } P(T \leq 400 / T \geq 200) = 1 - P(T > 400 / T \geq 200)$$

$$= 1 - 0,5 = 0,5$$

et $P(T \geq 200) = 0,5$ donc :

$$P(200 \leq T \leq 400) = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

c) Par hypothèse $P(T < 200) = \frac{1}{2}$ soit $1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

$$P(83 \leq T \leq 400) = \int_{83}^{400} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-83\lambda} - e^{-400\lambda}$$

$$\approx 0,5 \text{ (arrondi à } 10^{-4} \text{ près)}.$$

74 • 1. Par définition, pour tout $t \geq 0$,

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

$$\text{D'où } P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = e^{-\lambda t}.$$

Pour tout $t \geq 0, h \geq 0$,

$$P(T \geq t+h / T \geq t) = \frac{P((T \geq t+h) \text{ et } (T \geq t))}{P(T \geq t)}$$

$$= \frac{P(T \geq t+h)}{P(T \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

Ainsi T est une loi « sans vieillissement ».

2. Application :

$$\text{a) } P(T \geq 400 / T \geq 200) = P(T \geq 200)$$

$$= 1 - P(T < 200) = 0,5.$$

$$\text{b) } P(200 \leq T \leq 400)$$

$$= P((T \geq 200) \cap (T \leq 400))$$

$$= P(T \geq 200) \times P(T \leq 400 / T \geq 200).$$

$$\text{Or } P(T \leq 400 / T \geq 200) = 1 - P(T > 400 / T \geq 200)$$

$$= 1 - 0,5 = 0,5$$

et $P(T \geq 200) = 0,5$ donc :

$$P(200 \leq T \leq 400) = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

c) Par hypothèse $P(T < 200) = \frac{1}{2}$ soit $1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

$$P(83 \leq T \leq 400) = \int_{83}^{400} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-83\lambda} - e^{-400\lambda} \approx 0,5$$

(arrondi à 10^{-4} près).