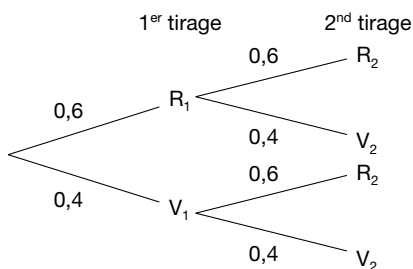




Travaux dirigés (page 265)

TD 1

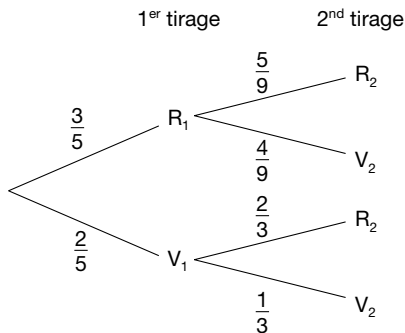
1 1. a) Arbre.



b) $p(B) = 0,6^2 + 0,4^2 = 0,52, p(D) = 1 - p(B) = 0,48.$

Note : par utilisation de l'arbre, $p(D) = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 = 0,48.$

2. a) Arbre.

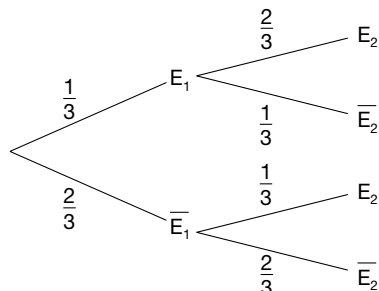


b) $p(B') = \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15},$

$p(D') = 1 - p(B') = \frac{8}{15}.$

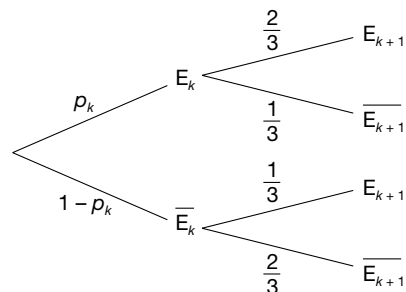
Note : par utilisation de l'arbre, $p(D') = \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$

2 1. a) Arbre.



b) $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$

2. a) Arbre.



b) $p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1-p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$

3. a) Notons H_n la proposition : « $p_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$ ».

- H_1 est vraie.
- On suppose que H_n est vraie pour un entier $n, n \geq 1.$

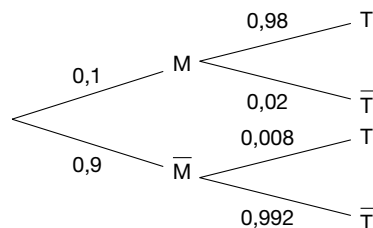
Alors $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})] + \frac{1}{3}$
 $= \frac{1}{2}[\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3}] = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^{n+1}})$

donc H_{n+1} est vraie.

- Ainsi H_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*.$
- b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}.$ Avec le processus indiqué, la probabilité de tirer une boule blanche tend vers $\frac{1}{2}.$

TD 2

2 1.



2. a) $p(M \cap T) = 0,1 \times 0,98 = 0,098.$

$p(T) = 0,1 \times 0,98 + 0,9 \times 0,008 = 0,105 2.$

b) Valeur diagnostique $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} \approx 0,932.$

3. a) $p(\overline{M} \cap T) = 0,9 \times 0,008 = 0,0072$.

b) $p(M \cap \overline{T}) = 0,1 \times 0,02 = 0,002$.

c) E : « erreur de test ».
 $p(E) = p(M \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T) = 0,0092$.

4. a) Valeur diagnostique :

$$p_T(M) = \frac{0,98x}{0,98x + 0,008(1-x)} = \frac{245x}{243x + 2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} p_T(M) = 0$.

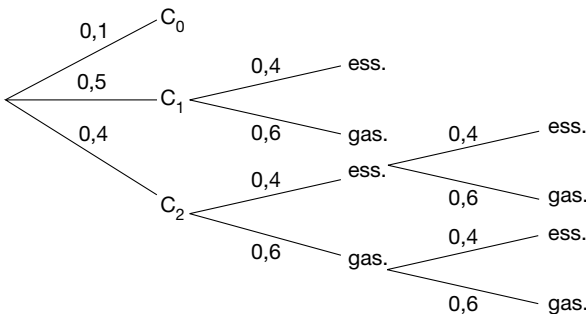
Pour $x \in]0; 1[$,

$$p_T(M) > 0,9 \Leftrightarrow x > \frac{18}{263}$$

(À partir d'un pourcentage de malades d'environ 6,85 % de la population.)

TD 3

1. a) Arbre ci-après.



b) $p(C_1 \cap E) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$.

c) $p_{C_2}(E) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 = 0,48$;
 $p(C_2 \cap E) = 0,48 \times 0,4 = 0,192$.

d) $p(E) = p(C_1 \cap E) + p(C_2 \cap E) = 0,392$.

2. a) Les valeurs de Y sont : 0, 1, 2.

Y = y_i	0	1	2
p(Y = y_i)	0,544	0,392	0,064

X \ Y	0	1	2	loi de X
0	0,1	0	0	0,1
1	0,3	0,2	0	0,5
2	0,144	0,192	0,064	0,4
loi de Y	0,544	0,392	0,064	1

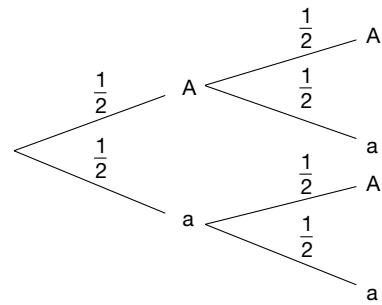
d) Il n'y a pas indépendance. Par exemple,

$p(X=0 \text{ et } Y=1) = 0$,

alors que $p(X=0) \times p(Y=1) \neq 0$.

TD 4

1



$p(AA) = \frac{1}{4} = p(aa); p(Aa) = \frac{1}{2}$.

2 1. $x_0 = 0; y_0 = 1; z_0 = 0$.

2. $x_1 = \frac{1}{4}; y_1 = \frac{1}{2}; z_1 = \frac{1}{4}$.

3. $p_{(AA)_n}((AA)_{n+1}) = 1; p_{(Aa)_n}((AA)_{n+1}) = \frac{1}{4};$
 $p_{(Aa)_n}((Aa)_{n+1}) = \frac{1}{2}$.

Donc :

• $x_{n+1} = p((AA)_{n+1}) = p((AA)_n) \times 1 + p((Aa)_n) \times \frac{1}{4} = x_n + \frac{1}{4}y_n;$

• $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n;$

• $z_{n+1} = 1 - (x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2}y_n) = 1 - x_n - \frac{3}{4}y_n.$

3 1.

n	x _n	y _n	z _n
0	0	1	0
1	0,25	0,5	0,25
2	0,375	0,25	0,375
3	0,4375	0,125	0,4375
4	0,46875	0,0625	0,46875
5	0,484375	0,03125	0,484375
6	0,4921875	0,015625	0,4921875
7	0,49609375	0,0078125	0,49609375
8	0,49804688	0,00390625	0,49804688
9	0,49902344	0,00195313	0,49902342
10	0,49951172	0,00097656	0,49951171

2. (y_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$;

$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. $x_n - x_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{1}{4} y_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{1}{2}$.



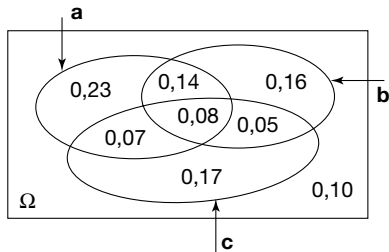
Corrigés des exercices

Maîtriser le cours

(page 269)

1. Rappels sur les probabilités

1 Ω : ensemble des élèves de TS du lycée.



a) $p_1 = 0,56$.

b) $p_2 = 0,1$.

2 Ω : ensemble des listes avec répétitions de 4 éléments de $\{-1; +1\}$ d'où $2^4 = 16$ issues possibles.

a) $\binom{4}{2} = 6$ issues favorables (tableaux avec deux +1 et deux -1) d'où $p_1 = \frac{3}{8}$.

b) Deux choix pour la case 1 puis un seul choix pour les trois autres, d'où 2 issues favorables, $p_2 = \frac{1}{8}$.

3 1. Ω = ensemble des listes de 4 éléments distincts de l'ensemble des six boules.

$$p(A) = \frac{2 \times 4 \times 1 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{15};$$

$$p(B) = \frac{(4 \times 2) \times (4 \times 3 \times 2)}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

Note : pour une issue de B, on choisit la case contenant la boule blanche (4 choix), on y place une boule blanche (2 possibilités) puis on complète les trois autres cases par des boules noires ($4 \times 3 \times 2$ possibilités).

2. Ω : ensemble des listes avec répétitions de 4 éléments de l'ensemble des six boules.

$$p(A) = \frac{2^2 \times 4^2}{6^4} = \frac{4}{81}; p(B) = \frac{(4 \times 2) \times 4^3}{6^4} = \frac{32}{81}.$$

4 1. Ω : ensemble des combinaisons de deux boules parmi neuf.

$$p(R) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}; p(C) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{18}.$$

2. Ω : ensemble des listes avec répétitions de 2 éléments de l'ensemble des neuf boules.

$$p(R) = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}; p(C) = \frac{4^2 + 2^2 + 3^2}{9^2} = \frac{29}{81}.$$

5 Corrigé dans le manuel.

6 Ω : ensemble des combinaisons de trois cartes parmi trente-deux.

$$a) p_1 = \frac{4 \times \binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{7}{155}.$$

$$b) p_2 = \frac{8 \binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{1}{155}.$$

7 Ω : ensemble des listes de 3 éléments distincts de l'ensemble des vingt chevaux.

$$1. p_1 = \frac{1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{6840}.$$

$$2. p_2 = \frac{3! - 1}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{1368}.$$

8 1. a) Loi de X

x_i	80	50	0	-10a
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

2. a) $E(X) = 0 \Leftrightarrow 12 - 6a = 0$
 $\Leftrightarrow a = 2$.

b) $a > 2$ (en €).

9 1. Loi de N

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(N = k)$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{6}{2^6}$	$\frac{15}{2^6}$	$\frac{20}{2^6}$	$\frac{15}{2^6}$	$\frac{6}{2^6}$	$\frac{1}{2^6}$

2. $E(X) = 3; \sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

10 Ω : ensemble des combinaisons de trois boules parmi dix.

$$1. p(A) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}; p(B) = \frac{5 \times 3 \times 2}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{4}.$$

2. a) Loi de X

k	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{1}{4}$

b) $E(X) = \frac{259}{120} \approx 2,16$.

2. et 3. Probabilités conditionnelles

11 1. Immédiat en utilisant la loi des nœuds.

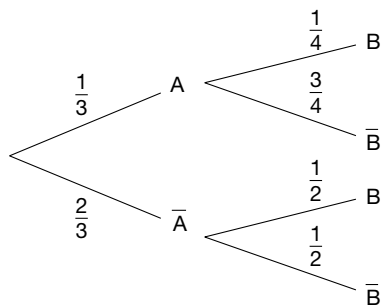
$$2. p(A \cap B) = \frac{1}{12}; p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}; p(\bar{A} \cap B) = \frac{4}{15};$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{2}{5}.$$

12 $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1}{5}; p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2}{5}.$

13 Corrigé dans le manuel.

14 L'arbre s'impose, on le complète au fur et à mesure :



D'où $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

15 L'arbre permet de donner toutes les réponses (on peut aussi utiliser les formules).

1. $p_A(B) = \frac{4}{5}; p_B(A) = \frac{8}{15}.$

2. $p(A \cup B) = \frac{17}{20};$

$$p_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B})}{p(\bar{A})} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(A)} = \frac{3}{20} \times 2 = \frac{3}{10}.$$

16 1. Tableau de la commande

	D	\bar{D}	total
A	48	1 152	1 200
B	24	776	800
total	72	1 928	2 000

2. a) $p(D) = \frac{72}{2\,000} = 0,036; p(A \cap D) = \frac{48}{2\,000} = 0,024$

$; p_D(A) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}.$

b) $p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 0,964; p(\bar{D} \cap B) = \frac{776}{2\,000} = 0,388;$

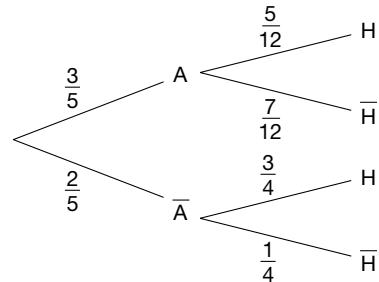
$p_{\bar{D}}(B) = \frac{776}{1\,928} = \frac{97}{241}.$

17 1. $p(A) = \frac{3}{5}, p(H) = \frac{275}{500} = \frac{11}{20},$

$p_A(H) = \frac{125}{300} = \frac{5}{12}, p_H(A) = \frac{125}{275} = \frac{5}{11}.$

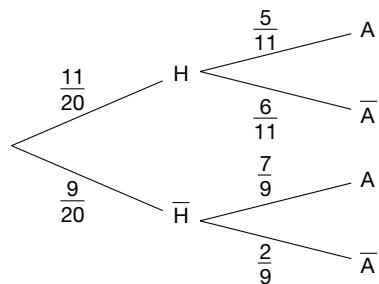
2. Arbre 1

Note : $p_{\bar{A}}(H) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}.$

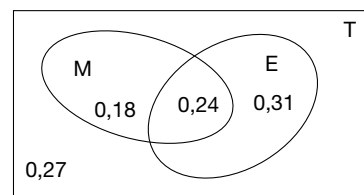


3. Arbre 2

Note : $p_{\bar{H}}(A) = \frac{175}{225} = \frac{7}{9}.$



18 L'univers est l'ensemble T des élèves de terminale et il y a équiprobabilité.



1. $p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E)$

$1 - 0,27 = 0,42 + 0,55 - p(M \cap E)$

d'où $p(M \cap E) = 0,24.$

2. a) $p_M(E) = \frac{p(M \cap E)}{p(M)} = \frac{4}{7}.$

b) $p_E(M) = \frac{p(M \cap E)}{p(E)} = \frac{24}{55}.$

19 Ω : ensemble de la population. Il y a équiprobabilité.

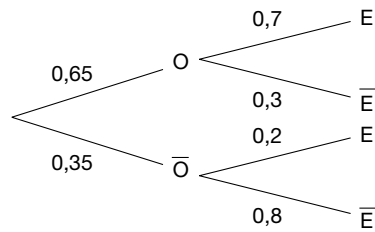
Notons O : « la personne est opposée à la construction du barrage ».

E : « la personne est écologiste ».

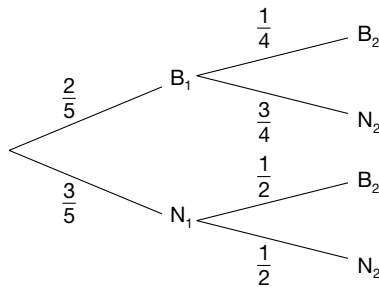
1. $p(O \cap E) = p(O) \times p_O(E) = 0,65 \times 0,7 = 0,455.$

2. $p(\bar{O} \cap E) = p(\bar{O}) \times p_{\bar{O}}(E) = 0,35 \times 0,2 = 0,07.$

3. $p(E) = p(O \cap E) + p(\bar{O} \cap E) = 0,525.$



20 1. et 2. Arbre



3. a) $p(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

b) $p(N_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

c) A : « tirage d'une boule blanche et d'une noire ».

$$p(A) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Note : A est l'événement contraire de $(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$.

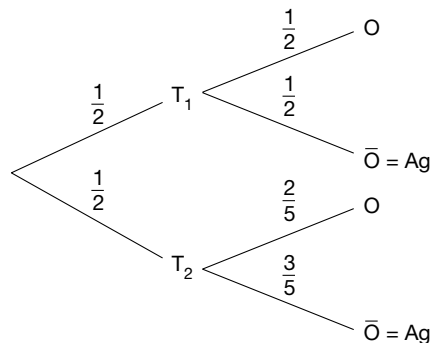
21 Ω : ensemble des combinaisons de deux boules parmi cinq. Il y a équiprobabilité des tirages.

1. $p(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$; $p(B) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$.

2. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$.

22 Corrigé dans le manuel.

23 1.



2. $p(O \cap T_1) = \frac{1}{4}$; $p(O \cap T_2) = \frac{1}{5}$.

3. $p(O) = p(O \cap T_1) + p(O \cap T_2) = \frac{9}{20}$.

4. $p_{O(T_1)} = \frac{p(O \cap T_1)}{p(O)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{4} \times \frac{20}{9} = \frac{5}{9}$.

24 1. $p(F \cap S) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$;

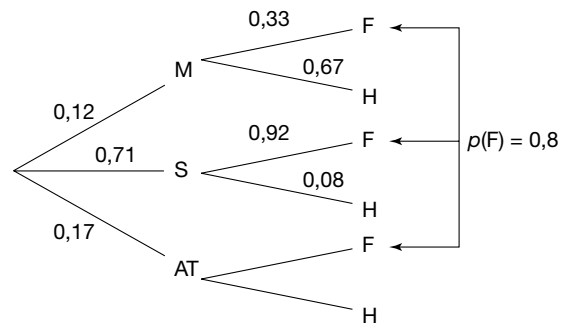
$p(F \cap M) = 0,12 \times 0,33 = 0,0396$.

2. a) D'après la formule des probabilités totales

$$p(F \cap M) + p(F \cap S) + p(F \cap AT) = p(F)$$

d'où $p(F \cap AT) = p(F) - p(F \cap M) - p(F \cap S)$
 $p(F \cap AT) = 0,8 - 0,0396 - 0,6532 = 0,1072$.

b) $p_{AT}(F) = \frac{p(F \cap AT)}{p(AT)} = \frac{0,1072}{0,17} \approx 0,63$.



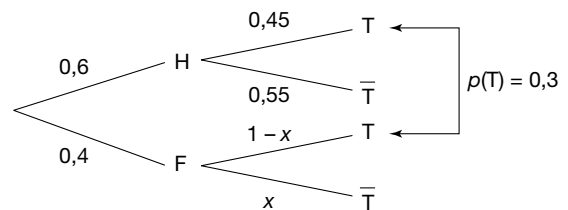
25 Un arbre permet de répondre à la question.

Notons $x = p_F(\bar{T})$ la probabilité cherchée.

D'après la formule des probabilités totales

$$p(H \cap T) + P(F \cap T) = P(T)$$

d'où $0,6 \times 0,45 + 0,4 \times (1 - x) = 0,3$
 donc $x = 0,925$.



4. Indépendance

26 1. $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$;

$p(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (la seule issue de $A \cap B$ est « le roi de cœur »).

2. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc A et B sont indépendants.

27 Corrigé dans le manuel.

28 • $p(A) = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$, $p(B) = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$;

$p(A \cap B) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$.

Ainsi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc A et B sont indépendants.

$$\bullet p(A \cap \bar{B}) = \frac{8}{96} = \frac{1}{12}.$$

On vérifie que $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B})$ donc A et \bar{B} sont indépendants.

$$\bullet p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{56}{96} = \frac{7}{12}.$$

On vérifie que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$ donc \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

Note : Ce résultat est général. Si A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} le sont aussi ainsi que \bar{A} et \bar{B} . (Voir n° 84.)

29 $\Omega : \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ est alors muni de la loi de probabilité :

k	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

1. a) $p(A) = \frac{4}{7}, p(B) = \frac{6}{7}; p(C) = \frac{1}{3}.$

b) $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{5}{6}.$

2. $p_A(B) \neq p(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$p(A \cap C) = \frac{4}{21}$. Ainsi $p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$ donc A et C sont indépendants.

30 On remplit en utilisant $p_{i,j} = p_i \times p_j$.

X \ Y	0	1	2	loi de X
0	0,12	0,2	0,08	0,4
1	0,06	0,1	0,04	0,2
2	0,12	0,2	0,08	0,4
loi de Y	0,3	0,5	0,2	1

31 1.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

y_j	0	1
$p(Y = y_j)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. a) $\frac{1}{32};$ b) $\frac{3}{32};$ c) $\frac{7}{32}.$

3.

X \ Y	0	1	loi de X
0	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{7}{8}$
1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$
loi de Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

4. Il y a bien indépendance.

32 Ω : ensemble des listes de 5 éléments distincts de l'ensemble des cinq boules (ensemble des permutations).

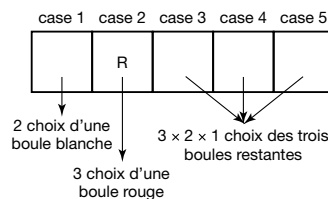
Il y a $5! = 120$ issues possibles.

1.

k	1	2
$p(X = k)$	$\frac{3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{5}$	$\frac{2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{10}$

k	3
$p(X = k)$	$\frac{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{1}{10}$

Note : la technique du remplissage de case permet de dénombrer les issues d'un événement. Par exemple : « $X = 2$ » signifie « obtenir la première boule rouge au deuxième tirage ».



k	5	4
$p(Y = k)$	$\frac{2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{2}{5}$	$\frac{3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1}{120} = \frac{3}{10}$

k	3	2
$p(Y = k)$	$\frac{3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1}{120} = \frac{1}{5}$	$\frac{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{120} = \frac{1}{10}$

Note : on peut utiliser la même technique. Il suffit de remarquer que : « $Y = k$ » signifie « obtenir la dernière boule bleue au k^{e} tirage » c'est-à-dire aussi « placer B dans la case k pour la première fois lorsqu'on remplit les cases dans l'ordre contraire ».

2. « $X = 1$ » \cap « $Y = 2$ » est impossible donc de probabilité nulle.

Ainsi $p(\text{« } X = 1 \text{ »} \cap \text{« } Y = 2 \text{ »}) \neq p(X = 1) \times p(Y = 2)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. Expériences indépendantes

33 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, or A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,63$. D'où $p(A \cup B) = 0,9 + 0,7 - 0,63 = 0,97$.

34 $p(A) = \frac{8}{32} \times \frac{8}{32} \times \frac{8}{32} = \frac{1}{64};$

$$p(B) = \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{512}.$$

C est la réunion des événements représentés par les chemins

$\rightarrow D \rightarrow R \rightarrow R; \rightarrow R \rightarrow D \rightarrow R; \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow D$

d'où $p(C) = 3 \left(\frac{4}{32} \times \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} \right) = \frac{3}{512}.$

35 a) Il y a indépendance, donc $p_1 = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

b) $p_2 = 0,15 \times 0,4 \times 0,3 = 0,018$.

c)

nombre de machines vendues			nombre de possibilités
M ₁	M ₂	M ₃	
0	0	5	3
0	1	4	6
0	2	3	6
1	1	3	3
1	2	2	3

D'où $p = 0,05 \times 0,05 \times 0,04 \times 3 + 0,05 \times 0,15 \times 0,06 \times 6 + 0,05 \times 0,4 \times 0,3 \times 6 + 0,15 \times 0,15 \times 0,3 \times 3 + 0,15 \times 0,4 \times 0,4 \times 3 = 0,13125$.

Apprendre à chercher (page 273)

36 Conditionnement : bien choisir l'arbre

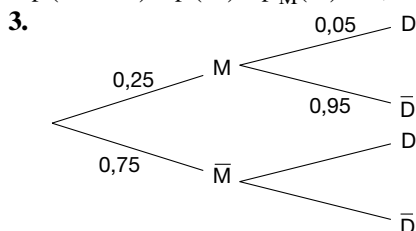
Les outils :

- Arbres pondérés.
- Probabilités conditionnelles.

Les objectifs :

- Savoir traduire des données de statistiques en probabilités.
- Savoir calculer la probabilité conditionnelle d'un événement.

2. $p(M \cap D) = p(M) \times p_M(D) = 0,0125$.



4. $p(D) = p(D \cap M) + p(D \cap \bar{M}) \Leftrightarrow 0,02 = 0,25 \times 0,05 + 0,75 p_{\bar{M}}(D)$,
soit $p_{\bar{M}}(D) = 0,01$.

37 Plusieurs lancers de dé

Les outils :

- Épreuves répétées et indépendance.

Les objectifs :

- Savoir calculer la probabilité d'un événement.

2. b) $\frac{5}{6} \bar{A} \frac{5}{6} \bar{A} \dots \bar{A} \frac{1}{6} A$

c) D'où la probabilité : $\frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5^7}{6^8}$.

Pour progresser (page 274)

Rappels sur les probabilités

38 a) $\frac{4 \times \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{44}{4165}$. b) $\frac{13 \times \binom{4}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{1}{20825}$.

c) $\frac{13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{192}{20825}$. d) $\frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{52}{4}} = \frac{36}{270725}$.

39 Il y a $\binom{49}{6}$ possibilités, une seule issue favorable :

a) $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$.

b) $\frac{\binom{6}{5} \times \binom{1}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{2330636}$.

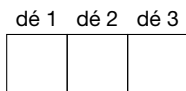
c) $\frac{\binom{6}{5} \times \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{3}{166474}$.

d) $\frac{\binom{6}{4} \times \binom{1}{1} \times \binom{42}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{15}{332948}$.

40 Le lancer simultané des trois dés peut être assimilé à trois lancers successifs d'un tel dé.

- Chaque dé a au moins une face rouge visible donc A est certain : $p(A) = 1$.
- B signifie que la face bleue est cachée pour chaque dé : $p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.
- C signifie que pour chaque dé la face cachée est bleue ou jaune : $p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Autre solution :



Ω est l'ensemble des 4^3 triplets de faces muni de la loi équirépartie.

Par exemple, C contient 2^3 issues d'où $p(C) = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8}$.

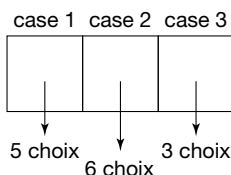
41 Corrigé dans le manuel.

42 Ω : ensemble des listes de lettres distinctes de $\{A, D, M, N, O, R, Y\}$ muni de la loi équirépartie.

1. $p_1 = \frac{1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{210}$.

2. Les issues favorables peuvent être obtenues en remplissant les cases de droite à gauche.

$p_2 = \frac{3 \times 6 \times 5}{7 \times 6 \times 5} = \frac{3}{7}$.



3. On dénombre $15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$ issues favorables. $p_3 = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$.

43 Ω : ensemble des combinaisons de 4 gants parmi 20 muni de la loi équirépartie.

a) Il y a $\binom{20}{4} = 4\,845$ combinaisons possibles, d'où

$p(A) = \frac{\binom{10}{2}}{4\,845} = \frac{3}{323}$.

b) \bar{B} : « aucune paire ». Notons n le nombre d'issues favorables à \bar{B} .

Nombre de listes de gants associés à des paires distinctes deux à deux :

$p = 2 \binom{10}{2} \times 2 \binom{9}{1} \times 2 \binom{8}{2} \times 2 \binom{7}{1} = 80\,640$.

Il suffit alors de remarquer que $4!n = p$ d'où $n = 3\,360$.

Ainsi $p(\bar{B}) = \frac{3\,360}{4\,845} = \frac{224}{323}$ d'où $p(B) = \frac{99}{323}$.

44 1.

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,01	0,035	0,065625	0,09625	0,126875

x_i	7	8	9	10	11	12
p_i	0,1625	0,161875	0,13125	0,100625	0,07	0,04

2. $E(X) = 7,5$; $V(X) \approx 5,375$; $\sigma(X) \approx 2,318$.

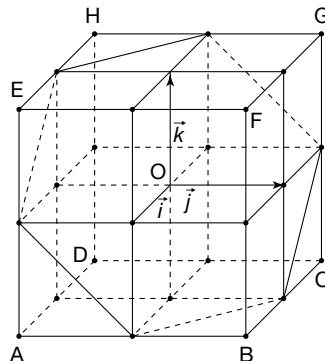
45 1. $A(1; -1; -1)$ donc $p_A = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

2. E_1 signifie que M est l'un des points de coordonnées $(-1; 0; 0)$, $(0; 0; 0)$ ou $(1; 0; 0)$.

$p(E_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3. a) $\mathcal{P} : x + y + z = 0$.

b) La section du cube par le plan \mathcal{P} est un hexagone.



c) Les sommets de l'hexagone ont pour coordonnées : $(1; -1; 0)$, $(1; 0; -1)$, $(0; 1; -1)$, $(-1; 1; 0)$, $(-1; 0; 1)$, $(0; -1; 1)$.

$p(E_2) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$.

4. $\mathcal{B} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,25$.

Les points du réseau qui n'appartiennent pas à \mathcal{B} sont les sommets du cube.

Ainsi $p(\bar{E}_3) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ donc $p(E_3) = \frac{7}{8}$.

Conditionnement. Indépendance

46 Calcul direct dans l'univers des faces noires où chaque face est équiprobable : $p = \frac{2}{3}$.

Remarque : on peut aussi raisonner sur l'univers des jetons $\Omega = \{J_{NN}, J_{NB}, J_{BB}\}$.

Notons N_1 : « une face au moins est noire » et N_2 : « deux faces noires ».

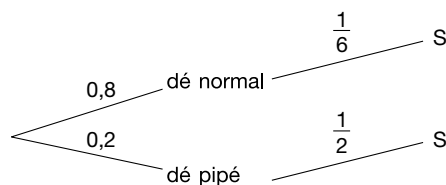
On cherche $p_{N_1}(N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_1)}$.

Or $p(N_1 \cap N_2) = p(J_{NN}) = \frac{1}{3}$ et

$p(N_1) = 1 \times p(J_{NN}) + \frac{1}{2} \times p(J_{NB})$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

donc $p_{N_1}(N_2) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

47 1.



$$p(S) = \frac{0,8}{6} + \frac{0,2}{2} = \frac{0,7}{3} = \frac{7}{30}.$$

2. Appelons P l'événement «le dé est pipé».

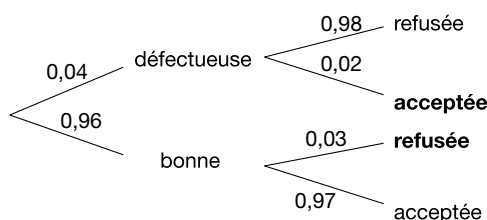
$$p_S(P) = \frac{p(P \cap S)}{p(S)} = \frac{0,1}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{7}.$$

48 1. $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,03 \times 0,6 = 0,018.$

$$2. p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,018}{0,05} = 0,36.$$

$$3. p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,03 + 0,05 - 0,018 = 0,062.$$

49 1.



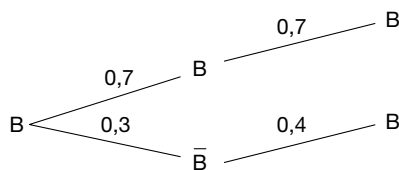
Il y a erreur pour les deux événements écrits en gras :

$$p(E) = 0,04 \times 0,02 + 0,96 \times 0,03 = 0,0008 + 0,0288 = 0,0296.$$

2. La probabilité est :

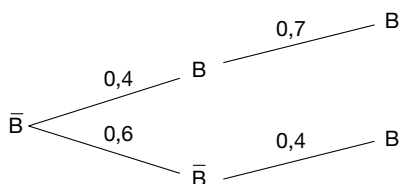
$$\frac{0,04 \times 0,02}{0,04 \times 0,02 + 0,96 \times 0,97} \approx 0,00086.$$

50 1. B : Il fait beau.



$$p = 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,4 = 0,61.$$

2.



$$p' = 0,4 \times 0,7 + 0,6 \times 0,4 = 0,52.$$

51 Corrigé dans le manuel.

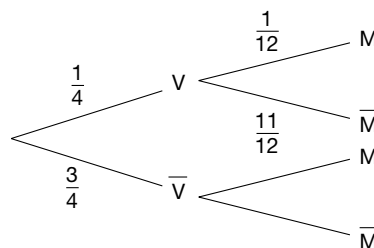
52 • V : individu vacciné, M : individu malade. On cherche $p_{\bar{V}}(M)$.

$$p(M \cap \bar{V}) = p(\bar{V}) \times p_{\bar{V}}(M) = p(M) \times p_{M(\bar{V})}$$

$$\text{d'où } \frac{3}{4} p_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{5} p(M). \quad [1]$$

D'après la formule des probabilités totales,

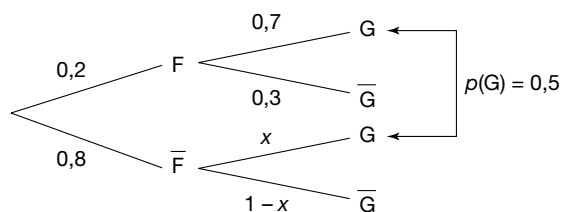
$$p(M) = \frac{1}{48} + \frac{3}{4} p_{\bar{V}}(M) \text{ soit } p(M) = \frac{1}{48} + \frac{1}{5} p(M).$$



D'où $p(M) = \frac{5}{192}$. On déduit alors de [1],

$$\frac{3}{4} p_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{192} \text{ donc } p_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{144}.$$

53 • Posons $x = p_{\bar{F}}(G)$.



D'après la formule des probabilités totales,

$$p(F \cap G) + p(\bar{F} \cap G) = p(G) \text{ soit } 0,14 + 0,8x = 0,5 \text{ donc } x = 0,45.$$

$$\text{a) } p(F \cap G) = 0,2 \times 0,7 = 0,14.$$

$$\text{b) } p(F \cup G) = p(F) + p(G) - p(F \cap G) = 0,2 + 0,5 - 0,14 = 0,56.$$

$$\text{c) } p(\bar{F} \cup \bar{G}) = 1 - p(F \cap G) = 0,44.$$

$$\text{Autre solution : } p(\bar{F} \cap \bar{G}) = 0,8 \times 0,55 = 0,44.$$

$$\text{d) } p_G(F) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)} = \frac{0,14}{0,5} = 0,28.$$

$$\text{e) } p_{\bar{G}}(F) = \frac{p(F \cap \bar{G})}{p(\bar{G})} = \frac{0,2 \times 0,3}{0,5} = 0,12.$$

54 • A. $1. 5 \times 5 = 25.$ 2. $\frac{5 \times 1}{25} = \frac{1}{5}.$ 3. $\left(\frac{4}{5}\right)^n.$

$$4. 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8}.$$

Soit onze jours.

$$\text{B. } p(E) = \frac{1}{5}; p_E(F) = \frac{4 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{4};$$

$$p_{\bar{E}}(F) = \frac{3}{16}; p(F \cap E) = p(E) \times p_E(F) = \frac{1}{20};$$

$$p(F \cap \bar{E}) = p(\bar{E}) \times p_{\bar{E}}(F) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{20}.$$

$$\text{D'où } p(F) = p(F \cap E) + p(F \cap \bar{E}) = \frac{1}{5}.$$

55 • 1. La probabilité qu'il ne tombe pas en panne est : $(1 - 0,1)(1 - 0,05)(1 - 0,03) = 0,82935,$
d'où la probabilité cherchée est $1 - 0,82935 = 0,17065.$

2. Le couple AA' tombe en panne si A et A' tombent en panne avec donc une probabilité égale à $(0,1)(0,1) = 0,01$. Donc la probabilité cherchée est : $1 - (1 - 0,01)(1 - 0,05)(1 - 0,03) = 0,087715$.

56 • 1. a) $p_1 = \frac{5^n + 5^n}{10^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$;

$$p_2 = \frac{n \times 5 \times 5^{n-1}}{10^n} = \frac{n}{2^n}.$$

b) $A \cap B$ signifie « une boule blanche et $n - 1$ noires » donc $p(A \cap B) = p_2 = \frac{n}{2^n}$. $p(A) = 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

B signifie « aucune boule blanche ou une seule boule blanche » d'où $p(B) = \frac{5^n}{10^n} + p_2 = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$.

2. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow 2^n n = (2^n - 2)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = n + 1.$$

3. a) $u_2 = -1, u_3 = 0, u_4 = 3$.

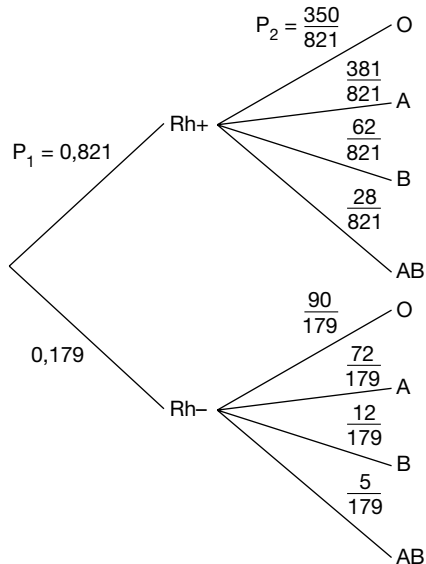
b) $u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1$. Or $n \geq 2$ donc $2^{n-1} - 1 \geq 1$. Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

4. A et B indépendants $\Leftrightarrow u_n = 0 \Leftrightarrow n = 3$.

57 • 1. a) $P_1 = 0,35 + 0,381 + 0,062 + 0,028 = 0,821$.

P_2 est tel que $P_1 \times P_2 = 0,35$ donc $P_2 = \frac{350}{821}$

b) Arbre.



2. a) $p(O) = p(O \cap Rh+) + p(O \cap Rh-)$

soit $p(O) = 0,821 \times \frac{350}{821} + 0,179 \times \frac{90}{179} = 0,44$.

À partir du tableau : $44\% + 9\% = 44\%$.

b) $p_{O|Rh+} = \frac{p(O \cap Rh+)}{p(Rh+)} = \frac{0,35}{0,821} = \frac{35}{821} \approx 0,0427$.

3. a) E : « au moins une personne parmi les n est du groupe O ».

\bar{E} : « les n personnes ne sont pas du groupe O », d'où $p(\bar{E}) = 0,56^n$. Ainsi $p = p(E) = 1 - 0,56^n$.

b) $p \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,56^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,56^n \leq 0,001$
 $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,56}$. D'où $n_0 = 12$.

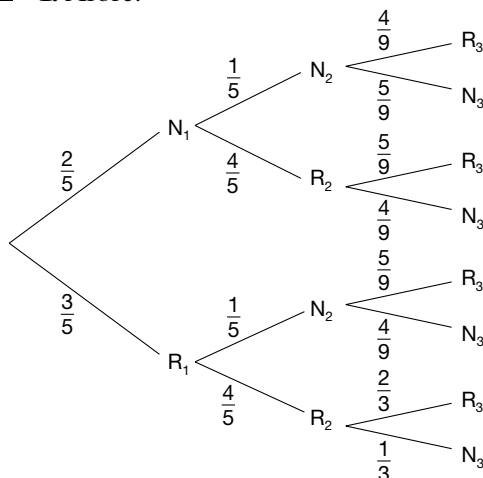
58 • 1. $p(R_1) = (1 - p(A_1)) \times 0,2 = 0,12$.

2. $p(R_2) = p(A_1) \times (1 - p(A_2)) \times 0,2 = 0,056$;
 $p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0,176$.

3. $p_R(R_1) = \frac{p(R_1 \cap R)}{p(R)} = \frac{p(R_1)}{p(R)} = \frac{0,12}{0,176} \approx 0,682$.

4. L'événement contraire « Les vingt personnes refusent » a pour probabilité $(1 - 0,176)^{20}$. La probabilité cherchée est donc $1 - (0,824)^{20} \approx 0,979$.

59 • 1. Arbre.



2. a) $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$;

$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$.

b) D'après la formule des probabilités totales,
 $p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_3 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_3 \cap R_2)$

$p(N_1 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{14}{75}$.

c) $p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_3 \cap N_2) + p(R_1 \cap N_3 \cap R_2)$

$p(R_1 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{75}$.

3. D'après la formule des probabilités totales,

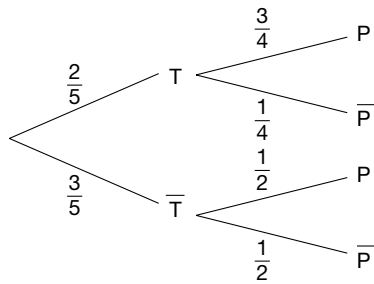
$p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3)$ d'où $p(N_3) = \frac{2}{5}$.

4. $p(N_1) \times p(N_3) \neq p(N_1 \cap N_3)$ donc N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5. $p_{N_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{15}$.

60 • 1. a) $p(P) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$.

b) $p_P(T) = \frac{p(T \cap P)}{p(P)}$ soit $p_P(T) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$.



2. a) $p_{\bar{T}}(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

b) $p_T(\bar{E}) = 1 - p_T(E)$ soit $p_T(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256}$.

c) $p(\bar{T} \cap E) + p(T \cap \bar{E}) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(E) + p(T) \times p_T(\bar{E})$
 $= \frac{3}{5} \times \frac{1}{16} + \frac{2}{5} \times \frac{175}{256} = \frac{199}{640}$
 $\approx 0,311$.

61 • 1. $p(R) = 0,85, p(D) = 0,2$,
 $p(R \cap D) = p(R) \times p_R(D) = 0,85 \times 0,12 = 0,102$.

2. a) $p(\bar{R} \cap \bar{D}) = p(\bar{R} \cup \bar{D})$.
 Or $p(R \cup D) = p(R) + p(D) - p(R \cap D) = 0,948$
 donc $p(\bar{R} \cap \bar{D}) = 0,052$.

b) $p_D(R) = \frac{p(R \cap D)}{p(D)} = 0,51$.

3. a) $p(V \cap D) = p(V) \times p_V(D) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
 b) L'événement contraire signifie qu'aucun des cinq dossiers est du type « V et D » ; il a pour probabilité $0,76^5$. Donc la probabilité cherchée est
 $1 - 0,76^5 \approx 0,746$.

62 • 1.

parents	AA	Aa	aa
AA	AA	AA 1/2 Aa 1/2	Aa
Aa	AA 1/2 Aa 1/2	AA 1/4 Aa 1/2 aa 1/4	Aa 1/2 aa 1/2
aa	Aa	Aa 1/2 aa 1/2	aa

2. a) La descendance AA à la première génération provient de couples (AA, AA), (AA, Aa) ou (Aa, AA), ou (Aa, Aa). Soit :

$$p_1 = p_0^2 + 2 \times p_0 q_0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} q_0^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2$$

Pour trouver r_1 , il suffit de permuter p en r , soit :

$$r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2$$

b) $p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2 - \left(r_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2$
 $= (p_0 - r_0)(p_0 + r_0 + q_0)$;

or, $p_0 + r_0 + q_0 = 1$,

donc $p_1 - r_1 = p_0 - r_0 = \alpha$.

c) On peut écrire $p_0 = \alpha + r_0$ et $q_0 = 1 - r_0 - p_0$,

d'où $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2} q_0\right)^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - r_0\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$
 $= \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2$;

de la même façon, $r_1 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2$ et $q_1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$.

En procédant de la même façon,

$$p_2 = \frac{1}{4}(\alpha + 1)^2, r_2 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2 \text{ et } q_2 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$$

Ce qui prouve que (p_n) , (q_n) et (r_n) sont des suites constantes dès que $n \geq 1$. Leur valeur ne dépend que de $p_0 - r_0 = \alpha$. Voici quelques valeurs obtenues pour Excel.

n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,6	0,2	0
1	0,25	0,5	0,25	0
2	0,25	0,5	0,25	0
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,4	0,2	0,4	0
1	0,25	0,5	0,25	0
2	0,25	0,5	0,25	0
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,6	0,2	0
1	0,25	0,5	0,25	0
2	0,25	0,5	0,25	0
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,3	0,3	0,4	-0,1
1	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
2	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,4	0,1	0,5	-0,1
1	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
2	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,5	0,3	-0,1
1	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
2	0,2025	0,495	0,3025	-0,1
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,5	0,2	0,3	0,2
1	0,36	0,48	0,16	0,2
2	0,36	0,48	0,16	0,2
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,5	0,2	0,3	0,2
1	0,36	0,48	0,16	0,2
2	0,36	0,48	0,16	0,2
n	p_n	q_n	r_n	α
0	0,2	0,8	0	0,2
1	0,36	0,48	0,16	0,2
2	0,36	0,48	0,16	0,2

Variables aléatoires. Indépendance

63 1. a) Loi de N :

k	$-r$	n
$p(N = k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

b) $E(N) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2r}{3} + \frac{n}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 2r.$

2. a) La réponse au QCM est la répétition, cinq fois de la même épreuve (réponse à une question) ; les réponses étant supposées indépendantes.

Notons A l'événement « 4 réponses justes ».

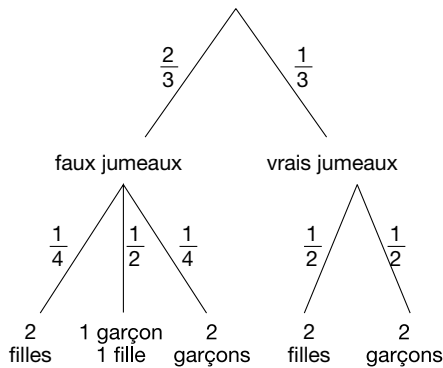
A est représenté par 5 chemins :

$\rightarrow F \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow J ; \rightarrow J \rightarrow F \rightarrow J \rightarrow J \rightarrow J ; \dots$

D'où $p(A) = 5 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}.$

b) Alors $n = 2, r = 1$ d'où la note 7.

64



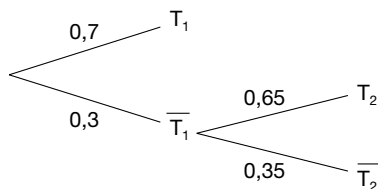
x_i	2	1	0	2	0
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Loi de X :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

65 1. $p(T_1) = 0,7 ;$

$p(C) = p(T_1) + p(\bar{T}_1 \cap T_2) = 0,7 + 0,3 \times 0,65 = 0,895.$



2. a) Loi de X :

k	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050
$p(X = k)$	0,7	0,195	0,105

$E(X) = 0,895a - 1015.$

b) Condition : $E(X) > 0.$ Bénéfice à partir d'un prix de vente de 1 135 e.

66 • Corrigé dans le manuel.

67 • 1. Loi de X :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

2. a) $p_{\bar{T}}(G) = p(X \geq 2) = \frac{28}{220} = \frac{7}{55} ;$

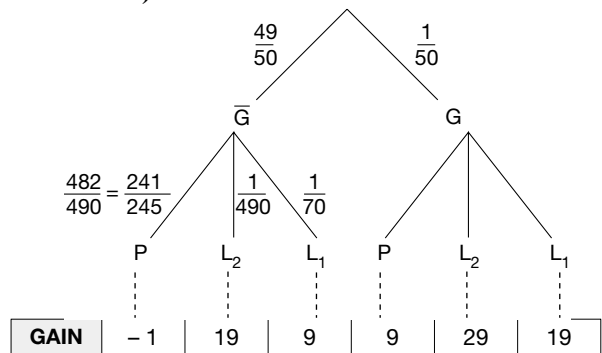
$p(G \cap \bar{T}) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(G) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{55} = \frac{63}{550}.$

b) $p(T \cap G) = p(T) \times p_T(G) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}.$

c) $p(G) = p(G \cap \bar{T}) + p(G \cap T) = \frac{63}{550} + \frac{1}{20} = \frac{181}{1100}.$

d) $p_G(T) = \frac{p(G \cap T)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{181}{1100}} = \frac{55}{181}.$

68 • 1. a)



b) $1 - \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{490}\right) = \frac{482}{490} = \frac{241}{245}.$

c) Voir l'arbre ci-dessus.

2. a) $p(X = 19) = \frac{1}{250} = p(G \cap L_1) + p(G \cap L_2)$
 $= p(G) \times p_G(L_1) + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(L_2)$
 $= p_G(L_1) \times \frac{1}{50} + \frac{49}{50} \times \frac{1}{490}.$

D'où $p_G(L_1) = \frac{1}{10}.$

b) $p(X = 9) = \frac{2}{125} = p(G \cap P) + p(\bar{G} \cap L_1)$
 $= p(G) \times p_G(P) + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(L_1)$
 $= \frac{1}{50} \times p_G(P) + \frac{1}{70} \times \frac{49}{50},$

d'où $p_G(P) = \frac{1}{10}.$

c)

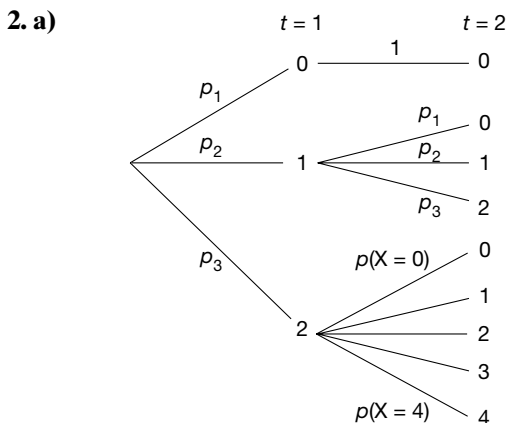
x_i	-1	9	19	29
p_i	$\frac{241}{250}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{2}{125}$

$E(X) = -0,28 \text{ e.}$

69 • 1. a) X prend les valeurs : 0; 1; 2; 3; 4.

b)

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	p_1^2	$2p_1p_2$	$p_2^2 + 2p_1p_3$	$2p_2p_3$	p_3^2



b) $p_{A_1}(B_2) = p_3$, puis $p(A_1 \cap B_2) = p_2p_3$;

$$p(B_2) = p_2p_3 + p_3(p_2^2 + 2p_1p_3) = p_3(p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3).$$

c)

y_i	0	1
$p(Y = y_i)$	$p_1 + p_2p_1 + p_3p_1^2$	$p_2^2 + p_3(2p_1p_2)$

y_i	2	3	4
$p(Y = y_i)$	$p_3(p_2 + p_2^2 + 2p_1p_3)$	$p_3(2p_2p_3)$	p_3^3

70 • 1. $p(H) = 3 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$;

$$p(V) = \frac{1}{28} ;$$

$$p(D) = 2 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{42} ;$$

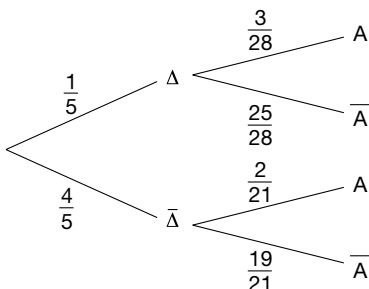
$$p(N) = 1 - (p(H) + p(V) + p(D)) = \frac{19}{21}.$$

2. $E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{14} + \frac{\alpha}{42} - \frac{38}{21} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 16.$

3. a) $p_{\Delta}(H) = p_{\Delta}(V) = p_{\Delta}(D) = \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}.$

b) $p_{\Delta}(H \cup V \cup D) = p_{\Delta}(H) + p_{\Delta}(V) + p_{\Delta}(D) = \frac{3}{28}.$

4.



$$p(A) = p(\Delta \cap A) + p(\bar{\Delta} \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{28} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{21} = \frac{41}{420}.$$

5. $p_A(\Delta) = \frac{p(\Delta \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{3}{28}}{\frac{41}{420}} = \frac{9}{41}.$

Suites et probabilités

71 • 1. $p_1 = \frac{1}{2}$; $p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}.$

2. $p_n = p_{n-1} \times \frac{1}{3} + (1 - p_{n-1}) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$ pour $n \geq 2.$

3. • $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65}$
 $= \frac{2}{15}(p_n - \frac{3}{13}) = \frac{2}{15}u_n ;$

• $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}.$

4. $u_n = \frac{7}{26} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$, donc $p_n = \frac{7}{26} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}.$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{13}.$

72 • 1. a) $v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4$

$$\begin{aligned} &= 13 \left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n \right) - 4 \\ &= \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - 4 = -\frac{39}{10}u_n + \frac{12}{10} \\ &= -\frac{3}{10}(13u_n - 4) = -\frac{3}{10}v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $-\frac{3}{10}$,

$$v_1 = 13a - 4, \text{ donc } v_n = (13a - 4) \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

b) $u_n = (v_n + 4) \frac{1}{13}$, donc $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right) \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$

c) Puisque $\left|-\frac{3}{10}\right| < 1$, la limite de $\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ est nulle et alors la limite de (u_n) est $\frac{4}{13}.$

2. a) $p_{n+1} = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$
 $= p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\bar{E}_n) \times p_{\bar{E}_n}(E_{n+1})$
 $= p_n \times \frac{1}{10} + q_n \times \frac{4}{10}$

b) $p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{10} + (1 - p_n) \times \frac{4}{10} = -\frac{3}{10}p_n + \frac{4}{10}$

c) $p_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right) \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} ;$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{4}{13} = p$, donc p ne dépend pas de $a.$

73 • 1. a) $p_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

b) $p_n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{1000}$
 $\Leftrightarrow (n+1)! \geq 1000$
 $\Leftrightarrow n \geq 6$.

2. a) $q_n = 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 1$.

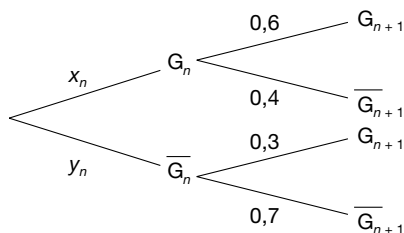
74 •

1. $p(G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$
 $= 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,3$
 $= 0,45$;

$p(\overline{G_2}) = 0,55$.

2. $\begin{cases} p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ p(\overline{G_{n+1}}) = p(G_n \cap \overline{G_{n+1}}) + p(\overline{G_n} \cap \overline{G_{n+1}}) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$.



3. a) Pour tout $n \geq 1$, $v_n = x_n + y_n = p(G_n) + p(\overline{G_n}) = 1$.
 Donc (v_n) est constante de valeur 1.

b) $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1}$
 $= 2,4x_n + 1,2y_n - 1,2x_n - 2,1y_n$
 $= 1,2x_n - 0,9y_n$
 $= 0,3(4x_n - 3y_n)$.

$w_{n+1} = 0,3w_n$. Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 0,5$.

Ainsi $w_n = 0,5 \times 0,3^{n-1}$.

4. $4x_n - 3y_n = w_n \Leftrightarrow 4x_n - 3(1 - x_n) = w_n$

$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{7} [3 + w_n]$.

Ainsi $x_n = \frac{3}{7} + \frac{1}{14} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{7}$. Lorsque n devient grand, la probabilité que Laura gagne la nième partie tend vers $\frac{3}{7}$.

75 • 1. $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $p_3 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$;

$p_4 = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.

2. a) $p(B_n) = \frac{1}{3}$.

b) $p(U_n) = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

c) $p_n = p(B \cap U_n) = p(B) \times p(U_n)$ (indépendance)

d'où $p_n = (n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. a) Preuve par récurrence.

– La formule est vraie pour $n = 2$.

– Supposons la formule vraie pour un entier n ($n \geq 2$).

Alors $S_{n+1} = S_n + p_{n+1}$

$= 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) - \frac{n}{4}\right]$

$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$.

Ainsi la formule est vraie au rang $n + 1$ donc pour tout n ($n \geq 2$).

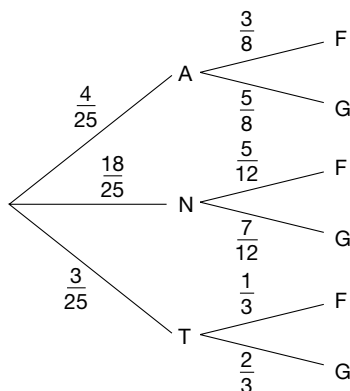
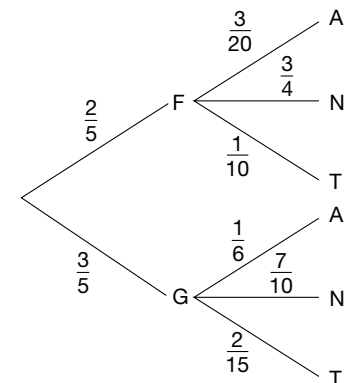
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left(\ln \frac{2}{3} + \frac{\ln n}{n}\right)} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

Prendre toutes les initiatives

76 Deux arbres possibles.



77 • A : « appel de deux médecins »

Le nombre d'issues favorables à A :

$$n = \binom{3}{2} \times (2^4 - 2) = 42.$$

Note : $\binom{3}{2}$ choix des deux médecins ; pour chacun d'eux, 2^4 listes possibles dont 2 donnent un seul médecin.

$$p(A) = \frac{42}{3^4} = \frac{14}{27} \text{ donc } p(\bar{A}) = \frac{13}{27}.$$

A est le plus favorable.

78 • A signifie que soit deux zones sont atteintes, soit une seule.

$$A_1 : \text{« une zone atteinte » ; } p(A_1) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{81}.$$

A_2 : « deux zones atteintes ».

Il existe $\binom{3}{2} \times (2^5 - 2) = 90$ chemins associés d'où

$$p(A_2) = 90 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{30}{81}.$$

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) = \frac{31}{81}.$$

79 • A. Notons \bar{G} « aucun billet gagnant ».

$$\begin{aligned} p(\bar{G}) &= \frac{\binom{100-k}{10}}{\binom{100}{10}} \\ &= \frac{(100-k)(99-k)\dots(91-k)}{100 \times 99 \times \dots \times 91} \\ &= \frac{100-k}{100} \times \frac{99-k}{99} \times \dots \times \frac{91-k}{91} \\ &= \left(1 - \frac{k}{100}\right) \left(1 - \frac{k}{99}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{91}\right) \quad [1] \end{aligned}$$

B. Notons \bar{G}' « aucun billet gagnant ».

$$p(\bar{G}') = \left(\frac{100-k}{100}\right)^{10} = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^{10}.$$

Par comparaison des facteurs de [1] et [2],

$$p(\bar{G}') > p(\bar{G}) \text{ et donc } p(G') < p(G).$$

La stratégie A. est la meilleure pour obtenir au moins un billet gagnant.

Problèmes

(page 283)

80 • 1. a) $p(D) = \frac{\text{aire}(D)}{400} = \frac{\pi}{400}.$

b) $p(S_1) = \frac{\text{aire}(S_1)}{400} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)\pi(9^2 - 1^2)}{400} = \frac{\pi}{40}.$

2. a) $p(R) = \frac{\text{aire}(R)}{400} = \frac{400 - 81\pi}{400} = 1 - \frac{81\pi}{400}.$

Loi de X :

x_k	-4	1	2	3	4	5
$p(X = x_k)$	$1 - \frac{81\pi}{400}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$

x_k	6	7	8	10
$p(X = x_k)$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{400}$

$$E(X) = \frac{347\pi}{200} - 4 \quad (E(X) \approx 1,45).$$

b) Notons X_1 la variable aléatoire donnant le gain pour le premier jeu et X_2 celle pour le second.

Le tableau indique les événements qui réalisent $X_1 + X_2 < 0$.

D'où en raison de l'indépendance de X_1 et X_2 ,

$$p(X_1 + X_2 < 0) = \left(1 - \frac{81\pi}{400}\right)^2 + 6 \times \frac{\pi}{40} \left(1 - \frac{81\pi}{400}\right)$$

$$p(X_1 + X_2 < 0) \approx 0,304.$$

$$\text{Ainsi } p(X_1 + X_2 \geq 0) \approx 0,696.$$

$X_2 \backslash X_1$	-4	1	2	3	4	...
-4	-8	-3	-2	-1	0	
1	-3	2	3	4		
2	-2	3	4			
3	-1	4				
4	0					
...						

c) A : « au moins un des n points dans D ».

$$\bar{A} : \text{« aucun des } n \text{ points dans D » ; } p(\bar{A}) = \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^n.$$

$$\text{D'où } p_n = p(A) = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^n.$$

$$p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\pi}{400}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln\left(1 - \frac{\pi}{400}\right)}.$$

D'où $n_0 = 293$.

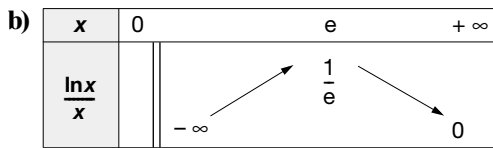
81 • 1. Il y a une analyse si les r individus sont indemnes : $p(X_r = 1) = p^r$,

sinon il y a $r + 1$ analyses : $p(X_r = r + 1) = 1 - p^r$.

D'où $E(X_r) = r + 1 - rp^r$.

2. Il faut évaluer $\frac{r - E(X_r)}{r} = p^r - \frac{1}{r}.$

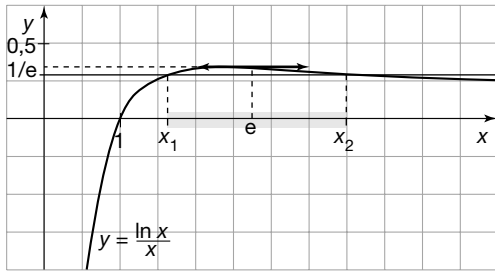
3. a) « $p^x - \frac{1}{x} > 0$ et $x > 0$ » \Leftrightarrow « $\frac{\ln x}{x} > \ln\left(\frac{1}{p}\right)$ ».



L'inéquation n'a des solutions que si $\ln\left(\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{e}$, soit :

$$\frac{1}{p} \leq e^{\frac{1}{e}} \text{ ou encore } p \geq e^{-\frac{1}{e}}.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est un intervalle I borné (cf. graphique).



• Si $p \geq 0,7$, alors $p \geq e^{-\frac{1}{e}}$.

• Si $p < 0,69$, alors $p < e^{-\frac{1}{e}}$ et il n'y a pas de solution.

4. • $\frac{\ln x}{x} > \ln\left(\frac{1}{9}\right)$, on vérifie que pour $x \in [1,126; 33,2]$, l'inéquation est vérifiée et la plus grande valeur entière solution est 33.

• Avec $p = 0,99$, on a $I = [1,02; 643,4]$ et $r_{\max} = 643$.

Note : Par tabulation pour les valeurs entières de x de la fonction $x \mapsto p^x - \frac{1}{x}$; $2 \leq x \leq r_{\max}$. On obtient alors la valeur de r rendant la taille optimale. $p = 0,9$, $r = 4$; $p = 0,99$, $r = 11$.

C'est nouveau au bac (page 284)

82 • 1. b) $\xrightarrow{0,4} N \xrightarrow{0,4} N \xrightarrow{0,4} N$ $p_0 = (0,4)^3$

2. b) $\xrightarrow{\frac{3}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{4}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} B$ $p_3 = 0,1$

3. c) $\xrightarrow{\frac{3}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{4}} N \xrightarrow{\frac{2}{4}} N$;

$\xrightarrow{\frac{2}{5}} N \xrightarrow{\frac{3}{5}} B \xrightarrow{\frac{2}{4}} N$;

$\xrightarrow{\frac{2}{5}} N \xrightarrow{\frac{2}{5}} N \xrightarrow{\frac{3}{5}} B$ $p_1 = 0,336$.

4. c) $p_4 = p_1 + p_0 = 0,43$.

5. b) c) Loi de X :

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	0,064	0,366	0,47	0,1

$E(X) = 1,606$ donc $E(X) \neq \frac{8}{5}$,

$\sigma(X) \approx 0,7528$ donc $75 < \sigma(X) < 76$.

$\sigma^2(X) = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

83 1. **Faux.** Si A et B sont deux événements incompatibles tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors $p(A \cap B) = 0$ tandis que $p(A) \times p(B) \neq 0$.

2. **Faux.** Si A est un événement tel que $0 < p(A) < 1$ alors $p(A \cap \bar{A}) = 0$ tandis que

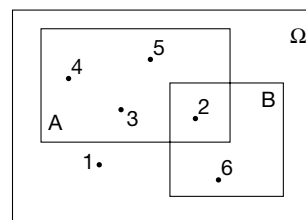
$$p(A) \times p(\bar{A}) = p(A)(1 - p(A)) \neq 0.$$

3. **Vrai.** Si $B \subset A$ alors $B \cap A = B$.

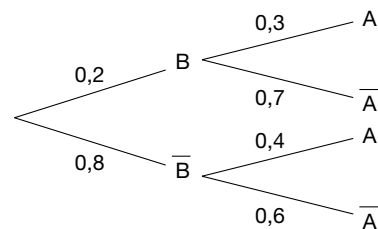
Ainsi $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$.

4. **Faux.** Contre-exemple : lancer d'un dé équilibré

$p(A) = \frac{2}{3}$, $p(B) = \frac{1}{3}$, $p(B) = 1 - p(A)$ et $B \neq \bar{A}$.



5. **Vrai.**



$p(A \cap B) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$;

$p(A) = 0,2 \times 0,3 + 0,8 \times 0,4 = 0,38$;

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
 $= 0,38 + 0,2 - 0,06 = 0,52$.

6. **Vrai.** Ω : ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, $y \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Tous les couples sont équiprobables.

« $S = 10$ » est l'ensemble $\{(4; 6), (6; 4), (5; 5)\}$. D'où la probabilité conditionnelle cherchée : $\frac{1}{3}$.

7. Vrai. A : « au moins un pile durant les dix lancers »

$$p(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1\,024} \text{ donc } p(A) > 1 - \frac{1}{1\,000}.$$

84 • 1. a) D'après la formule des probabilités totales, $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$ d'où

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B).$$

Or A et B sont indépendants donc

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A) \times p(B).$$

b) Cette égalité s'écrit aussi

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times (1 - p(B)) = p(A) \times p(\bar{B})$$

donc A et \bar{B} sont indépendants.

On a prouvé que si A et B sont indépendants, alors il en est de même de A et \bar{B} .

En appliquant ce résultat à \bar{B} et A, on conclut que \bar{B} et \bar{A} sont aussi indépendants.

2. Ω : ensemble des triplets d'éléments de $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tous ces triplets sont équiprobables.

$$\bar{A} : \text{« obtenir aucun 6 »}; p(\bar{A}) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$$

\bar{B} : « les nombres affichés sont tous différents » ;

$$p(\bar{B}) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5 \times 4 \times 3}{6^3} = \frac{5}{18}.$$

$$\text{Or } p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) = \frac{625}{1\,944} \text{ donc}$$

$$p(\bar{A}) \times p(\bar{B}) \neq p(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

Ainsi \bar{A} et \bar{B} ne sont pas indépendants.

On en déduit par la contraposée de la proposition du 1. que A et B ne sont pas indépendants.

Note : on peut aussi raisonner par l'absurde.