

Activités (page 236)

ACTIVITÉ 1

2 1. • Résultats :

PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF.

Huit résultats.

• $2 \times 2 \times 2 = 8$.

2. a) Il y a deux choix pour remplir la case 1, et pour chacun de ces choix, il y a deux choix pour remplir la case 2.

Donc $2 \times 2 = 4$ façons de remplir les deux premières cases.

Pour chacune de ces façons, il y a deux façons de remplir la case 3.

b) Donc 4×2 façons de remplir les trois cases.

3. Exercices

1. On trouve $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ pour l'exemple 2 et $5 \times 4 \times 3 = 60$ pour l'exemple 3.

2. $9 \times 1 \times 9 \times 9 = 729$.

ACTIVITÉ 2

1. $n_1 = 5 \times 4 \times 3$.

2. a) $n_2 = 3 \times 2 \times 1$.

b) Pour chaque sous-ensemble de 3 éléments de E (au nombre de $\binom{5}{3}$) on associe n_2 listes différentes, chaque liste étant obtenue une seule fois. En effet, deux sous-ensembles distincts n'ayant pas les mêmes éléments, les listes formées à partir de ces sous-ensembles sont distinctes.

On obtient ainsi toutes les listes sans répétitions à trois éléments de E.

Il s'ensuit que $n_1 = \binom{5}{3} \times n_2$ et $\binom{5}{3} = 10$.

Travaux dirigés (page 245)

TD 1

1 1. $4 \times 4 \times 4 = 64$.

2. a) $1 \times 1 \times 1 = 1$;

b) $1 \times 1 \times 4 = 4$;

c) $4 \times 1 \times 1 = 4$;

d) $4 \times 1 \times 4 = 16$.

2 1. $4 \times 3 \times 2 = 24$.

2. a) $1 \times 1 \times 1 = 1$;

b) $1 \times 1 \times 2 = 2$;

c) $2 \times 1 \times 1 = 2$;

d) $3 \times 1 \times 2 = 6$.

3 1. $\binom{4}{3} = 4$.

2. $\binom{1}{1} \times \binom{3}{2} = 3$; $\binom{2}{2} \times \binom{2}{1} = 2$.

TD 2

1 1. Main obtenue deux fois par ce procédé : roi de carreau, puis roi de trèfle, as de carreau, as de trèfle et 10 de pique.

En effet, cette main peut aussi être obtenue en choisissant d'abord le roi de trèfle, puis le roi de carreau et as de carreau, as de trèfle et 10 de pique. Ici, il faut dénombrer en distinguant les ensembles contenant exactement un roi, puis deux rois, trois rois, et enfin quatre rois.

Il est plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire, c'est-à-dire les mains n'ayant pas de roi.

D'où le résultat $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$.

2. a) Il faut tenir compte de l'as de cœur, qui possède les deux qualités. Il y a deux possibilités :

– soit on prend l'as de cœur et il faut prendre un as qui ne soit pas de cœur (il y en a trois) et trois autres cartes qui ne soient ni un as, ni un cœur (il y en a vingt-et-une) ;

– soit on prend deux as qui ne sont pas l'as de cœur, un cœur qui ne soit pas un as et deux autres cartes qui ne soient ni un as ni un cœur.

On obtient :

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{3} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{2} = 3\,990 + 4\,410 = 8\,400.$$

b) En prodédant de façon identique :

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 1\,428.$$

2 1. a) $10^4 = 10\,000$; $9^4 = 6\,561$.

b) $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

2. a) Il y a $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 12$ codes (la division par

2 est due à la présence des deux 0).

b) Le temps d'attente après le n -ième essai est de 2^n .

On est amené à calculer :

$$2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2(2^{n-1} - 1),$$

et à résoudre $2(2^{n-1} - 1) \leq 24 \times 60$.

On trouve $n \leq 10$, donc on pourra faire dix essais au maximum en vingt-quatre heures.



Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 247)

1. Listes d'éléments d'un ensemble

1 Corrigé dans le manuel.

2 a) $\frac{6}{5}$; **b)** $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{8 \times 9 \times 10} = \frac{1}{6}$; **c)** 0.

3 a) 20 ; **b)** 126 ; **c)** 84.

4 a) $(n+1)n$; **b)** $(2n+1)(2n)$;

c) $\frac{n}{(n+1)!}$; **d)** $\frac{1}{n(n+1)}$.

5 $A = \frac{10!}{3!}$; $B = \frac{9!}{3!4!}$; $C = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$.

6 (a, b, c, d) (a, c, b, d) (a, d, b, c)
 (a, b, d, c) (a, c, d, b) (a, d, c, b)
 (b, a, c, d) (b, c, a, d) (b, d, a, c)
 (b, a, d, c) (b, c, d, a) (b, d, c, a)
 (c, a, b, d) (c, b, a, d) (c, d, a, b)
 (c, a, d, b) (c, b, d, a) (c, d, b, a)
 (d, a, b, c) (d, b, c, a) (d, c, a, b)
 (d, a, c, b) (d, b, a, c) (d, c, b, a)

7 $20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\,280$.
 Liste de 4 éléments sans répétition.

8 1. Choix successifs sans remise : $12! = 479\,001\,600$.
2. $8 \times 7 \times 6 = 336$.
 Liste de 3 éléments sans répétition.

9 1. $5! = 120$.

2. $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$.

3. Il y a sept lettres, donc $7!$ anagrammes, mais la présence de deux E signifie qu'il n'y a que $\frac{7!}{2!}$ anagrammes différents. Donc $\frac{7!}{2!} = 2\,520$.

Note : S'il y a trois lettres identiques, on divise par $3!$.

10 1. Choix successifs avec remise : 10^4 ou liste de 4 éléments avec répétitions.

2. Choix successifs avec remise ou liste de 6 éléments avec répétitions : 10^6 .

11 1. $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 676\,000$.

2. $1 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 67\,600$.

3. $10 \times 1 \times 1 \times 26 \times 26 = 6\,760$.

4. $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 1 = 26\,000$.

12 1. Liste de 3 éléments avec répétitions ou tirages successifs avec remise : 6^3 .

2. Principe des cases :

a) $\underbrace{6}_1 \times 1 \times 1 = 6$

choix du chiffre.

b) $6 \times 5 \times 4 = 120$.

c) $\underbrace{\binom{6}{1}}_1 \times \underbrace{\binom{3}{2}}_2 \times \underbrace{\binom{6}{5}}_3 = 6 \times 3 \times 6 = 108$.

Choix du chiffre
 des tirages où
 le chiffre
 est tiré
 et le
 chiffre
 restant
 est tiré

13 1. $3 \times 2 \times 1 = 6$. 2. $3 \times 3 \times 3 = 27$.

14 1. 0. 2. $5^4 = 625$.

2. Combinaisons

15 A = 15 ; B = 495 ; C = $\frac{1}{4}$; D = $\frac{25}{14}$;
E = $\frac{1}{10}$; F = 56 ; G = 1.

16 Corrigé dans le manuel.

17 a) $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0, n \geq 2$
 $\Leftrightarrow n = 9$ ou $n = -8$ et $n \geq 2$.

Donc $n = 9$ est la seule valeur possible.

b) $\frac{3(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2} = 14 \times \frac{n(n-1)}{2}$ et $n \geq 4$

$\Leftrightarrow n(n-1) \left[\frac{(n-2)(n-3)}{8} - 7 \right] = 0$ et $n \geq 4$

$\Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$ ou $n^2 - 5n - 50 = 0$ et $n \geq 4$

$\Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 10$ ou $n = -5$ et $n \geq 4$.

Donc $n = 10$.

18 1. $\binom{6}{3} = 20$.

2. $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, b, e\}$; $\{a, b, f\}$;
 $\{a, c, d\}$; $\{a, c, e\}$; $\{a, c, f\}$; $\{a, d, e\}$;
 $\{a, d, f\}$; $\{a, e, f\}$; $\{b, c, d\}$; $\{b, c, e\}$;
 $\{b, c, f\}$; $\{b, d, e\}$; $\{b, d, f\}$; $\{b, e, f\}$;
 $\{c, d, e\}$; $\{c, d, f\}$; $\{c, e, f\}$; $\{d, e, f\}$.

19 $\binom{20}{3} = 1\,140$.

20 Corrigé dans le manuel.

21 1. $\binom{12}{2} = 66$ droites.

2. $12 \times 11 = 132$ vecteurs.

3. $\binom{12}{3} = 220$ triangles.

22 1. $16 \times 15 \times 14 \times 13 = 43\,680$.

2. $\binom{16}{4} = 1\,820$.

23 1. $\binom{29}{4} = 23\,751$.

2. $\binom{15}{2} \times \binom{14}{2} = 9\,555$.

24 1. a) $\binom{3}{1}^7 = 2\,187$.

b) $\binom{3}{1}^{15} = 14\,348\,907$.

2. a) 6 réponses exactes seulement ou 7 réponses exactes.

$\binom{7}{6} \times \binom{2}{1} + \binom{1}{1}^7 = 15$

b) 12 réponses exactes seulement ou 13 exactes ou 14 exactes ou 15 exactes.

$\binom{15}{12} \times \binom{2}{1}^3 + \binom{15}{13} \times \binom{2}{1}^2 + \binom{15}{14} \times \binom{2}{1} + \binom{1}{1}^{15} = 4\,091$.

3. Formules

25 1. $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

2. $\binom{43}{6} = 6\,096\,454$.

26 $\frac{n!}{(n-3)!3!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 3n(n-1)$.

éq. à $\frac{n-2}{6} + \frac{1}{2} = 3$

éq. à $n = 17$.

27 a) $(2+x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.

b) $(1-2x)^7 = 1 - 14x + 84x^2 - 280x^3 + 560x^4 - 672x^5 + 448x^6 - 128x^7$.

c) $(2x+y)^5 = 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$.

28 a) $(1+2i)^6 = 117 + 44i$.

b) $(3-4i)^5 = -237 + 3\,116i$.

c) $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 = e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-i4\theta}$
 $= e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6$
 $= 2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6$.

29 $5^n = (4+1)^n$
 $= 4^n + \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}4 + 1$
 $= 4 \times K + 1$.

Apprendre à chercher

(page 249)

30 Dénombrer sur un quadrillage

Les outils :

- Les combinaisons.

Les objectifs :

- Savoir imaginer une méthode pour dénombrer.

1. Le quadrilatère obtenu a ses côtés parallèles, et possède un angle droit donc c'est un rectangle.

2. a) Si on prend un rectangle, il est associé à un ensemble de deux droites verticales et de droites horizontales. Donc il y a autant de rectangles que de choix

d'ensembles de deux droites verticales et d'ensembles de deux droites horizontales.

b) Pour chaque choix : $\binom{6}{2} = 15$ façons.

c) Il y a donc $15 \times 15 = 225$ rectangles.

3. On choisit un point parmi trente-six possibles, puis le sommet opposé pour lequel il n'y a que vingt-cinq choix (il faut que ce sommet ne soit pas sur la verticale et l'horizontale passant par le premier sommet). De plus, chaque rectangle ainsi obtenu est compté quatre fois.

D'où le résultat : $36 \times 25 \times \frac{1}{4} = 225$.

31 Démontrer une formule

Les outils :

- Les combinaisons.
- La formule du binôme.

Les objectifs :

- Savoir mettre en œuvre différents moyens pour démontrer une formule.

Première solution

1. $E = A \cup B$, ($A \cap B = \emptyset$),

$$n(A) = a, n(B) = b, n(E) = a + b.$$

Tout sous-ensemble de E à p éléments en contient k qui appartiennent à A ; donc $p - k$ appartiennent à B .

On choisit k éléments de A parmi a et $p - k$ éléments de B parmi b , k entier naturel de 0 à p . Ceci est possible car $k \leq p$ et donc $k \leq a$ et $0 \leq p - k \leq p$, donc $p - k \leq b$.

2. En dénombrant de deux façons :

$$\underbrace{\binom{a}{0} \times \binom{b}{p}}_{k=0} + \underbrace{\binom{a}{1} \times \binom{b}{p-1}}_{k=1} + \dots + \underbrace{\binom{a}{k} \times \binom{b}{p-k}}_{k=p} + \dots + \underbrace{\binom{a}{p} \times \binom{b}{0}}_{k=p} = \binom{a+b}{p}.$$

Deuxième solution

1. • Le coefficient de x^p pour le premier membre provient des produits $x^k \times x^{p-k}$ issus de $(1+x)^a$ et de $(1+x)^b$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.

Le coefficient de x^k dans $(1+x)^a$ est $\binom{a}{k}$, celui de x^{p-k} dans $(1+x)^b$ est $\binom{b}{p-k}$.

Donc le coefficient de $x^k \times x^{p-k}$ est $\binom{a}{k} \times \binom{b}{p-k}$; en additionnant ces coefficients, on obtient celui de x^p soit :

$$\binom{a}{0} \times \binom{b}{p} + \binom{a}{1} \times \binom{b}{p-1} + \dots + \binom{a}{p} \times \binom{b}{0}.$$

• $\binom{a+b}{p}$ est le coefficient de x^p du second membre.

2. D'où l'égalité par identification des coefficients.

Pour progresser

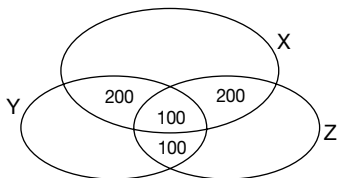
(page 250)

Dénombrement

32 Un diagramme éclaire la situation : il y a 100 personnes qui lisent les trois revues, ou encore :

$$n(X \cap Y \cap Z) = 100.$$

On identifie les lecteurs aux revues.



1. Soit on complète le schéma, soit on traduit à l'aide d'ensembles.

Deux revues uniquement (deux au moins mais pas trois) :

- avec X et Y : 20 %, donc 200 ;
 - avec Y et Z : 10 %, donc 100 ;
 - avec X et Z : 20 %, donc 200 ;
- soit 500 personnes.

2. Il faut dénombrer ceux qui ne lisent qu'une seule revue :

- X : $600 - (200 + 200 + 100) = 100$;

• Y : $500 - (200 + 100 + 100) = 100$;

• Z : $500 - (200 + 100 + 100) = 100$.

Donc 100 personnes lisent les trois revues, 500 deux et 300 une seule, donc 100 personnes ne lisent aucune des trois revues.

33 1. $85 = 39\,768$. 2. $95 = 59\,049$. 3. C'est justifié.

34 1. $\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{roi}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{dame}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{2 valets}} \times \underbrace{\binom{20}{1}}_{\substack{\text{dernière carte} \\ \text{parmi les 20 restantes}}} = 480.$

2. As de pique et 2 trèfles ou as de pique et 3 trèfles ou as de pique et 4 trèfles

$$\binom{8}{2} \times \binom{23}{2} + \binom{8}{3} \times \binom{23}{1} + \binom{8}{4} = 8\,442.$$

3. Roi de carreau et 1 autre carreau ou un roi non carreau et 2 carreaux non roi.

$$1 \times \binom{7}{1} \times \binom{24}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} + \binom{21}{2} = 27\,399.$$

35 1. a) Il y en a exactement le nombre de parties à deux éléments parmi n éléments ie $\binom{n}{2}$.

b) Il faut et il suffit d'enlever le nombre de côtés de P_n au nombre précédent.

ie $\binom{n}{2} - n$.

2. On résout $\binom{n}{2} - n = n$.

ie $\binom{n}{2} = 2n$.

ie $n = 5$.

36 • 1. $2^8 = 256$ 2. $2^6 = 64$ 3. $\binom{8}{4} = 70$.

37 • 1. • *Quinte flush* : pour une couleur donnée, il y en a neuf. Donc $9 \times 4 = 36$ mains.

• *Carré* : il y a $\binom{4}{4}$ façons de prendre quatre cartes d'une valeur donnée; ce choix peut se faire de treize façons; la cinquième carte peut être choisie parmi quarante-huit.

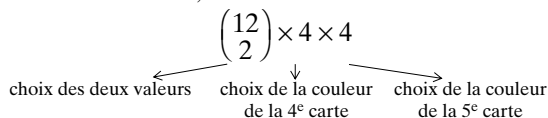
D'où $\binom{4}{4} \times 13 \times 48$ façons d'obtenir un carré (624 mains).

• *Full* : il y a $\binom{4}{3}$ façons de choisir trois cartes d'une valeur donnée et treize choix pour cette valeur; il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir deux cartes d'une valeur donnée pour laquelle il y a douze choix possibles.

D'où $4 \times 13 \times 6 \times 12 = 3\,744$ mains.

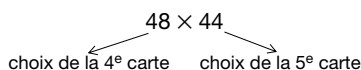
• *Quinte* : il y a neuf « hauteurs » de quinte. (Elles peuvent se terminer du 6 à l'as.) Pour toute quinte (par exemple 2, 3, 4, 5, 6), il y a 4^5 choix, mais il faut ôter les quatre quinte flushs. D'où $9 \times (4^5 - 4) = 9\,180$ mains.

• *Brelan* : il y a $\binom{4}{3} = 4$ façons de choisir trois cartes d'une même valeur, et treize choix pour chaque valeur. Les quatrième et cinquième cartes sont prises parmi les douze valeurs restantes, et sont de deux valeurs différentes, donc :



D'où $4 \times 13 \times 66 \times 4 \times 4 = 54\,912$ choix.

Attention : Ne pas faire :



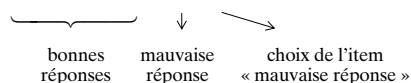
car on compte deux fois chaque choix.

2. Le principe est respecté.

38 • 1. $3^5 = 243$.

2. Une façon.

3. $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10$.



39 • 1. Il faut et il suffit d'aller 9 fois sur la droite et 4 fois vers le bas : il reste à les placer au cours du trajet.

$$\binom{13}{4} \times \binom{9}{9} = 715.$$

on descend 4 fois pour le reste on avance à droite

2. $\binom{7}{1} \times \binom{6}{3} = 140$.

on descend une fois pour aller de A à C on descend 3 fois pour aller de C à B

40 • 1. 3 boules rouges ou 3 boules jaunes.

$$\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$$

2. $\binom{4}{3} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 24$

3. C'est l'événement contraire de la réunion des deux précédents :

$$\binom{9}{3} - (5 + 24) = 55.$$

41 • On place 1 rouge et 1 blanche dans l'urne B puis on tire simultanément 3 boules de 3 couleurs différentes :

$$\binom{5}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{4}{1} = 40.$$

42 • 1. $3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 3^3 \times 2^3 = 216$.

2. $\binom{3}{2} \times 2^3 = 24$.

3. C'est le contraire du 2. : $216 - 24 = 192$.

43 • Une façon de voir : n joueurs rencontrent n autres joueurs. Le nombre de choix de n joueurs parmi $2n$ est $\binom{2n}{n}$. À partir de là, on organise les rencontres des n joueurs du groupe A et des n joueurs du groupe B. Il y a $n!$ rencontres possibles.

Cependant, des séries de n rencontres ont été comptabilisées plusieurs fois. En effet, toute permutation d'un élément x qui rencontrait y donne le même premier tour. Ces permutations (2) pour chacune des n rencontres sont au nombre de $2n$, d'où :

$$\frac{\binom{2n}{n} \times n!}{2^n} = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \text{ rencontres possibles.}$$

Note : On peut dénombrer ainsi. Pour le premier joueur, il y a $2n - 1$ choix ; pour le deuxième joueur (ne rencontrant pas le premier), il y a $2n - 3$ choix ; ... ; donc :

$$(2n - 1) \times (2n - 3) \times (2n - 5) \times \dots \times 3 \times 1 \text{ rencontres.}$$

Il faut alors prouver le résultat par récurrence.

44 • Soit N un nombre de n chiffres exactement (donc le 1^{er} chiffre à gauche n'est pas 0) et comportant exactement deux 8.

1^{er} cas : Un des deux 8 peut être le 1^{er} chiffre de N , ce qui donne $n - 1$ possibilités de placer le 2^e 8, les $n - 2$ autres chiffres étant quelconques, distincts de 8. Il y a ainsi exactement $(n - 1)9^{n-2}$ nombres N de ce

premier type. Par exemple, pour $n = 6$, on peut choisir $N = 32\ 805$.

2^e cas : Aucun des deux 8 n'est le 1^{er} chiffre de N , ce qui donne C_{n-1}^2 possibilités de placer les deux 8, le 1^{er} chiffre étant quelconque parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, et les $n - 3$ autres chiffres quelconques distincts de 8.

Il y a ainsi exactement $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 8 \cdot 9^{n-3}$ nombres N de ce deuxième type.

Finalement, le nombre demandé est :

$$(n-1)9^{n-2} + 4(n-1)(n-2)9^{n-3},$$

c'est-à-dire $(4n+1)(n-1)9^{n-3}$.

45 • Un entier constitué avec les trois chiffres a, b, c s'écrit $10^2 \square + 10 \square + \square$ où chaque case contient a, b ou c sans répétition. Et lorsqu'une case a été remplie, on obtient 2 entiers possibles. Il s'ensuit que la somme de tous ces entiers est :

$$2 \times (10^2(a+b+c) + 10(a+b+c) + a+b+c) = 222(a+b+c).$$

Formules

46 • 1. $A_3 = (2 + \sqrt{3})^3 + (2 - \sqrt{3})^3$
 $= (8 + 12\sqrt{3} + 6 \times 3 + \sqrt{3}^3) + (8 - 12\sqrt{3} + 6 \times 3 - \sqrt{3}^3)$
 $= 16 + 36 = 52 \in \mathbb{N}.$

$A_4 = (2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4$
 $= 16 + 32\sqrt{3} + 24 \times 3 + 8\sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^4$
 $+ 16 - 32\sqrt{3} + 24 \times 3 - 8\sqrt{3}^3 + \sqrt{3}^4$
 $= 32 + 24 \times 6 + 18 = 194 \in \mathbb{N}.$

2. $(2 + \sqrt{3})^n = 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \times \sqrt{3} + \dots + \binom{n}{p} 2^{n-p} \times \sqrt{3}^p + \dots + \sqrt{3}^n;$
 $(2 - \sqrt{3})^n = 2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} \times \sqrt{3} + \dots + (-1)^p \binom{n}{p} 2^{n-p} \times \sqrt{3}^p + \dots + (-1)^n \sqrt{3}^n.$

Si p est impair, $(-1)^p = -1$ et les termes s'annulent.

Si p est pair, la somme est $2 \binom{n}{p} \times 2^{n-p} \times \sqrt{3}^p$ et $\sqrt{3}^p$ est un entier. Donc $A_n \in \mathbb{N}$.

47 • 1. a) $f(x) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{p}x^p + \dots + \binom{n}{n}x^n.$

b) $f'(x) = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \dots + p\binom{n}{p}x^{p-1} + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1},$
d'où :

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

2. Avec $x=1$, $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + p\binom{n}{p} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$

48 • 1. On tire les trois boules 1, 2, 3 = 1 tirage.
• On tire la boule 4 et 2 boules parmi les 3 boules 1, 2, 3 $\binom{3}{2}$ tirages.

2. On tire la boule k et 2 boules parmi les $k - 1$ restantes $\binom{k-1}{2}$ tirages.

3. a) En faisant varier k de 3 à 7 dans le 2. on obtient tous les tirages possibles :

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{7}{2}.$$

b) On peut démontrer par récurrence que :

$n \backslash p$	0	1	2	3
0	1			
1		1		
2			1	
3			3	1
4			6	
5			10	
6			15	
7				35

$$\binom{p}{p} + \binom{p}{p+1} + \dots + \binom{p}{n} = \binom{p+1}{n+1}$$

49 • 1. $\binom{2n}{n}.$

2. $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$; or, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$, donc $\binom{n}{p}^2$ résultats contiennent exactement p boules blanches.

3. La somme : $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$

\downarrow
0 boule
blanche

\downarrow
1 boule
blanche

\downarrow
 n boules
blanches

est égale au nombre de façons de choisir n boules parmi $2n$. D'où $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$

50 • La formule résulte de l'inversion des choix :
– soit on choisit p parmi n , puis q parmi p , et enfin r parmi q ;
– soit r parmi n , puis $q - r$ parmi $n - r$, et enfin $p - q$ parmi $n - q$.

51 • Dans les conditions de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!} \\ &= \binom{n}{p} \binom{p}{k} \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{p} \binom{p}{k}$
 $= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k}$
 $= \binom{n}{p} 2^p.$

52 a) Il y a $\binom{12}{5} = 792$ mains de 5 cartes dans E : **Faux.**

b) On tire les trois autres cartes parmi les 10 restantes, il y a donc $\binom{10}{3}$ mains : **Faux.**

c) • Mains de 7 cartes contenant un carré :

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{choix du carré}} \times \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{choix des 3 autres cartes}} = 168 \text{ mains.}$$

• Mains de 5 cartes contenant un carré :

$$\binom{3}{1} \times \binom{8}{1} = 24 \text{ mains.}$$

et $\frac{168}{7} = 24$; **Vrai.**

53 1. $6 \times 5 \times 4 = 120$ réponse **c.** d'après le principe des cases.

2. a) Nombres inférieurs à 500 :

tous ceux qui commencent par 1 : $5 \times 4 = 20$

avec tous ceux qui commencent par 2 : $5 \times 4 = 20$

avec tous ceux qui commencent par 3 : $5 \times 4 = 20$

avec tous ceux qui commencent par 4 : $5 \times 4 = 20$

donc 80 : **Vrai.**

b) Ce sont ceux qui finissent par 2 ; 4 ou 6, il y en a donc $3 \times 20 = 60$: **Vrai.**

c) Ce sont ceux qui finissent par 5, il y en a donc 20 : **Faux.**

54 1. C'est le contraire de n'avoir aucun as, donc

$$\binom{32}{3} - \binom{28}{3} = 4\,960 - 3\,276 = 1\,684 \text{ façons.}$$

Or $4 \times \binom{31}{3} \neq 1\,684$: **Faux.**

2. La valeur exacte est difficile à établir en terminale (voir Les Nombres de Bell) mais on peut se convaincre que c'est **faux** en commençant à écrire de telles poules (on peut, par exemple, écrire une répartition puis faire

des permutations d'équipes entre les poules) et constater qu'on en obtient plus de 30 « assez vite ».

3. a) Vrai, on « remplit » 3 cases avec les 5 chiffres.

b) Faux, $5 \times 4 \times 3$ choix.

c) Cela revient d'après le principe des cases à choisir une lettre et la position de 1 et 2 et choisir le 3^e chiffre donc $\binom{3}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 45$ codes, **Faux.**

d) Cela revient à choisir la lettre et le 1^{er} chiffre :

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 15 \text{ codes, Vrai.}$$

55 1. a) Cf. cours page 242.

$$\begin{aligned} \text{b)} & \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \\ &= \underbrace{\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}}_{\binom{n-1}{k-1}} + \underbrace{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}}_{\binom{n-1}{k}} \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

2. a) $\binom{n-2}{k}$ tirages.

b) C'est l'événement contraire du précédent donc

$$\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}.$$

c) Le tirage contient exactement une boule rouge ou exactement deux boules, il y a donc

$$\binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1} + \binom{2}{2}\binom{n-1}{k-2} \text{ tirages.}$$

$$\text{Soit } 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

$$\text{D'après le 1.b)} \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}$$

$$\text{donc } 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} - \binom{n-2}{k}.$$

On retrouve donc bien le même résultat qu'au **2.b)**.