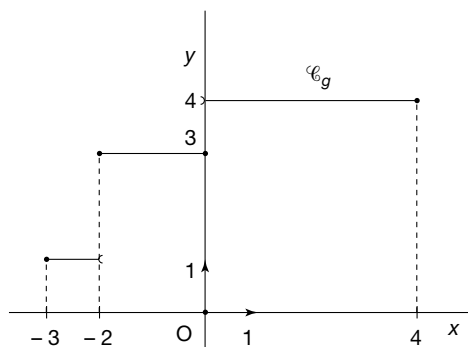


Activités (page 192)

ACTIVITÉ 1

2 Exemples

1. $I(f) = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 4 \times 4 = 23$.



2. Fig. 1 : $I(g) = 2 \times (-1) + 2 \times 3 + 2 \times 2 = 8$.

Fig. 2 : $I(g) = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times (-2) = 0$.

ACTIVITÉ 2

1. Cas $n = 5$.

a) $I(g_5) =$

$$\frac{1}{5} \times f(0) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} \times f\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right] = s_5$$

De même, $I(h_5) = S_5$.

b) Les fonctions en escalier g_5 et h_5 sont positives, donc $I(g_5)$ exprime l'aire en u.a. du domaine violet, $I(h_5)$ celui de la réunion des domaines violet et vert et enfin $I(h_5) - I(g_5)$ celui du domaine vert.

2. Cas général

$$a) s_n = \frac{1}{n} \times 0^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$s_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2].$$

De même : $S_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]$.

$$b) s_n = \frac{1}{n^3} \left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\text{et } S_n = \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Pour tout entier $n (n \geq 2)$:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2n^4 + n^3}{2n^4 + n^3 - 3n^2 - n + 1}.$$

Or le trinôme $X \mapsto -3X^2 - X + 1$ est négatif sur l'intervalle réel $\left] \frac{\sqrt{13}-1}{6}; +\infty \right[$, ainsi

$$0 < 2n^4 + n^3 - 3n^2 - n + 1 < 2n^4 + n^3 \text{ donc } \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$$

et la suite à termes positifs (s_n) est croissante.

$$\text{De même : } \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{2n^4 + 7n^3 + 6n^2}{2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1}.$$

Or $2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1$

$$= (2n^4 + 7n^3 + 6n^2) + (3n^2 + 5n + 1)$$

et $3n^2 + 5n + 1 > 0$

donc $2n^4 + 7n^3 + 6n^2 < 2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1$;

ainsi $\frac{S_{n+1}}{S_n} < 1$ et la suite à termes positifs (S_n) est décroissante.

c) $S_n - s_n = \frac{1}{n}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0$.

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Or $s_n = S_n - (S_n - s_n)$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = \frac{1}{3}.$$

Note : un calcul direct à partir de l'expression de s_n permet aussi d'obtenir ce résultat.

TD 1

L'objectif de ce TD est le calcul des aires de domaines plans définis à partir de courbes représentatives de fonctions définies sur un intervalle de \mathbb{R} . Le lien entre intégrale et aire est ici l'élément essentiel.

1 f est paire donc \mathcal{C}_f admet (Oy) comme axe de symétrie.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$ d'où

$\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$.

3. En raison de la symétrie, il suffit de calculer l'aire du « demi-domaine » obtenu pour $x \in [0; \sqrt{2}]$.

Ainsi $\mathcal{A} = 2[\int_0^1 f(t) dt - \int_1^{\sqrt{2}} f(t) dt]$ (en u.a.).

Or 1 u.a = 2 cm² donc $\mathcal{A} = 4[\int_0^1 f(t) dt - \int_1^{\sqrt{2}} f(t) dt]$

(en cm²); d'où $\mathcal{A} = \frac{48 - 16\sqrt{2}}{5}$ cm².

2 1. a) • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + xe^{-x}) = +\infty$.

• $f'(x) = e^{-x}(1 - x) + 1$; $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$.

| | | | |
|---------------|-------------------------------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| f''(x) | - | 0 | + |
| f' | ↘ 1 - e ⁻² (> 0) ↗ | | |

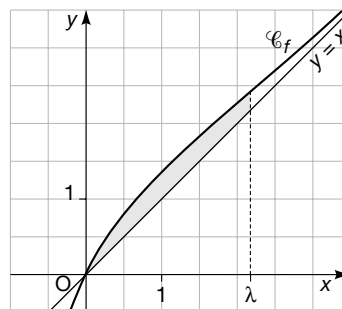
Ainsi pour tout réel x , $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

| | | | |
|----------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f | $-\infty$ | ↗ 0 ↘ | |

b) $f(x) - x = xe^{-x}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

Ainsi Δ est asymptote à \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$. Le signe de $f(x) - x$ est celui de x donc \mathcal{C}_f est au-dessous de Δ sur $]-\infty; 0[$, au-dessus de Δ sur $]0; +\infty[$ et Δ coupe \mathcal{C}_f en $O(0; 0)$.

c)



2. a) Lorsque λ est un réel positif,

$\mathcal{A}(\lambda) = 4 \times \int_0^\lambda (f(x) - x) dx = 4 \int_0^\lambda xe^{-x} dx$ (en cm²).

Par intégration par parties,

$\mathcal{A}(\lambda) = [-4xe^{-x}]_0^\lambda + 4 \int_0^\lambda e^{-x} dx$,

soit $\mathcal{A}(\lambda) = 4(-\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1)$.

b) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4$ cm².

TD 2

L'objectif de ce TD est le calcul des volumes de solides :

- à partir de la section par un plan perpendiculaire à un axe,
- par l'utilisation d'une homothétie de l'espace,
- par la révolution d'un domaine plan autour d'un axe.

1 1. La section est un disque centré sur l'axe (Oz) dont le rayon r est tel que $r^2 + z^2 = R^2$. D'où $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$. Le volume de la boule est alors $\mathcal{V} = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz$.

2. Ainsi $\mathcal{V} = 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}$ (en u.v.).

2 1. Par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{OH'}{OH} = \frac{z}{h}$, ABC a pour image A'B'C'; les aires

sont alors dans le rapport k^2 , d'où $S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}$.

2. Ainsi $\mathcal{V} = \int_0^h S \times \frac{z^2}{h^2} dz = \frac{S}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h$ donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} Sh$.

3 1. La section est un disque centré sur l'axe (Ox) et de rayon $r = f(x)$.

2. $S(x) = \pi f^2(x)$ soit $S(x) = \pi x$.

3. $\mathcal{V} = \int_0^4 S(x) dx = \pi \int_0^4 x dx$ donc $\mathcal{V} = 8\pi$ (en u.v.).

TD 3

L'objectif de ce TD est la mise en évidence de :

- L115a divergence de la suite définie par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (série harmonique).
- La convergence de la suite définie par $v_n = S_n - \ln n$ vers un réel γ .

Deux outils essentiels mis en œuvre à cette occasion :

- la comparaison d'une suite et d'une intégrale ;
- l'exploitation de deux suites adjacentes pour établir la convergence.

1. Conjonctures : (S_n) semble strictement croissante de limite $+\infty$.

2. a) Pour tout n de \mathbb{N}^* , $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$. Ainsi $S_{n+1} - S_n > 0$ donc (S_n) est strictement croissante.

b) Par comparaison d'aires, $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx$ soit $S_n \geq \ln(n+1)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

3. a) Pour tout entier, $n \geq 2$,

$$u_{n+1} - u_n = (S_n - S_{n-1}) - (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b) D'après l'inégalité indiquée, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

d'où $\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$ soit $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc (u_n) est croissante. [1]

4. a) Pour tout n de \mathbb{N}^* , $v_{n+1} - v_n =$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité indiquée,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

d'où $\frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$ soit $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

Donc (v_n) est décroissante. [2]

b) $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. [3]

D'après [1], [2] et [3], (u_n) et (v_n) sont adjacentes donc convergent vers un même réel γ .

Encadrement : $0,57 < \gamma < 0,58$.

TD 4

L'objectif de ce TD est la recherche de primitives lorsque la technique habituelle par lecture inverse du tableau de dérivation ne s'applique pas.

Deux méthodes sont abordées :

- l'utilisation de l'intégration par parties ;
- le calcul approché des valeurs prises par une primitive par la méthode des rectangles.

Les élèves découvrent alors l'existence de fonctions définies par une intégrale et dont les valeurs sont obtenues par tabulation.

1. Par intégration par parties :

$$F(x) = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \cos t \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{2t} \sin t dt,$$

d'où $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cos x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} G(x)$;

$$G(x) = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \sin t \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{2t} \cos t dt,$$

d'où $G(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} F(x)$.

2. On en déduit : $F(x) = e^{2x} \left[\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right] - \frac{2}{5}$,

et $G(x) = e^{2x} \left[-\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x \right] + \frac{1}{5}$.

3. Les fonctions : $x \mapsto e^{2x} \left[\frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right] - \frac{2}{5}$

et $x \mapsto e^{2x} \left[-\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x \right] + \frac{1}{5}$

sont des primitives de f et g sur \mathbb{R} , du type indiqué.

Application : Il s'agit de rechercher une primitive du type $x \mapsto e^{-2x} [A \cos(3x) + B \sin(3x)]$.

$$F(x) = e^{-2x} \left[-\frac{2}{13} \cos(3x) + \frac{3}{13} \sin(3x) \right]$$

et $G(x) = e^{-2x} \left[-\frac{3}{13} \cos(3x) - \frac{2}{13} \sin(3x) \right]$.

2. 1. a) La parité de f est immédiate donc \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

$f'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$; de plus, $f(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0^+$.

b) Pour tout réel $x \geq 0$, $F(x)$ exprime l'aire en u.a. du domaine $\mathcal{D} : \begin{cases} 0 \leq t \leq x \\ 0 \leq y \leq f(t) \end{cases}$; $F(-x)$ exprime

l'opposé de l'aire en u.a. du domaine

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} -x \leq t \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(t) \end{cases}; \text{ or } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ ont même aire,}$$

donc $F(-x) = -F(x)$ et F est impaire.

c) Pour tout réel x de $[0; +\infty[$,

$F'(x) = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ainsi $F' > 0$ et F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La limite de F en $+\infty$ correspond à l'aire « sous la courbe » \mathcal{C}_f sur $[0; +\infty[$,

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

2. a) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n - v_n = \frac{a}{n}[f(0) - f(a)] = \frac{a}{n}\left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right].$$

b) Pour tout n , $u_n - v_n > 0$. On cherche alors un

entier n tel que $\frac{a}{n}\left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right] < 10^{-2}$

$$\text{soit } n > 10^2 a \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right].$$

On peut prendre pour $n(a)$ l'entier :

$$n(a) = E\left[10^2 a \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\right] + 1.$$

c) Tableau des encadrements obtenus à la calculatrice :

| a | $n(a)$ | $F(a) \in \dots$ |
|------|--------|------------------|
| 0,25 | 1 | [0,24 ; 0,25] |
| 0,5 | 6 | [0,475 ; 0,485] |
| 1 | 40 | [0,85 ; 0,86] |
| 1,5 | 102 | [1,08 ; 1,09] |
| 2 | 173 | [1,19 ; 1,20] |
| 3 | 297 | [1,245 ; 1,255] |

TD 5

L'objectif de ce TD est de relier les notions de cinématique au calcul intégral :

- expression intégrale de la distance parcourue par un mobile sur un axe ;
- vitesse moyenne et valeur moyenne de la fonction vitesse.

1. Pour tout t de $[0; +\infty[$, $y'(t) = v(t)$. Donc v est une primitive de y sur $[0; +\infty[$.

$$2. \Delta(t_1; t_2) = y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} y'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Application numérique :

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Delta(0; 10) &= \int_0^{10} (t+1)e^{\frac{t}{10}} dt, \\ &= \left[10(t+1)e^{\frac{t}{10}}\right]_0^{10} - 10 \int_0^{10} e^{\frac{t}{10}} dt \end{aligned}$$

d'où $\Delta(0; 10) = 10e + 90$, soit $\Delta(0; 10) \approx 117$ m.

$$2. 1. V_M = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(t_1; t_2)}{t_2 - t_1}.$$

2. La valeur moyenne de la fonction v sur $[t_1; t_2]$ est :

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \frac{\Delta(t_1; t_2)}{t_2 - t_1} = V_M.$$

Application numérique :

$$V_M = \frac{1}{10} \int_0^{10} v(t) dt = \frac{\Delta(0; 10)}{10} = e + 9,$$

soit $V_M \approx 11,7$ m · s⁻¹.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 214)

1. et 2. Notions d'intégrale. Extensions

1 a) $I(f) = 10$; b) $I(f) = -16 + \sqrt{6}$; c) $I(f) = -3$.

$$2. 1. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad \text{et } I(f) = \frac{3}{2}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } 0 \leq x < \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \text{si } \sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{et } I(f) = 3 - \sqrt{6}.$$

$$3. 1. I(f) = \frac{17}{4} \quad 2. I(f) = \frac{5}{2}.$$

4 Dessin 1

1. $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ et $y \geq 0$.

\mathcal{C}_f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$.

2. $I(f) = 2\pi$.

Dessin 2

1. $M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ et $y-1 \geq 0$.

\mathcal{C}_f est le demi-cercle de centre $A(1; 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 1$.

2. $I(f) = \pi + 2\sqrt{2}$.

5 Corrigé dans le manuel.

3. Encadrement. Valeur moyenne

6 a) Pour tout x de $[1; 2]$:

$$x \leq x^2 \Rightarrow xe^x \leq x^2e^x \Rightarrow I \leq J.$$

b) Pour tout t de $[0; 1]$: $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{t}{1+t^2} \Rightarrow I \geq J$.

c) Pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ x^2 \leq x \end{cases} \Rightarrow x^2 \sin x \leq x \sin x \Rightarrow I \leq J.$$

7 a) Pour tout t de $[\frac{1}{2}; 1]$:

$$\begin{aligned} \ln t > \ln\left(\frac{1}{2}\right) &\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t dt \geq -\ln 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 dt \\ &\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t dt \geq -\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

b) Pour tout x de $[1; 2]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2} \int_1^2 dx \\ &\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Pour tout t de $[\frac{\pi}{2}; \pi]$:

$$-1 \leq \sin(t^2 + 1) \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t^2 + 1) dt \leq \frac{\pi}{2},$$

(inégalité de la moyenne).

8 Corrigé dans le manuel.

9 Les résultats s'obtiennent en utilisant l'inégalité de la moyenne.

a) Pour tout t de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^3} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt \leq 1.$$

b) Pour tout x de $[0; 2]$:

$$e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq 1 \Rightarrow 2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}} dx \leq 2.$$

c) Pour tout x de $[2; 4]$: $\ln 3 \leq \ln(x^2 - 1) \leq \ln 15 \Rightarrow$

$$2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2\ln 3 + 2\ln 5.$$

10 1. Pour tout t de $[0; 1]$, $1 + t^{n+1} \leq 1 + t^n$ d'où

$$\int_0^1 (1 + t^{n+1}) dt \leq \int_0^1 (1 + t^n) dt \text{ soit } I_{n+1} \leq I_n.$$

Donc (I_n) est décroissante.

2. D'autre part $I_n \geq 0$. (I_n) est décroissante, minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

11 $\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Or, \mathcal{C}_f est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$, donc $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $\mu = \frac{\pi}{4}$.

12 a) $\int_1^4 f(x) dx = 3\mu = 6$;

b) $\int_3^1 f(x) dx = -2\mu = -2\ln 2$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \mu = \frac{1}{2}$.

13 a) Pour tout x de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

b) Pour tout x de $[1; e]$:

$$0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_1^e \ln x dx \leq e - 1 \Rightarrow 0 \leq \mu \leq 1.$$

c) Pour tout x de $[1; \sqrt{2}]$: $e \leq e^{x^2} \leq e^2 \Rightarrow$

$$e(\sqrt{2} - 1) \leq \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} dx \leq e^2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow e \leq \mu \leq e^2.$$

Commentaire : Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, ($a < b$), bornée par les réels m et M , d'après l'inégalité de la moyenne,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

$$\text{d'où } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M, \text{ donc } m \leq \mu \leq M.$$

(Ceci justifie le nom d'« inégalité de la moyenne ».)

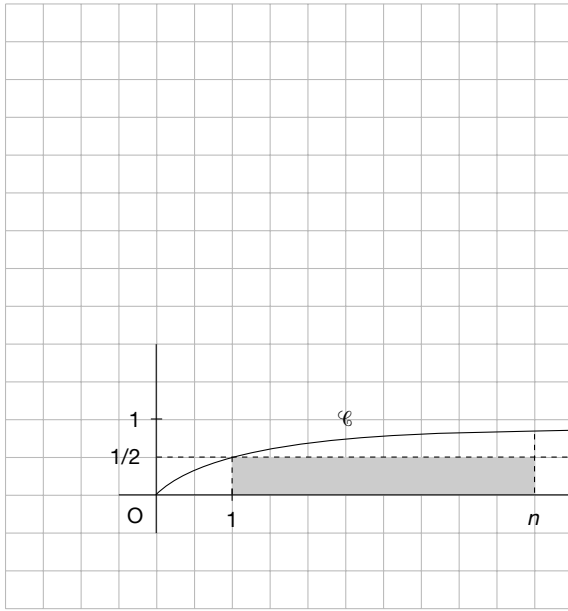
14 1. Pour tout x de $[n; n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$.

D'après l'inégalité de la moyenne : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

2. D'après le théorème d'encadrement, (I_n) converge vers 0.

15 1. $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(t) dt - \int_0^n f(t) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

Or $f \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi (u_n) est croissante.



2. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \int_0^n f(t) dt + \int_1^n f(t) dt$ d'où $u_n > \int_1^n f(t) dt$. [1]

Or f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc pour tout $t \geq 1$, $f(t) \geq f(1)$ soit $f(t) \geq \frac{1}{2}$.

Par intégration sur $[1; n]$, $\int_1^n f(t) dt \geq \int_1^n \frac{1}{2} dt$ soit $\int_1^n f(t) dt \geq \frac{n-1}{2}$ [2]. D'après [1] et [2], $u_n > \frac{n-1}{2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Ainsi (u_n) est divergente.

Remarque : Le graphique illustre la minoration de u_n qui exprime l'aire sous la courbe sur $[0; n]$ par l'aire du rectangle coloré.

4. et 5. Primitives

16 a) $F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$.
 b) $F'(x) = \cos x - x \sin x = f(x)$.

17 a) $F'(x) = 2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3} = f(x)$.

b) $F'(x) = \frac{x-1+x}{[x(x-1)]^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$.

18 a) $F'(x) = \ln x - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln x = f(x)$.

b) $F'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = f(x)$.

19 Corrigé dans le manuel.

20 a) Oui, car $G(x) - F(x) = 4$.

b) Oui, car $G(x) - F(x) = 1$.

21 a) Oui, car $G(x) - F(x) = \frac{-3}{2}$.

b) Oui, car $G(x) - F(x) = \frac{3}{2}$.

22 Non, car $G - F$ n'est pas constante sur I :

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad G\left(-\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

23 a) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$.

b) $F(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3}$. c) $F(x) = x + \frac{1}{x}$.

24 a) $F(x) = -\frac{1}{x^2}$. b) $F(x) = \frac{3}{x}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - x$.

25 a) $F(x) = 2\sqrt{2x+1}$. b) $F(x) = 2\sqrt{x^2-1}$.

c) $F(x) = -2\sqrt{-x^2-5x+6} - x$.

26 a) $F(x) = \frac{2\sqrt{x}}{3} - \frac{4}{3x} - x\sqrt{2}$. b) $F(x) = 2\sqrt{x-1}$.

c) $F(x) = -4\sqrt{1-x} - x$.

27 a) $F(x) = \frac{1}{4}(x+2)^4$. b) $F(x) = \frac{1}{18}(x-1)^6$.

c) $F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4$. d) $F(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^6$.

28 a) $F(x) = \frac{1}{8}(1+x^2)^8$. b) $F(x) = -\frac{1}{(x+4)^2}$.

c) $F(x) = -\frac{1}{3(3x-1)}$.

29 a) $F(x) = -\frac{1}{x^2 - x + 3}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 - 2x - 3)}$. c) $F(x) = -\frac{2}{3(x^3 + 8)^2}$.

30 a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

b) $F(x) = 3\sin x + \cos(2x) + x$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

31 a) $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$.

b) $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{3}{2}\sin^2 x + 8\sin x$.

c) $F(x) = 2\tan x - x$.

32 a) $F(x) = \ln(x-4)$. b) $F(x) = \ln(4-x)$.
c) $F(x) = \ln(x-x^2)$.

33 a) $F(x) = -e^{-x+1}$. b) $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x-2}$.
c) $F(x) = -e^{-\frac{x}{2}}$. d) $F(x) = -e^{\cos x}$.

34 a) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^3 - 2x^2 + x - \frac{42}{5}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$; $I =]0; +\infty[$.

c) $F(x) = -\frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}$; $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

35 a) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{2}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = 4\sin\frac{x}{2} + 6\cos\frac{x}{2} - 5\sqrt{2}$; $I = \mathbb{R}$.

36 Corrigé dans le manuel.

37 a) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} - \frac{e^{-2}}{3}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{5}{4}$; $I = \mathbb{R}$.

c) $F(x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln 3 = \ln\left(\frac{x^2-1}{3}\right)$;
 $I =]1; +\infty[$.

6. Calculs d'intégrales

38 a) $I = -4$. b) $I = -6$.

c) $I = \frac{23}{6} - \ln 2$. d) $I = 1 - 2\ln 2$

39 a) $I = 4$. b) $I = 4$. c) $I = \frac{6}{5}$. d) $I = 1$.

40 a) $I = \frac{15}{8}$. b) $I = 2$. c) $I = \frac{\ln 6}{4}$.

41 a) $I = 2\sqrt{5} - 2$. b) $I = \frac{3}{7}$. c) $I = \frac{1}{2}$. d) $I = 0$.

42 Corrigé dans le manuel.

43 a) $I = \ln 2 - \frac{1}{3}\ln 5$. b) $I = \frac{5}{3}(e^3 - 1)$.

c) $I = \frac{e^7 - e}{3}$. d) $I = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

44 $I = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} + \ln 3$;

$$J = \int_2^1 \frac{1}{2x} dx + \int_1^2 x dx = -\ln 2 - \frac{3}{8}.$$

45 a) $I = \int_1^e (\ln t + t - \ln t) dt = \int_1^e t dt = \frac{e^2 - 1}{2}$.

b) $J = \int_1^1 \ln(1+t^2) dt = 0$.

c) $K = \int_1^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t dt + \int_{\frac{7\pi}{6}}^1 \cos 2t dt = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t dt$
 $= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6} + \pi} \cos 2t dt = 0$.

46 1. $f(x) = \frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{x-3} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{x+3}$,

$(a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{6})$.

2. $I = \frac{1}{6} \left(\int_4^5 \frac{1}{4x-3} dx - \int_4^5 \frac{1}{4x+3} dx \right)$
 $= -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{6} \ln 7 = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{7}{4} \right)$.

47 1. $f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3}$,

$(a = 4, b = -17, c = 52)$.

2. $I = \int_2^0 (4x - 17) dx + 52 \int_2^0 \frac{1}{2x+3} dx$
 $= 26 + 52 \ln 3 - 52 \ln 5$.

48 Corrigé dans le manuel.

49 1. $1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$.

2. $I = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = 1 + \ln 2 - \ln(1+e)$.

50 Zoom sur le théorème 9

1. Cette condition assure l'existence de chaque terme dans la formule.

2. a) $I = \int_0^1 f(t) dt$ est bien définie puisque la fonction f est continue sur $[0; 1]$.

En posant $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = t$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$ les hypothèses ne sont pas vérifiées pour u et u' sur $[0; 1]$ (par exemple u et u' ne sont pas définies en 0). D'où l'impossibilité d'appliquer le théorème 9.

b) Par contre pour tout $\alpha > 0$, les conditions sont vérifiées sur l'intervalle fermé d'extrémités α et 1.

Par intégration par parties,

$$I(\alpha) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 t dt = -\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4}.$$

Note : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha) = -\frac{1}{4}$. On définit alors la valeur de I par

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha) = -\frac{1}{4}.$$

51 a) $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.

(Poser $u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = x$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$.)

b) $I = e^2 + 1$.

(Poser $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$.)

52 a) $I = -2$.

(Poser $u(x) = x - 1$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$.)

b) $J = 2e - 1$.

(Poser $u(x) = x + 2$, $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^x$, $v(x) = e^x$.)

53 a) $I = \frac{\pi}{3}$. (Poser $u(x) = 3x$, $u'(x) = 3$, $v'(x) = \sin(3x)$,

$$v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x).$$

b) $J = 3 - 5e^{-1}$.

(Poser $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$.)

54 Corrigé dans le manuel.

55 $F(x) = \int_{\pi}^x t \cos t dt = x \sin x + \cos x + 1$.

(Poser $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = \cos t$, $v(t) = \sin t$.)

56 $F(x) = \int_1^x t^2 \ln t dt = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$.

(Poser $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = t^2$, $v(t) = \frac{t^3}{3}$.)

57 $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$.

(Poser $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = \frac{1}{t^2}$, $v(t) = -\frac{1}{t}$.)

58 $F(x) = \int_0^x 2te^{-\frac{t}{2}} dt = -4xe^{-\frac{x}{2}} - 8e^{-\frac{x}{2}} + 8$.

(Poser $u(t) = 2t$, $u'(t) = 2$, $v'(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, $v(t) = -2e^{-\frac{t}{2}}$.)

Apprendre à chercher

(page 218)

59 Rechercher une primitive

Les outils :

- Intégration par parties.
- Dérivations successives.
- Relations fonctionnelles.

Les objectifs :

- Calculer une primitive.
- Prévoir une double intégration par parties.
- Établir des relations entre dérivées successives.

1. a) f est continue sur \mathbb{R} d'où le résultat d'après le théorème 7.

b) Poser $u(t) = \sin(2t)$, $u'(t) = 2\cos(2t)$, $v(t) = e^t$, $v'(t) = e^t$, d'où le résultat par intégration par parties.

2. a) Par une seconde intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(2t) dt &= e^x \cos(2x) - 1 + 2 \int_0^x e^t \sin(2t) dt \\ &= e^x \cos(2x) - 1 + 2F(x). \end{aligned}$$

b) $F(x) = e^x \sin(2x) - 2[e^x \cos(2x) - 1 + 2F(x)]$, d'où :

$$F(x) = -\frac{2}{5} e^x \cos(2x) + \frac{1}{5} e^x \sin(2x) + \frac{2}{5}.$$

3. a) $f'(x) = e^x [2\cos(2x) + \sin(2x)]$;
 $f''(x) = e^x [4\cos(2x) - 3\sin(2x)]$.

b) $f(x) = -\frac{1}{5} f''(x) + \frac{2}{5} f'(x)$, $\left(a = -\frac{1}{5}, b = \frac{2}{5}\right)$.

c) Une primitive sur \mathbb{R} de f est définie par :

$$x \mapsto -\frac{1}{5} f'(x) + \frac{2}{5} f(x) = e^x \left[-\frac{2}{5} \cos(2x) + \frac{1}{5} \sin(2x) \right].$$

Note : On retrouve (à une constante près) l'expression du **2. b)**.

60 Primitives de $x \mapsto Q(x)e^{-x}$

Les outils :

- Identification de deux écritures polynomiales.
- Dérivation.
- Forme intégrale d'une primitive.
- Intégration par parties.

Les objectifs :

- Prouver l'existence d'une primitive d'un type donné.
- Calculer sur des polynômes.
- Prévoir une triple intégration par parties.

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &\Leftrightarrow e^{-x}(P'(x) - P(x)) = e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &\Leftrightarrow P'(x) - P(x) = x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

2. Immédiat : $d(P) \leq 3$.

Note : Il est aisé de prouver qu'en fait, $d(P) = 3$.

3. Pour tout réel x ,

$$-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + c - d = x^3 + x^2 + x + 1;$$

par identification des coefficients : $a = -1$, $b = -4$, $c = -9$, $d = -10$ et $P(x) = -x^3 - 4x^2 - 9x - 10$.

4. On vérifie aisément que $x \mapsto P(x)e^{-x}$ a pour dérivée $x \mapsto f(x)$. Ainsi $F : x \mapsto (-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de f .

6. Par trois intégrations par parties successives :

$$F(x) = \int_0^x (t^3 + t^2 + t + 1)e^{-t} dt$$

$$= [-e^{-t}(t^3 + t^2 + t + 1)]_0^x + \int_0^x e^{-t}(3t^2 + 2t + 1) dt$$

$$= -e^{-x}(x^3 + x^2 + x + 1) + 1 + G(x) \quad [1];$$

$$G(x) = \int_0^x e^{-t}(3t^2 + 2t + 1) dt$$

$$= [-e^{-t}(3t^2 + 2t + 1)]_0^x + \int_0^x e^{-t}(6t + 2) dt$$

$$= -e^{-x}(3x^2 + 2x + 1) + 1 + H(x) \quad [2];$$

$$H(x) = \int_0^x e^{-t}(6t + 2) dt = [-e^{-t}(6t + 2)]_0^x + 6 \int_0^x e^{-t} dt$$

$$= -e^{-x}(6x + 2) + 2 + 6(-e^{-x} + 1) \quad [3].$$

D'où $F(x) = e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10) + 10$.
 F est la primitive de f , sur \mathbb{R} , qui s'annule en 0 d'où
 $x \mapsto e^{-x}(-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)$ est une primitive du
type cherché.

61 Une suite d'intégrales

Les outils :

- Intégration par parties.
- Calcul algébrique.
- Encadrements d'intégrales.

Les objectifs :

- Savoir calculer le terme général d'une suite d'intégrales.
- Savoir établir puis exploiter une relation de récurrence.
- Savoir prouver la convergence d'une suite.

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = 1$.

2. a) Pour tout entier n ($n \geq 2$) :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t dt$$

$$= [-\cos t \sin^{n-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t dt$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t dt,$$

soit $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$.

b) D'où $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3. Pour tout entier $k \geq 1$:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} ; \quad I_{2k-2} = \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} ; \dots ;$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 ; \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0.$$

4. a) Pour tout entier n , $\sin^n x > 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc $I_n > 0$.

b) Par multiplication membre à membre et simplification :

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0,$$

$$\text{soit } I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Note : On peut exprimer I_{2k} à l'aide de la notation factorielle :

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) De même :

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times I_1,$$

$$\text{soit } I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \times \frac{2k-2}{2k-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1.$$

Note : On peut exprimer I_{2k+1} à l'aide de la notation factorielle :

$$I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Prolongement :

1. a) Pour tout x de $]0; \frac{\pi}{2}[$, $0 \leq \sin x \leq 1$, d'où le rangement des puissances successives :

$$0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \leq 1.$$

b) Par intégration de ces inégalités sur $]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$0 < I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} \leq 1.$$

$$\text{D'où } \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq 1 \text{ et } \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}};$$

$$\text{or, } \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \text{ d'après 2. b),}$$

$$\text{donc } 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

2. D'après 4. :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left[\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \right]^2 \times (2n+1) \times \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{D'où } u_n = \left[\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \right] \times \frac{2}{\pi} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}.$$

Pour progresser

(page 220)

Calculs de primitives

62 a) $F(x) = \frac{1}{10}(x^2 + 2x - 1)^5$.

b) $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$.

c) $F(x) = -\sqrt{x^2 - 2x + 2}$. d) $F(x) = -\frac{1}{12}(-2x + 1)^6$.

63 a) $F(x) = \frac{2}{3} \ln(3x+1)$. b) $F(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3-1)$.

c) $F(x) = \frac{1}{3} \ln(1-x^3)$. d) $F(x) = \ln(-\sin x)$.

64 a) $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1}$. b) $F(x) = -\frac{2}{3} e^{-3x+2}$.

c) $F(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{x}}$. d) $F(x) = e^{\frac{2x+1}{x+1}}$.

65 • a) $F(x) = x \sin x$. b) $F(x) = \frac{-\sin x}{x}$.

c) $F(x) = \frac{-\ln x}{x}$. d) $F(x) = x\sqrt{x+1}$.

66 • a) $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$. b) $F(x) = \ln(\ln x)$.

c) $F(x) = \ln(e^x + e^{-x})$.

67 • Corrigé dans le manuel.

68 • 1. $u'(x) = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x}$
 $= \frac{\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

2. D'où $v(x) = \frac{1}{3} \left[u'(x) + \frac{2}{\cos^2 x} \right]$. Les primitives de v sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ sont définies par $x \mapsto \frac{1}{3} [u(x) + 2 \tan x] + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Or $V(0) = 0$, donc $k = 0$ et $V(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2 \tan x \right]$.

69 $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$; $F(x) = x + \ln(x-1)$.

70 $f(x) = 2 + \frac{3}{2x+1}$; $F(x) = 2x + \frac{3}{2} \ln(-2x-1)$.

71 $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x-2}$; $F(x) = x^2 + x - 2 \ln(x-2)$.

72 a) $F(x) = \ln(x-3) + \ln(x+3) = \ln(x^2-9)$.

b) $F(x) = \ln(3-x) + \ln(x+3) = \ln(9-x^2)$.

c) $F(x) = \ln(3-x) + \ln(-3-x) = \ln(x^2-9)$.

73 $f(x) = 1 + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$;

$F(x) = x + \ln(-x-2) - \frac{1}{x+2}$.

74 $f(x) = 2x + 1 - \frac{7}{(x+3)^2}$; $F(x) = x^2 + x + \frac{7}{x+3}$.

75 • Corrigé dans le manuel.

76 • $f(x) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(x+1)^2}$;

$F(x) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x+1}$.

77 • $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^3}$;

$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{(x+1)^2}$.

78 • $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$;

$F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{(x+1)^3}$.

79 $f(x) = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$;

$F(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

80 $f(x) = \sin x(1 + \sin^2 x) = \sin x(2 - \cos^2 x)$
 $= 2 \sin x - \sin x \cos^2 x$;

$F(x) = -2 \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$.

81 $f(x) = \sin x [\sin^2 x \cos 2x]$
 $= \sin x (1 - \cos^2 x) \cos 2x$
 $= \sin x [\cos^2 x - \cos^4 x]$;

$F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x$.

82 • $f(x) = \cos x [\sin^4 x \cos^4 x]$
 $= \cos x \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 = \cos x [\sin^4 x - 2 \sin^6 x + \sin^8 x]$;

$F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x$.

Pour les exercices 83 à 85, la linéarisation à l'aide des nombres complexes a été abordée au chapitre 12, TD 3, page 332, mais elle peut aussi être traitée à partir des formules :

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ [1].

83 $f(x) = \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$;

$F(x) = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)$.

84 Exemple de linéarisation à l'aide des formules [1].

$f(x) = \cos^4 x = [\cos^2 x]^2 = \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right]^2$

$= \frac{1}{4} [1 + 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)]$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + 2 \cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) ;$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x).$$

85 • $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x = \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right]^2 \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^4$

$$= -\frac{1}{64} (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

$$= -\frac{1}{64} [e^{6ix} + e^{-6ix} + 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) - 4]$$

$$= -\frac{1}{32} \cos(6x) - \frac{1}{16} \cos(4x) + \frac{1}{32} \cos(2x) + \frac{1}{16} ;$$

$$F(x) = -\frac{1}{192} \sin(6x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{64} \sin(2x) + \frac{1}{16}x.$$

86 • Corrigé dans le manuel.

87 • 1. $f'(x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$;
 $f''(x) = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$.

2. $f(x) = -\frac{1}{5}f''(x) + \frac{4}{5}f'(x)$, $\left(a = -\frac{1}{5} ; b = \frac{4}{5} \right)$.

3. $F(x) = -\frac{1}{5}f'(x) + \frac{4}{5}f(x)$,

d'où $F(x) = \frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x + \sin x)$.

88 • $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}$;
 $F'(x) = e^{2x}[2ax^3 + (2b + 3a)x^2 + (2c + 2b)x + 2d + c]$.
 Pour tout réel x ,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{3}{4}, d = -\frac{3}{8}.$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{2x}.$$

Calculs d'intégrales

89 $I = \frac{15}{4}$; $J = \frac{5}{48}$. **90** $I = \frac{1}{2}$; $J = 0$.

91 $I = \frac{\ln 5}{2}$; $J = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$.

92 $I = -\frac{4}{3}$; $J = 3(2 - \sqrt{2})$.

93 $I = -\frac{2}{\pi}$; $J = \frac{\pi}{6}$.

94 $I = \frac{e^7 - e^5}{3}$; $J = e^{\frac{1}{2}} - e$.

95 • $I = \frac{2}{3}$; $J = \frac{5\pi}{24} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

96 • $a = 1, b = -1, c = -1, I = 2 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6}$;
 $a = 1, b = -2, c = 3, J = 3 \ln 2 - \frac{5}{2}$.

97 • $I = \ln 2$; $J = \ln 2$.

98 • $\frac{2x}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x-1} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{x+2}$, d'où :

$$I = \frac{4}{3} \ln 5 - 2 \ln 2 .$$

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{2x + 3} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{2x + 3}, \text{ d'où } J = \frac{9}{2} - \frac{5}{8} \ln 3 .$$

99 a) f impaire : $I = 0$. b) f impaire : $I = 0$.

100 a) f impaire : $I = 0$. b) f impaire : $I = 0$.

101 1. $I_1 = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

2. $I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x + x^3}{1 + x^2} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, d'où :

$$I_2 = (I_1 + I_2) - I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2} .$$

102 • Corrigé dans le manuel.

103 • $f(x) = (1 - x)e^x$; $f'(x) = -xe^x$;
 $f''(x) = (-x - 1)e^x$; d'où $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$.

$f(x) = 2f'(x) - f''(x)$ donc une primitive de f sur \mathbb{R} est définie par $F(x) = 2f(x) - f'(x) = (2 - x)e^x$. D'où :

$$I = F(1) - F(0) = e - 2 .$$

104 • $f(x) = x \sin x$; $f'(x) = \sin x + x \cos x$;

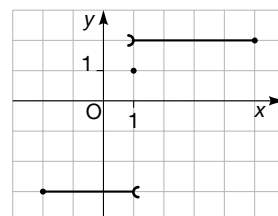
$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$; d'où $f(x) + f''(x) = 2 \cos x$.

$f(x) = 2 \cos x - f''(x)$ donc une primitive de f sur \mathbb{R} est définie par $F(x) = 2 \sin x - f'(x) = \sin x - x \cos x$.
 D'où :

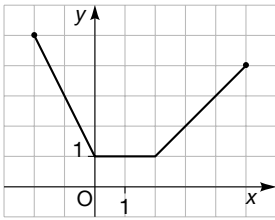
$$I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1 .$$

Calculs à l'aide des aires

105 a) $I(f) = -3 \times 3 + 2 \times 4 = -1$.



b) $I(f) = 6 + 2 + \frac{15}{2} = \frac{31}{2}$.



106 Dessin 1 : $I(f) = 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$.

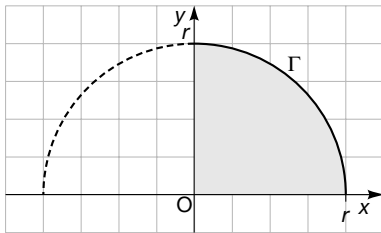
Dessin 2 : $I(f) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Dessin 3 : $I(f) = -2 + \frac{1}{2} + \ln 4 = -\frac{3}{2} + 2\ln 2$.

107 Corrigé dans le manuel.

108 1. Γ est le quart de cercle de centre O et de rayon r situé dans le premier quadrant.

2. $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4}$; $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{2}$.

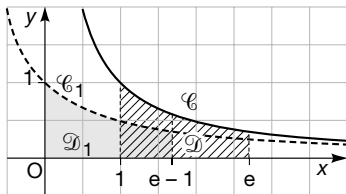


109 1. $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$; $f_2(x) = \frac{1}{x} - 1$.

2. On utilise une interprétation par les aires.

• \mathcal{D}_1 est l'image de \mathcal{D} par $T_{-\vec{i}}$ donc :

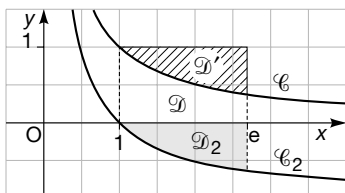
$$I_1 = \text{aire}(\mathcal{D}_1) = \text{aire}(\mathcal{D}) = \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1.$$



• \mathcal{D}_2 est l'image de \mathcal{D}' par $T_{-\vec{j}}$ donc :

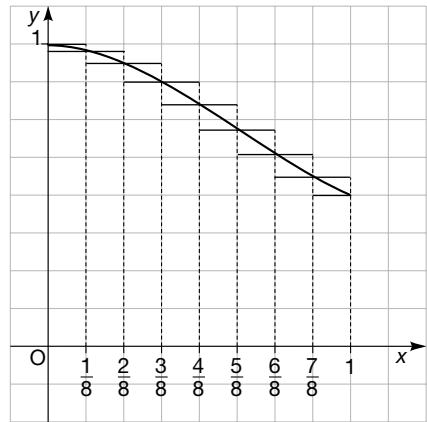
$$I_2 = -\text{aire}(\mathcal{D}_2) = -\text{aire}(\mathcal{D}').$$

Or, $\text{aire}(\mathcal{D}') = (e-1) - \text{aire}(\mathcal{D}) = e-2$ donc $I_2 = 2 - e$.



Remarque : Un calcul direct à partir des expressions de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ permet d'obtenir le résultat.

110 • 1.



2. a) $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{8}\right) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 f\left(\frac{k}{8}\right)$,

soit $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 \frac{64}{64+k^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 \frac{64}{64+k^2}$,

donc $8 \sum_{k=1}^8 \frac{1}{64+k^2} \leq \mathcal{A} \leq 8 \sum_{k=0}^7 \frac{1}{64+k^2}$.

b) Amplitude : $\frac{1}{8} [f(0) - f(1)] = \frac{1}{16}$.

$3. 0,753 \leq I \leq 0,816$.

111 • 1. f est décroissante et positive sur $[0; 3]$. Par la méthode des rectangles :

$$A = \frac{3}{n} [f(0) - f(3)] = \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \text{ d'où } A < \frac{21}{10n}.$$

2. Il suffit que $\frac{21}{10n} \leq 10^{-2}$ donc $n \geq 210$. On peut prendre $n_0 = 210$.

3. À la calculatrice, à l'aide du programme du TD 4, page 212 : $1,8135 \leq I \leq 1,8234$.

Remarque : La condition est seulement suffisante; la précision peut être obtenue avant le rang 210.

112 • 1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

2. La fonction aire est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

3. Pour tout x de $[0; 1[\cup]1; 2]$, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Pour tout h tel que $0 < h < 1$,

$$T(h) = \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{1+h - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{h} = 1,$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = 1$.

Pour tout h tel que $-1 < h < 0$,

$$T(h) = \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2}{2} - \frac{1}{2}}{h} = 1 + \frac{h}{2},$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = 1$.

Ainsi F est dérivable en 1 avec $F'(1) = 1 = f(1)$. F est donc une primitive de f sur $[0; 2]$.

113 • 1. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

2. • En évaluant les aires des trapèzes indiqués, on définit $F(x)$.

Si $-1 \leq x < 0$, $F(x) = -\frac{(x+2)(-x)}{2} = \frac{x^2}{2} + x$.

Si $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = \frac{(-x+2)x}{2} = \frac{-x^2}{2} + x$.

• Pour tout x de $[-1; 0[\cup]0; 1]$, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

• Pour tout $h > 0$ dans $]0; 1]$,

$$T(h) = \frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{\frac{-h^2}{2} + h}{h} = 1 - \frac{h}{2},$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0^+} T(h) = 1$.

• Pour tout $h < 0$ dans $[-1; 0[$,

$$T(h) = \frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{\frac{h^2}{2} + h}{h} = 1 + \frac{h}{2},$$

donc $\lim_{h \rightarrow 0^-} T(h) = 1$.

F est donc dérivable en 0 avec $F'(0) = 1 = f(0)$. Ainsi F est la primitive de f sur $[-1; 1]$ telle que $F(0) = 0$.

Intégration par parties

114 $F(x) = \int_1^x \ln(t^2) dt = 2 \int_1^x \ln t dt = 2(x \ln x - x + 1)$;

(voir l'exercice résolu 9, page 205).

Note : Une intégration par parties sans transformation de $\ln(t^2)$ est aussi possible.

115 $F(x) = \int_0^x (2t+1) \sin t dt$
 $= [-(2t+1) \cos t]_0^x + 2 \int_0^x \cos t dt$
 $= -(2x+1) \cos x + 1 + 2 \sin x$.

116 • $F(x) = \int_0^x \ln(t+2006) dt$
 $= [(t+2006) \ln(t+2006)]_0^x - \int_0^x dt$
 $= (x+2006) \ln(x+2006) - 2006 \ln 2006 - x$.

Note : Ne pas oublier que le choix d'une primitive (à une constante près) peut faciliter les calculs.

117 • $F(x) = \int_{-1}^x (t+1)^2 e^{2t} dt$
 $= \left[\frac{1}{2} (t+1)^2 e^{2t} \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x (t+1) e^{2t} dt$
 $= \frac{1}{2} (x+1)^2 e^{2x} - G(x)$.

Or $G(x) = \left[\frac{1}{2} (t+1) e^{2t} \right]_{-1}^x - \frac{1}{2} \int_{-1}^x e^{2t} dt$
 $= \frac{1}{2} (x+1) e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2}$,

donc $F(x) = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{e^{-2}}{4}$.

118 • Corrigé dans le manuel.

119 • $F(x) = \int_1^x (\ln t)^2 dt = [t(\ln t)^2]_1^x - 2 \int_1^x \ln t dt$
 $= x(\ln x)^2 - 2G(x)$.

Or $G(x) = \int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1$ (voir l'exercice résolu 9, page 205), donc

$F(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - 2$.

120 • 1. a) $F(x) = [t \cos(\ln t)]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t) dt$
 $= x \cos(\ln x) - 1 + G(x)$.

b) $G(x) = [t \sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \cos(\ln t) dt$
 $= x \sin(\ln x) - F(x)$.

2. $F(x) = \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - 1]$;

$G(x) = \frac{1}{2} [-x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) + 1]$.

121 • 1. • $I = [-e^{1-t} \cos t]_0^1 - \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt$
 $= -\cos 1 + e - J$.

• $J = [-e^{1-t} \sin t]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt = -\sin 1 + I$.

2. $I = \frac{1}{2} (\sin 1 - \cos 1 + e)$ et $J = \frac{1}{2} (-\sin 1 - \cos 1 + e)$.

122 • 1. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$I = [\ln(x + \sqrt{x^2-1})]_{\sqrt{2}}^2 = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} \right)$.

2. $I + J = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \right) dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx$
 $= [x \sqrt{x^2-1}]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1} dx$
 $= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - J$.

D'où $J = \frac{1}{2} [2\sqrt{3} - \sqrt{2} - I] = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} \right)$.

Note : Dans l'intégration par parties, écrire :

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = x \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

123 • 1. $K = [e^x \cos(2x)]_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^x \sin(2x) dx$
 $= e^\pi - 1 + 2K.$

Or $K' = [e^x \sin(2x)]_0^\pi - 2 \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx = -2K,$
 donc :

$$K = e^\pi - 1 - 4K, \text{ d'où } K = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

2. $I + J = \int_0^\pi e^x dx = e^\pi - 1;$

$I - J = \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx = K.$

D'où : $I = \frac{1}{2}(e^\pi - 1 + K) = \frac{3}{5}(e^\pi - 1),$

$$J = \frac{1}{2}(e^\pi - 1 - K) = \frac{2}{5}(e^\pi - 1).$$

3. $I = \int_0^\pi e^x \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x dx + \frac{1}{2} K$
 $= \frac{1}{2}(e^\pi - 1) + \frac{1}{2} \times \frac{e^\pi - 1}{5} = \frac{3}{5}(e^\pi - 1).$

De même :

$$J = \int_0^\pi e^x \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x dx - \frac{1}{2} K = \frac{2}{5}(e^\pi - 1).$$

124 • 1. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$

b) $I = [\ln(x + \sqrt{x^2+2})]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).$

2. a) $J + 2I = \int_0^2 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^2 \sqrt{x^2+2} dx = K.$

b) $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = [x\sqrt{x^2+2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$
 $= \sqrt{3} - J.$

c) $J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1 + \sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2});$

$$K = J + 2I = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}).$$

125 • 1. Pour tout $x > 1,$

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1}.$$

a) Pour tout $x > 1,$

$$G(x) = -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1)$$

$$= -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1).$$

2. Pour tout $x > 1, F(x) = -\frac{1}{x^2-1}.$

3. $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \times \ln x dx.$

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2},$ alors

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{x^2-1};$ d'où par intégration par parties :

$$I = \left[-\frac{\ln x}{x^2-1} \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx$$

$$= -\frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 2}{3} + [G(x)]_2^3$$

$$= -\frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 2}{3} - \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 8 + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$$

donc $I = \frac{17}{6} \ln 2 - \frac{13}{8} \ln 3.$

Encadrement. Théorème de la moyenne

126 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ implique $0 \leq x^n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ et

$0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}$ implique $0 \leq \sin(2x) \leq 1,$ donc

$$0 \leq x^n \sin(2x) \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^n.$$

Par intégration sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$

127 1. $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ de $x \mapsto 1 \tan^2 x,$ qui s'annule en 0, d'où l'écriture intégrale.

2. a) Pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right],$

$$0 \leq \tan t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2.$$

b) Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right],$ d'après l'inégalité de la moyenne sur $[0; x]:$

$$x \leq \int_0^x (1 + \tan^2 t) dt \leq 2x, \text{ soit } x \leq \tan x \leq 2x.$$

128 • Corrigé dans le manuel.

129 • 1. $u'(x) = 1 - e^{-x};$

| | | |
|---------|---|----------|
| x | 0 | 1 |
| $u'(x)$ | 0 | + |
| u | 0 | e^{-1} |

$u(x) \geq 0,$ donc $e^{-x} \geq 1 - x.$

• $v'(x) = -1 + x + e^{-x} = u(x)$;

| | | |
|---------|---|------------------------|
| x | 0 | 1 |
| $v'(x)$ | 0 | + |
| v | 0 | $\frac{1}{2} - e^{-1}$ |

$v(x) \geq 0$, donc $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.
Ainsi pour tout x de $[0; 1]$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ [1].

2. $x \in [0; 1] \Rightarrow x^2 \in [0; 1]$

$\Rightarrow 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$

$\Rightarrow \frac{1 - x^2}{1 + x} \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq \frac{1 - x^2}{1 + x} + \frac{x^4}{2(1 + x)}$.

D'où $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1 + x)}$ [2].

3. a) Vérification immédiate.

b) Pour tout x de $[0; 1]$, d'après [2] et 3. a) :

$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1 + x} \leq 1 - x + \frac{1}{2} \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1 + x} \right)$.

Par intégration sur $[0; 1]$: $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2} \ln 2$, d'où $0,5 \leq I \leq 0,56$; $I \approx 0,53$ (à 3×10^{-2} près).

130 • 1. a) $g'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$;

| | | |
|---------|---------------|--------------|
| x | 0 | 1 |
| $g'(x)$ | $\frac{1}{2}$ | + |
| g | $\ln 2$ | $\ln(1 + e)$ |

$T_A : y = \frac{1}{2}x + \ln 2$.

b) $P\left(1; \frac{1}{2} + \ln 2\right)$; aire(OIPA) = $\ln 2 + \frac{1}{4}$ u.a.;

aire(OIBA) = $\frac{\ln 2 + \ln(1 + e)}{2} = \ln[\sqrt{2(1 + e)}]$ u.a.

2. aire(OIPA) $\leq \int_0^1 g(x) dx \leq$ aire(OIBA), soit :

$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln[\sqrt{2(1 + e)}]$.

3. $J = [x \ln(1 + e^x)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1 + e^x) dx$

$= \ln(1 + e) - \int_0^1 g(x) dx$

D'où l'encadrement :

$\ln(1 + e) - \ln[\sqrt{2(1 + e)}] \leq J \leq \ln(1 + e) - \ln 2 - \frac{1}{4}$,

soit $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) \leq J \leq \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) - \frac{1}{4}$.

131 • 1. a) $I_1 = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$; $I_0 + I_1 = \int_0^1 dx = 1$;

$I_0 = 1 - \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$.

b) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 e^{nx} dx = \frac{e^n - 1}{n}$.

2. Pour tout x de $[0; 1]$, $\frac{1}{1 + e} \leq \frac{1}{1 + e^x} \leq \frac{1}{2}$ et

$e^{nx} > 0$, d'où $\frac{e^{nx}}{1 + e} \leq \frac{e^{nx}}{1 + e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$.

Par intégration sur $[0; 1]$, $\frac{e^n - 1}{(1 + e)n} \leq I_n \leq \frac{e^n - 1}{2n}$.

3. • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{(1 + e)n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e} \times \left[\frac{e^n}{n} - \frac{1}{n} \right] = +\infty$,

donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

• $\frac{1 - e^{-n}}{(1 + e)n} \leq \frac{I_n}{e^n} \leq \frac{1 - e^{-n}}{2n}$, d'après le théorème

d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$.

132 • 1. a) $I_1 = \int_0^2 (2 - x)e^x dx$ d'où par intégration par parties $I_1 = e^2 - 3$.

2. Pour tout réel x de $[0; 2]$ et tout n de \mathbb{N}^* , $0 \leq (2 - x)^n \leq 2^n$ d'où $0 \leq (2 - x)^n e^x \leq 2^n e^x$.

Par intégration sur $[0; 2]$,

$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^2 (2 - x)^n e^x dx \leq \frac{2^n}{n!} \int_0^2 e^x dx$

soit $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$ [1].

3. Pour tout n de \mathbb{N}^* , $I_{n+1} = \frac{1}{(n + 1)!} \int_0^2 (2 - x)^{n+1} e^x dx$ d'où par intégration par parties

$I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n + 1)!} (2 - x)^{n+1} e^x \right]_0^2 + \frac{(n + 1)}{(n + 1)!} \int_0^2 (2 - x)^n e^x dx$

soit $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!}$.

4. On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$, $1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 3 + e^2 - 3 = e^2$ donc la formule est vraie au rang 1.

Supposons la formule vraie pour un entier n , $n \geq 1$,

c'est-à-dire, $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$, alors

$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!}$ soit en utilisant l'hypothèse de récurrence

$I_{n+1} = e^2 - \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) - \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!}$ d'où

$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!} + I_{n+1} = e^2$ donc la

formule est vraie au rang $n + 1$.

Ainsi la formule est vraie pour tout n de \mathbb{N}^* .

$$5. a) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n+1 \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 3. \text{ Puisque } u_n \text{ est positif,}$$

on en déduit que pour $n \geq 3$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

b) Dans ces conditions pour tout $n > 3$:

$$u_4 \leq \frac{1}{2} u_3$$

$$u_5 \leq \frac{1}{2} u_4$$

$$\dots$$

$$u_n \leq \frac{1}{2} u_{n-1}.$$

Par multiplication de ces inégalités entre réels > 0 puis simplification, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3$.

$$\text{Ainsi } 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3.$$

Note : Cet encadrement peut aussi être obtenu par récurrence.

6. a) Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Mais [1] s'écrit $0 \leq I_n \leq u_n (e^2 - 1)$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

b) Or $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} = e^2 - I_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right) = e^2.$$

Calculs d'aires et de volumes

$$133 \text{ 1. } \mathcal{A} = 4 \int_0^1 f(x) dx = \frac{26}{3} \text{ cm}^2.$$

$$2. \mathcal{A} = 4 \int_1^4 f(x) dx = \frac{8}{3} \text{ cm}^2.$$

$$134 \text{ 1. } \mathcal{A} = 4 \int_0^4 f(x) dx = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

$$2. \mathcal{A} = -4 \int_{-2}^0 f(x) dx = 24 + 4e^{-1} - 4e \text{ cm}^2$$

(f négative sur $[-2; 0]$).

$$135 \text{ 1. } \mathcal{A} = -4 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \ln(1+t) dt$$

$$= -4 \left(\left[(1+t) \ln(1+t) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 dt \right)$$

$$= -4 \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2 - 2 \ln 2 \text{ cm}^2$$

(f négative sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$).

$$2. \mathcal{A} = 4 \int_{-1}^{\ln 2} f(x) dx = 4 \left(\left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^{\ln 2} + \int_{-1}^{\ln 2} e^{-x} dx \right)$$

$$= 4 \left[-\frac{1}{2} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{2} + e \right] = 4(e-1) - 2 \ln 2 \text{ cm}^2.$$

$$136 \text{ aire}(\mathcal{D}_1) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \text{ u.a. ;}$$

$$\text{aire}(\mathcal{D}_2) = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \text{aire}(\mathcal{D}_1) = \frac{5}{12} \text{ u.a. ;}$$

$$\text{aire}(\mathcal{D}_3) = 1 - \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) = \frac{1}{3} \text{ u.a. .}$$

$$137 \bullet u_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} n^2 \right) dx.$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} - n^2 x \right]_n^{n+1} = \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{3} \right)$$

Pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}$, donc (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$.

138 Dans $]-2; +\infty[$, $\ln(x+2) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e - 2$.

$$\mathcal{A} = - \int_{-1}^{e-2} f(x) dx + \int_{e-2}^e f(x) dx$$

$$= F(e) - 2F(e-2) + F(-1) \text{ avec } F \text{ primitive sur } [-1; e] \text{ de la fonction :}$$

$$x \mapsto f(x) = \ln(2+x) - 1.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(2+x)$ est définie par :

$$G(x) = \int_0^x \ln(t+2) dt = \left[(t+2) \ln(t+2) \right]_0^x - \int_0^x dt$$

$$= (x+2) \ln(x+2) - 2 \ln 2 - x.$$

Ainsi on peut prendre $F(x) = (x+2) \ln(x+2) - 2x$, d'où on déduit que $\mathcal{A} = (e+2) \ln(e+2) - 6$ u.a.

139 •

$$\mathcal{A} = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = F(4) - 2F(1) + F(-1)$$

avec F primitive de f sur $[-1; 4]$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x}$ est définie par $F(x) = \int_{-1}^x (t^2 - 1)e^{-t} dt$.

Par double intégration par parties :

$$F(x) = \left[-(t^2 - 1)e^{-t} \right]_{-1}^x + 2 \int_{-1}^x te^{-t} dt$$

$$= -(x^2 - 1)e^{-x} + 2G(x);$$

$$G(x) = \left[-te^{-t} \right]_{-1}^x + \int_{-1}^x e^{-t} dt = -xe^{-x} - e^{-x},$$

d'où $F(x) = -(x+1)e^{-x}$.

Ainsi $\mathcal{A} = (8e^{-1} - 25e^{-4})$ u.a.

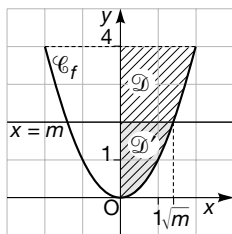
140 • Corrigé dans le manuel.

141 • \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à (Oy), donc m est tel que l'aire de \mathcal{D}' est la moitié de celle de \mathcal{D} .

$$\int_0^{\sqrt{m}} (m-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4-x^2) dx,$$

soit $\frac{2}{3} m \sqrt{m} = \frac{8}{3}$, d'où :

$$m^3 = 16 \text{ et } m = 16^{\frac{1}{3}}.$$



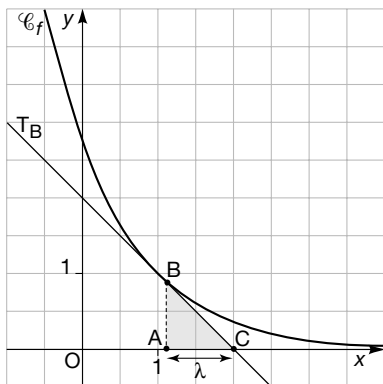
142 • 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$,

d'où le résultat. Pour tout réel x , $f(x) - (x-2) > 0$ donc \mathcal{C}_f est au-dessus de d .

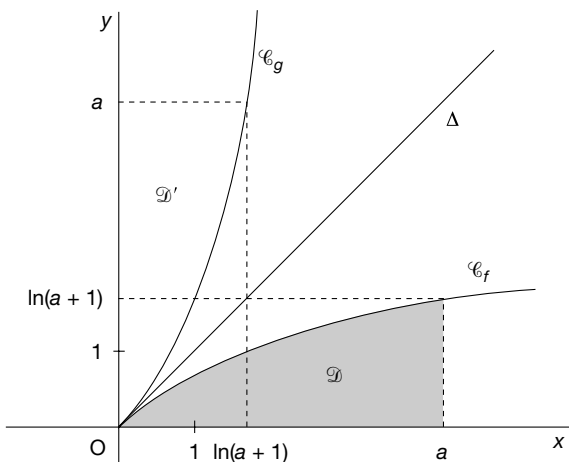
2. $S_1 = \int_0^\lambda [f(x) - (x-2)] dx = \int_0^\lambda e^{1-x} dx = (e - e^{1-\lambda})$ u.a.

3. Équation de la tangente T_B : $y = -e^{1-\lambda}(x-\lambda) + e^{1-\lambda}$, d'où $C(1+\lambda; 0)$.

$S_2 = \frac{1}{2} e^{1-\lambda}$ u.a., d'où $S_1 + 2S_2 = e$ (indépendant de λ).



143 • 1. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g'(x) = e^x$.



Ainsi $f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 0$.

D'où Δ : $y = x$ est tangente commune en O.

La courbe C_{\ln} est en dessous de sa tangente T : $y = x-1$ au point d'abscisse 1 donc pour tout $t > 0$, $\ln t \leq t-1$.

En posant $t = x+1$ avec $x \in [0; +\infty[$, on obtient $\ln(x+1) \leq x$ donc C_f est en dessous de Δ .

Autre méthode: Étudier le signe de $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$ sur $[0; +\infty[$ à partir des variations de φ .

2. La symétrie d'axe Δ est définie par :

$$M(x; y) \mapsto M'(x'; y') \text{ avec } x' = y \text{ et } y' = x.$$

Pour tout $x \geq 0$:

$$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y = \ln(1+x) \Leftrightarrow e^y = 1+x \Leftrightarrow x = e^y - 1$$

$$\Leftrightarrow y' = e^x - 1 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in C_g.$$

Ainsi C_f et C_g sont symétriques par rapport à Δ .

3. a) Tracés des représentations graphiques.

b) $I(a)$ exprime l'aire en u.a. du domaine \mathcal{D} et en raison de la symétrie, aire $(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{D}')$.

$$\text{aire}(\mathcal{D}') = \int_0^{\ln(a+1)} (a - (e^x - 1)) dx$$

$$= \int_0^{\ln(a+1)} a dx - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx$$

$$\text{d'où } I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx.$$

$$\text{Or } \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln(a+1)} = a - \ln(a+1)$$

$$\text{donc } I(a) = (a+1) \ln(a+1) - a.$$

c) Par intégration par parties,

$$I(a) = [(x+1) \ln(x+1)]_0^a - \int_0^a dx = (a+1) \ln(a+1) - a.$$

Note: Poser $u(x) = \ln(x+1)$, $v'(x) = 1$ alors $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ et choisir $v(x) = x+1$.

144 • 1. Conditions :

$$f(1) = 0, f'(1) = 0, \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}.$$

$$\text{D'où le système } \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b=0 \\ 3a+5b+15c=5 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } a = \frac{5}{8}, b = -\frac{5}{4}, c = \frac{5}{8}.$$

145 • 1. \mathcal{C}_f : $y = 1 + x - xe^{-x^2+1}$.

$$\text{On pose } \begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases};$$

dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, \mathcal{C}_f : $Y = X - Xe^{-X^2+1}$.

\mathcal{C}_f représente la fonction $X \mapsto X - Xe^{-X^2+1}$ définie sur \mathbb{R} ; celle-ci est impaire donc I est centre de symétrie de \mathcal{C}_f .

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x^2+1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} -e \frac{u^{\frac{1}{2}}}{e^u} = 0 \text{ (en posant } u = x^2).$$

Donc d : $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

| | | | |
|-------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|--------------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x) - (x+1) = -xe^{-x^2+1}$ | $+$ | 0 | $-$ |
| position | \mathcal{C}_f au-dessus de d | \mathcal{C}_f en-dessous de d | point commun |

3. a) $\mathcal{A}(\lambda) = 4 \int_0^\lambda x e^{-x^2+1} dx = 2(-e^{-\lambda^2+1} + e) \text{ cm}^2$.

b) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 2e \text{ cm}^2$.

c) $|\mathcal{A}(\lambda) - \mathcal{A}| = 2e^{-\lambda^2+1}$.

D'où $2e^{-\lambda^2+1} \leq 10^{-2}$ donc $\lambda \geq \sqrt{1 - \ln \frac{1}{200}}$.

On pourra prendre $\lambda_0 = \sqrt{1 + \ln(200)} \approx 2,51$.

146 • Corrigé dans le manuel.

147 • 1. $f(x) = ke^{-x}$ avec k défini par $f(0) = e$ d'où $k = e$. Ainsi $f(x) = e^{1-x}$.

2. Pour $t \in [1; e]$: $e^{1-x} = t \Leftrightarrow x = 1 - \ln t$.

Note : $0 \leq x \leq 1$.

3. a) La section du solide par un plan perpendiculaire à (Oy) en $M(0; t)$ avec $t \in [1; e]$ est un disque de rayon $x = 1 - \ln t$ (voir 2.) et d'aire $S(t) = \pi(1 - \ln t)^2$.

Ainsi $V = \int_1^e S(t) dt = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$.

b) $\int_1^e (1 - \ln t)^2 dt = [t(1 - \ln t)^2]_1^e + 2 \int_1^e \ln(1 - t) dt$
 $= -1 + 2 \int_1^e (1 - \ln t) dt$ [1].

[poser : $u(t) = (1 - \ln t)^2$, $v'(t) = 1$, $u'(t) = -\frac{2}{t}(1 - \ln t)$, $v(t) = t$].

$\int_1^e (1 - \ln t) dt = [t(1 - \ln t)]_1^e + \int_1^e dt = e - 2$ [2].

Ainsi d'après [1] et [2], $\int_1^e (1 - \ln t)^2 dt = 2e - 5$

d'où $V = \pi(2e - 5) u.v$.

148 • 1. En raison de la symétrie par rapport au plan passant par O et perpendiculaire à (Oy) , il suffit de raisonner avec un plan de coupe défini pour $0 \leq y \leq r$.

La section est une couronne circulaire centrée sur (Oy) d'aire : $\pi[(d+r')^2 - (d-r')^2] = 4\pi dr'$.

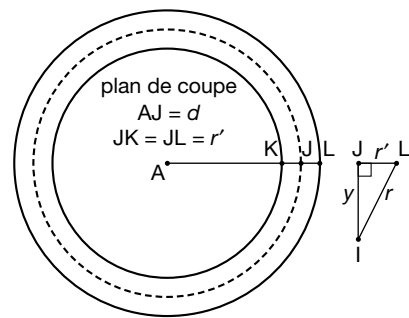
Or r' est tel que $r'^2 = r^2 - y^2$

donc $S(y) = 4\pi d \sqrt{r^2 - y^2}$.

2. $V = 2 \int_0^r S(y) dy = 8\pi d \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 8\pi d \times \frac{\pi r^2}{4}$,

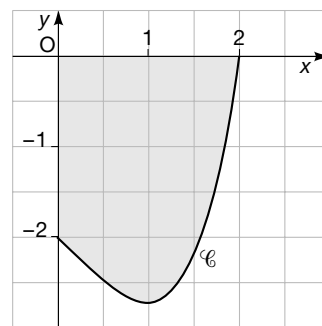
donc $V = 2\pi^2 dr^2$.

(Voir l'exercice 108 pour le calcul de l'intégrale.)



149 • 1. $f'(x) = e^x(x-1)$.

| | | | | |
|---------|----|---|----|---|
| x | 0 | 1 | 2 | |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + |
| f | -2 | | -e | 0 |



2. $\mathcal{A} = - \int_0^2 f(x) dx$.

Par intégration par parties $\mathcal{A} = e^2 - 3 \approx 4,39 \text{ cm}^2$.

3. a) Les réels a, b, c sont tels que pour tout réel x , $G'(x) = f^2(x)$, soit :

$$e^{2x}[2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c] = e^{2x}(x-2)^2,$$

d'où, par identification, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = \frac{13}{4}$.

b) La section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) est un disque d'aire $S(x) = \pi f^2(x)$.

$V = \int_0^2 S(x) dx = \pi \int_0^2 f^2(x) dx = \frac{\pi(e^4 - 13)}{4} \approx 32,671 \text{ cm}^3$.

150 • 1. $V = \pi \int_\alpha^\beta f^2(x) dx = \pi \int_\alpha^\beta (ax^2 + bx + c) dx$
 $= \pi \left[\frac{a}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{b}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) \right]$
 $= \frac{\pi(\beta - \alpha)}{6} [2a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3b(\beta + \alpha) + 6c]$
 $= \frac{\pi h}{6} [2a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3b(\beta + \alpha) + 6c]$.

D'autre part :

$B_1 + B_2 + 4B_3 = \pi[aa^2 + b\alpha + c] + \pi[a\beta^2 + b\beta + c]$
 $+ 4\pi \left[a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + c \right]$
 $= \pi[2a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c]$

Ainsi $\mathcal{V} = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4B_3)$.

2. Il s'agit d'une application avec $f(x) = 12 \sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}$,

$(P(x) = 144 + \frac{x^2}{4})$. $R_1 = 12 \sqrt{1 + \frac{36^2}{24^2}} = 6\sqrt{13}$;

$R_2 = 12 \sqrt{1 + \frac{12^2}{24^2}} = 6\sqrt{5}$; $R_3 = 12 \sqrt{1 + \frac{(-12)^2}{24^2}} = 6\sqrt{5}$.

D'après la formule « des trois niveaux » :

$\mathcal{V} = 8[\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + 4\pi R_3^2] = 10\,944\pi$,
soit $\mathcal{V} \approx 34\,382 \text{ m}^3$.

Calcul intégral dans d'autres sciences

151 1. $W = R \times I_e^2 \times T = R \int_0^T i^2(t) dt$ donc

$I_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$ donc I_e^2 est la valeur moyenne de i^2 sur $[0; T]$.

2. $I_e^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$.

Or $\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$

donc $\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t) dt$
 $= \frac{T}{2} - \left[\frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{T}{2}$.

Ainsi $I_e^2 = \frac{I_m^2}{2}$ donc $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

152 • $x_G = \frac{1}{M} \int_0^r mx \sqrt{r^2 - x^2} dx$
 $= \frac{m}{M} \times \left[-\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^r = \frac{m}{M} \times \frac{r^3}{3}$.

Or $\frac{m}{M} = \frac{1}{S} = \frac{4}{\pi r^2}$ donc $x_G = \frac{4r}{3\pi}$.

D'où la position de G sur la droite d'équation $y = x$.

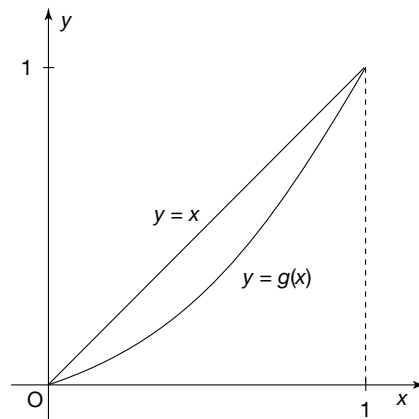
153 • A. 1. $g(0) = 0, g(1) = 1$ donc g vérifie [1].

$g'(x) = e^{x-1}(x+1)$; $g'(x) > 0$ sur $[0; 1]$ donc g vérifie [2].

2. Pour tout x de $[0; 1]$, $g(x) - x = x \frac{e^x}{e} - x = \frac{x}{e} (e^x - e)$.

Or pour $0 \leq x \leq 1$, on a $\frac{x}{e} \geq 0$ et $e^x \leq e$ soit $e^x - e \leq 0$
donc $g(x) - x \leq 0$. Ainsi g vérifie [3].

3. Représentation graphique



B. 1. La fonction différence $x \mapsto x - f(x)$ est continue et positive sur $[0; 1]$ donc $I = \int_0^1 (x - f(x)) dx$.

2. $I_g = \int_0^1 (x - g(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 g(x) dx$
 $= \frac{1}{2} - \int_0^1 g(x) dx$.

Par intégration par parties

$\int_0^1 g(x) dx = [xe^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx = e^{-1}$

d'où $I_g = \frac{1}{2} - e^{-1}$.

3. a) Pour tout entier $n, n \geq 2$, les fonctions f_n sont telles que :

• $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$ [1].

• $f'_n(x) = 2x \frac{nx^{n-1}(1+x) - x^n}{(1+x)^2} = \frac{2x^{n-1}[n+(n-1)x]}{(1+x)^2}$

donc $f'_n(x) \geq 0$ et f_n est croissante sur $[0; 1]$ [2].

• $f_n(x) - x = \frac{2x^n}{1+x} - x = \frac{2x^n - (x^2 + x)}{1+x}$.

Or pour tout x de $[0; 1]$,

$x^2 + x \geq 2x^2$ d'où $2x^n - (x^2 + x) \leq 2x^n - 2x^2$

soit $2x^n - (x^2 + x) \leq 2x^2(x^{n-2} - 1) \leq 0$

donc $f_n(x) - x \leq 0$ [3].

b) $I_n = \int_0^1 (x - f_n(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f_n(x) dx$
 $= \frac{1}{2} - u_n$.

c) Pour tout t de $[0; 1]$,

$t^{n+1} \leq t^n$ et $1+t > 0$ d'où $\frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+t}$.

D'où par intégration $\int_0^1 \frac{2t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t} dt$

soit $u_{n+1} \leq u_n$.

Ainsi (u_n) est décroissante.

d) Pour tout t de $[0; 1]$, $0 < \frac{1}{1+t} \leq 1$ et $t^n \geq 0$

$$\text{d'où } 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n.$$

$$\text{e) Par intégration : } 0 \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 2t^n dt$$

$$\text{soit } 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

$$\text{donc d'après 3. b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

Suites et intégrales

154 1. a) Pour tout t de $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(t) + f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{t+1} + \frac{t^n}{t+1} = \frac{t^n(t+1)}{t+1} = t^n.$$

b) Par intégration sur $[0; 1]$,

$$\int_0^1 f_{n+1}(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 t^n dt$$

$$\text{d'où } u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.$$

2. a) Pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

b) Pour tout t de $[0; 1]$, $t^{n+1} \leq t^n$ et $1+t > 0$

$$\text{donc } \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+t} \text{ puis par intégration sur } [0; 1],$$

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Ainsi (u_n) est décroissante.

3. a) D'après 1. b), $u_n = \frac{1}{n+1} - u_{n+1}$, or $u_{n+1} \geq 0$

$$\text{donc } u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{D'où l'encadrement } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b) D'après la théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

155 • Corrigé dans le manuel.

156 • 1. a)

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$$

$$= [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{e}.$$

b) Pour tout x de $[0; 1]$, $0 \leq 1-x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$, donc :

$$0 \leq \frac{1}{n!} (1-x)e^{-x} \leq \frac{1}{n!} e^{-x}.$$

$$\text{Par intégration sur } [0; 1], 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx.$$

D'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} (1 - e^{-1})$ et, d'après le théorème

d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{c) } I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left([-(1-x)^{n+1} e^{-x}]_0^1 \right. \\ &\quad \left. - (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} [1 - (n+1)n! I_n] = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

2. a) $\frac{1}{e} + (-1)I_1 = 0 = a_1$ donc la relation est vraie au rang 1. On suppose la relation vraie pour un entier $n \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)!} - I_n \right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}, \end{aligned}$$

donc elle est vraie au rang $n+1$.

D'où le résultat pour tout n ($n \geq 1$).

b) Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

157 • 1. $I_0 = 1$; $J_0 = 1$.

$$2. \text{ a) } I_n = [-e^{-nx} \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx = 1 - nJ_n;$$

$$J_n = [e^{-nx} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n.$$

$$\text{b) } \begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \text{ d'où } I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2} \text{ et}$$

$$J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n^2}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1 + n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}}{1 + n} = 0.$$

158 • 1. a) $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+2)^2}$.

| | | |
|---------------|---------------|---------------|
| t | 0 | 2 |
| $\varphi'(t)$ | + | |
| φ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{4}$ |

b) Pour tout t de $[0; 2]$, $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$, d'où par intégration sur $[0; 2]$,

$$\frac{3}{2} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt \leq \int_0^2 \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} dt \leq \frac{7}{4} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt$$

$$\text{soit : } \frac{3}{2}n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \quad [1].$$

c) On pose $h = \frac{2}{n}$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = 2.$$

Par passage à la limite dans [1], $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$.

2. a) Pour tout t de $[0; 2]$,

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2} = \frac{2(t+2)-1}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

$$I = \int_0^2 \varphi(t) dt = \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{t+2} \right) dt = [2t - \ln(t+2)]_0^2 = 4 - \ln 2.$$

b) La fonction $t \mapsto e^{\frac{t}{n}}$ est strictement croissante sur

$[0; 2]$: pour tout t de $[0; 2]$, $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$; d'où, puisque $\varphi(t) > 0$:

$$\varphi(t) \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{2}{n}}.$$

Par intégration sur $[0; 2]$, $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

c) D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers I . Ainsi $\ell = 4 - \ln 2$.

159 • 1. a) Pour tout x de $]1; e[$, $0 < \ln x < 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $(\ln x)^n > 0$ et $1 - \ln x > 0$, d'où $(1 - \ln x)(\ln x)^n > 0$, soit $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b) $I_n - I_{n+1} = \int_1^e [(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1}] dx > 0$, donc (I_n) est décroissante.

c) Pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[1; e]$, $(\ln x)^n \geq 0$, donc $I_n \geq 0$.

(I_n) est décroissante minorée par 0, donc elle converge.

$$2. a) I_1 = \int_1^e \ln t dt = [t \ln t]_1^e - \int_1^e dt = 1.$$

b) Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx \\ &= [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \quad [1]. \end{aligned}$$

c) $I_2 = e - 2 \approx 0,718$; $I_3 = -2e + 6 \approx 0,563$; $I_4 = 9e - 24 \approx 0,464$.

3. a) D'après [1], $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ et $I_{n+1} \geq 0$, donc :

$$(n+1)I_n \leq e.$$

Ainsi $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et, d'après le théorème d'encadrement, (I_n) converge vers 0.

b) D'après [1], $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$.

D'où $nI_n = e - (I_n + I_{n+1})$; or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n + I_{n+1}) = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e$.

160 • 1. Par intégration par parties, $I = 1 - 2e^{-1}$.

$$2. a) S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

D'où l'idée de penser à la méthode des rectangles.

b) $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.

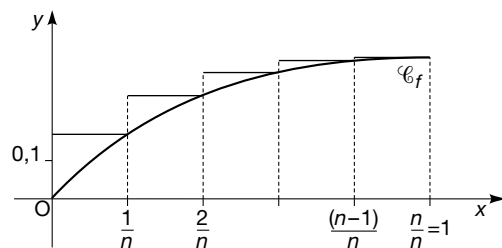
| | | |
|---------|---|----------|
| x | 0 | 1 |
| $f'(x)$ | | + |
| f | 0 | e^{-1} |

f est continue, strictement croissante sur $[0; 1]$.

S_n représente la somme des aires des rectangles supérieurs associés à la subdivision de $[0; 1]$ en n sous-intervalles de même amplitude.

La suite (S_n) converge donc vers

$$I = \int_0^1 f(x) dx = 1 - 2e^{-1}.$$



161 • 1. Pour tout x de $[0; 1]$ et tout n de \mathbb{N}^* ,

$$\frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad [1].$$

$$\begin{aligned} \text{En outre } \frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \right) &= \frac{n^2 - n(x+n) + x(x+n)}{n^2(x+n)} \\ &= \frac{x^2}{n^2(x+n)} \end{aligned}$$

est positif donc $\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$ [2].

D'où l'encadrement $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$.

$$2. a) J_n = \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b) Par intégration sur $[0; 1]$ des inégalités du 1.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx$$

$$\text{soit } \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq J_n \leq \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

3. Pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$\begin{aligned} U(n+1) - U(n) &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{2n^2 - 2n(n+1) + n + 1}{2n^2(n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leq 0.$$

Ainsi $U(n+1) - U(n) \leq 0$ et la suite U est décroissante.

4. Pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$\begin{aligned} V(n+1) - V(n) &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Or d'après l'encadrement du 2. b) appliqué au rang $n+1$:

$$\ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n+1} \text{ donc } \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \geq 0.$$

Ainsi $V(n+1) - V(n) \geq 0$ et la suite V est croissante.

5. Pour tout n de \mathbb{N}^* ,

$$U(n) - V(n) = -\ln(n) + \ln(n+1) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et la fonction \ln est continue en 1

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (U(n) - V(n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 0.$$

Ainsi les suites U et V sont adjacentes, donc elles convergent vers un même réel noté γ .

Par exemple $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} U(n)$. D'où $0,57 \leq \gamma \leq 0,58$;

une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par excès est 0,58.

162 • 1. • Pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (1 + x \ln x) - \ln(x+1) \right] = +\infty.$$

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - |
| f | $+\infty$ | 0 |

$$\begin{aligned} 2. \bullet \int_1^\alpha \ln \frac{x}{x+1} dx &= \left[x \ln \frac{x}{x+1} \right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{1}{x+1} dx \\ &= \alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - \ln(\alpha+1) + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^\alpha f(t) dt &= \int_1^\alpha \frac{1}{t} dt + \int_1^\alpha \ln \frac{t}{t+1} dt \\ &= \ln \alpha + \alpha \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} - \ln(\alpha+1) + 2 \ln 2 \\ &= (\alpha+1) \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right) + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

3. a) Pour tout x de $[k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$;
d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

$$\text{b) } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln(k+1) - \ln k = -\ln \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k} - f(k).$$

D'après 3. a), $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - f(k) \leq \frac{1}{k}$, d'où :

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ soit } 0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. a) Vérification immédiate.

b) $S_n =$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}, \end{aligned}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$.

c) D'après 3. b), $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$,

$$0 \leq f(n+1) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)};$$

$$0 \leq f(2n) \leq \frac{1}{2n(2n+1)};$$

d'où la sommation : $0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq S_n$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ donc, d'après le théorème d'enca-

drement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{2n} f(k) \right) = 0$.

5. a) D'après 3. b), $f(k) = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$.

Par sommation des relations écrites pour $k = n$ à $k = 2n$,

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \text{ et, en utilisant la}$$

relation de Chasles, $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx$, soit :

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \ln(2n+1) + \ln n,$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

$$\text{b) Ainsi } u_n = \sum_{k=n}^{2n} f(k) + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

163 1. $F'(x) = \ln(1 + e^{-2x})$ sur $[0; +\infty[$.

$F' > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc F est strictement croissante.

2. Pour tout t de $[1; 1+a]$, $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ (décroissance de la fonction inverse sur $[1; 1+a]$).

D'après le théorème de la moyenne,

$$\frac{a}{1+a} \leq \int_1^{1+a} \frac{1}{t} dt \leq a \text{ soit :}$$

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a.$$

3. On pose $a = e^{-2t}$ ($a > 0$), d'où :

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}.$$

Par intégration sur $[0; x]$:

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt, \text{ soit}$$

$$\left[-\frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \leq F(x) \leq \left[-\frac{1}{2} e^{-2t}\right]_0^x, \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

4. Par passage à la limite en $+\infty$: $\frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

5. a) Sur $[n; n+1]$, la fonction $t \mapsto \ln(1+e^{-2t})$ est décroissante, d'où $0 \leq \ln(1+e^{-2t}) \leq \ln(1+e^{-2n})$ et, d'après l'inégalité de la moyenne, $0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$.

b) D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

$$6. S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \ln(1+e^{-2t}) dt$$

$$= \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt$$

(d'après la relation de Chasles), soit $S_n = F(n+1)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n+1) = \ell$, donc (S_n) converge vers ℓ .

164 1. Pour $n \geq 2$, $\ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$. Par comparaison des aires :

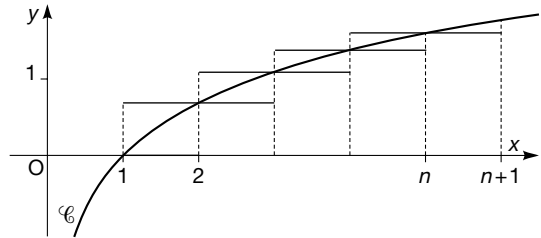
$$\int_1^n \ln t dt \leq \sum_{k=2}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln t dt.$$

(La première intégrale est majorée par la somme des aires des rectangles « supérieurs » alors que la

seconde est minorée par celle des rectangles « inférieurs ».)

$$\text{D'où } \int_1^n \ln t dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln t dt \quad [1].$$

Note : Cet encadrement est encore vérifié par $n=1$.



2. Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = \frac{\ln(n!)}{n \ln n}$.

Pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \ln t dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x dt = x \ln x - x + 1.$$

Donc, d'après [1] :

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - n,$$

d'où par division par $n \ln n > 0$:

$$1 - \frac{n-1}{n \ln n} \leq u_n \leq \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{1}{\ln n} \quad [2].$$

Or $\frac{n-1}{n \ln n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\ln n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n \ln n} = 0$. De plus :

$$\frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = \frac{(n+1) \left[\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]}{n \ln n}$$

$$= \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n},$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln(n+1)}{n \ln n} = 1.$$

Ainsi les termes extrêmes de l'inégalité [2] ont pour limite 1 et, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 1.

Prendre toutes les initiatives

165 Notons $f(x) = -x^2 + 4x = x(4-x)$

et $g(x) = kx(4-x)$. Ainsi $g = kf$.

Ces deux fonctions polynômes ont pour racines 0 et 4.

La condition de partage implique $k > 0$.

f et g sont continues et positives sur $[0; 4]$

donc $a(\mathcal{D}) = \int_0^4 f(x) dx$ et

$$a(\mathcal{D}') = \int_0^4 g(x) dx = k \int_0^4 f(x) dx = k \times a(\mathcal{D}).$$

Il s'agit de trouver k tel que $a(\mathcal{D}') = \frac{1}{2} a(\mathcal{D})$

$$\text{soit } k \times a(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} a(\mathcal{D}) \text{ donc } k = \frac{1}{2}.$$

166 • Déterminons une équation de la tangente T.

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + e^{-x}(1-x).$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + e^{-x}(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ainsi T est tangente à \mathcal{C} au point A(1 ; $1 + e^{-1}$).

T est la droite passant par A et de coefficient directeur 1 d'où T : $y = x + e^{-1}$.

• T est au-dessus de \mathcal{C} .

$$\text{Posons } \varphi(x) = x + e^{-1} - f(x) = e^{-1} - xe^{-x}.$$

La fonction différence φ est continue et positive donc

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_0^1 \varphi(x) dx = e^{-1} - \int_0^1 xe^{-x} dx.$$

Par intégration par parties

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}.$$

Ainsi $\text{aire}(\mathcal{D}) = 3e^{-1} - 1$ donc $\text{aire}(\mathcal{D}) > 0,1$.

167 • Posons $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $x \in [0; 1]$ et notons

C_f sa courbe dans un repère orthonormal.

$$M(x; y) \in C_f \Leftrightarrow y^2 = -x^2 + x \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } y \geq 0.$$

C_f est le demi-cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon

$r = \frac{1}{2}$ situé dans le demi-plan $\mathcal{P} : y \geq 0$.

L'intégrale exprime l'aire du demi-disque « supérieur »

$$\text{associé : } \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8}.$$

168 • Sur $]0; 1]$, la fonction \ln est continue et négative

$$\text{donc } \mathcal{A}(\alpha) = - \int_{\alpha}^1 \ln x dx = \int_1^{\alpha} \ln x dx.$$

Par intégration par parties :

$$\mathcal{A}(\alpha) = [x \ln x]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} 1 dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1.$$

La fonction $\mathcal{A} : \alpha \mapsto \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ définie sur $]0; 1]$ est dérivable sur $]0; 1]$ et $\mathcal{A}'(\alpha) = \ln \alpha$.

| | | |
|------------------------|---|---|
| x | 0 | 1 |
| $\mathcal{A}'(\alpha)$ | | 0 |
| $\mathcal{A}(\alpha)$ | 1 | 0 |

Note : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \ln \alpha = 0$ donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha) = 1$.

Ainsi il n'existe pas de réel α dans $]0; 1]$ tel que $\mathcal{A}(\alpha) = 2$.

Problèmes

(page 232)

172 • 1. a) Pour tout k ($k \geq 0$), f_k est dérivable sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \text{b) } f'_k(x) &= 1 - \frac{2ke^x}{(1+ke^x)^2} \\ &= \frac{1+k^2e^{2x}}{(1+ke^x)^2}. \end{aligned}$$

169 • Cherchons à encadrer u_n .

Pour tout n de \mathbb{N}^* et tout t de $[0; 1]$,

$0 \leq 1-t \leq 1$ d'où $0 \leq (1-t)^n \leq 1$ et puisque $e^{-1} > 0$ on obtient $0 \leq (1-t)^n e^{-t} \leq e^{-t}$.

Par intégration sur $[0; 1]$,

$$0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^{-t} dt \text{ d'où}$$

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{-t} dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-t} dt.$$

Ainsi $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!} (1 - e^{-1})$. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.

170 • $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. S_n exprime la somme des aires des rectangles colorés (en u.a.).

Par comparaison d'aires,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &\leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

$$\text{soit } S_n \leq \ln(2n) - \ln(n) \leq S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$\text{donc } S_n \leq \ln 2 \leq S_n + \frac{1}{2n}.$$

D'où l'encadrement, $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq S_n \leq \ln 2$.

D'après le théorème d'encadrement (S_n) converge vers $\ln 2$.

171 • \mathcal{B} est l'aire entre la droite (OM) : $y = tx$ et la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ sur l'intervalle $[0; t]$.

$$\mathcal{B} = \int_0^t (tx - x^2) dx = \left[\frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^t = \frac{t^3}{6}.$$

Notons H et K les projetés orthogonaux de M et N sur l'axe (Ox).

Alors $\mathcal{A} = \text{aire}(\text{OHM}) - \text{aire}(\text{OKM}) - \text{aire}(\text{MHKN})$

$$\text{soit } \mathcal{A} = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{16} - \frac{5t^3}{16} = \frac{t^3}{8}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{\frac{t^3}{6}}{\frac{t^3}{8}} = \frac{4}{3}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [f_k(x) - x]^2 + 1 &= \left(\frac{1 - ke^x}{1 + ke^x} \right)^2 + 1 = \frac{2 + 2k^2e^{2x}}{(1 + ke^x)^2} \\ &= \frac{2(1 + k^2e^{2x})}{(1 + ke^x)^2}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout x de \mathbb{R} : $2f'_k(x) = [f_k(x) - x]^2 + 1$.

Ainsi f_k est solution de l'équation différentielle (E) :

$$2y' = (y - x)^2 + 1.$$

c) Pour tout x , $f'_k(x) \geq \frac{1}{2} > 0$. Donc f_k est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$2. 0 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f_k(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-k}{1+k} = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Ainsi \mathcal{C}_1 passe par O.

$$\mathcal{A} \in \mathcal{C}' \Leftrightarrow f_k(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1-ke}{1+ke} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{e}.$$

Ainsi $\mathcal{C}_{\frac{1}{e}}$ passe par A.

3. a) Pour tout x de \mathbb{R} ,

$$f_k(x) = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{-1-ke^x+2}{1+ke^x}$$

$$\text{soit } f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1+ke^x} \quad [1];$$

$$\text{de même, } f_k(x) = x + \frac{1+ke^x-2ke^x}{1+ke^x}$$

$$\text{soit } f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} \quad [2].$$

b) Pour tout réel k , $k > 0$, et tout réel x ,

$$f_k(x) - (x-1) = \frac{2}{1+ke^x} \text{ est positif donc } \mathcal{C}_k \text{ est au-dessus de } d;$$

$$f_k(x) - (x+1) = -\frac{2ke^x}{1+ke^x} \text{ est négatif donc } \mathcal{C}_k \text{ est en dessous de } d'.$$

Ainsi les courbes \mathcal{C}_k sont entre d et d' .

En outre d'après [1], $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_k(x) - (x-1)) = 0$, et

d'après [2], $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_k(x) - (x+1)) = 0$ donc d et d' sont asymptotes à \mathcal{C}_k respectivement en $+\infty$ et $-\infty$.

4. a) Pour tout x de \mathbb{R} , $f_1(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$ et

$$\begin{aligned} f_1(-x) &= -x + \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= -x + \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} \\ &= -x - \frac{1-e^x}{1+e^x} \\ &= -f_1(x). \end{aligned}$$

Ainsi f_1 est impaire.

b) $f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante donc $f_1 > 0$ sur $]0; +\infty[$ et $f_1 < 0$ sur $]-\infty; 0[$.

Notons \mathcal{D}_x le domaine limité par \mathcal{C}_1 et l'axe des abscisses sur l'intervalle d'extrémités 0 et x .

Cas $x > 0$: $F(x) = \text{aire}(\mathcal{D}_x)$.

$$\begin{aligned} \text{Cas } x < 0 : F(x) &= \int_0^x f_1(t) dt = - \int_x^0 f_1(t) dt \\ &= -[-\text{aire}(\mathcal{D}_x)] = \text{aire}(\mathcal{D}_x). \end{aligned}$$

Pour tout réel x , comme f_1 est impaire, \mathcal{D}_x et \mathcal{D}_{-x} sont symétriques par rapport à O donc ont la même aire. D'où $F(-x) = \text{aire}(\mathcal{D}_{-x}) = \text{aire}(\mathcal{D}_x) = F(x)$. Ainsi F est paire.

c) F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = f_1$.

| | | | |
|---------------------------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| F' = f₁ | - | 0 | + |
| F | | ↘ 0 ↗ | |

d) D'après [2]

$$F(x) = \int_0^x \left(t + 1 - \frac{2e^t}{1+e^t} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + t - 2 \ln(1+e^t) \right]_0^x$$

$$\text{soit } F(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln(1+e^x) + 2 \ln 2.$$

173 • Partie A

1. Γ : $y = g'(x)$; \mathcal{C} : $y = g(x)$.

Le signe de g' détermine le sens de variation de g .

2. $g'(0) = 1$.

Partie B

1. $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$; $f'_0(x) = (2 - x^2)e^{-x}$.

Pour tout réel x , $f_0(x) + f'_0(x) = 2(x+1)e^{-x}$, donc f_0 est une solution de (E).

2. a) f solution de (E) $\Leftrightarrow f' + f = f'_0 + f_0$

$$\Leftrightarrow f' - f'_0 + f - f_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - f_0)' + (f - f_0) = 0;$$

f solution de (E) $\Leftrightarrow u = f - f_0$ solution de (E').

b) (E') : $y' = -y$.

Solutions dans \mathbb{R} : $x \mapsto u(x) = Ce^{-x}$; $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f du type $f = u + f_0$. Donc $f(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. $g(0) = 1$ et $g(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$ d'où $C = 1$.

Ainsi $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

4. $h(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$ et $h'(0) = 0$.

Or $h'(x) = (-x^2 - C + 2)e^{-x}$ donc $C = 2$.

Ainsi $h(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

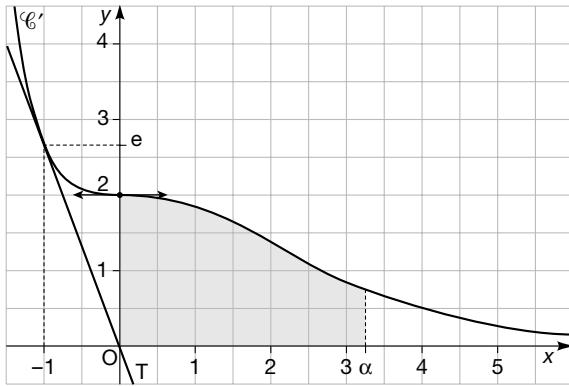
Partie C

1. • $f'(x) = -x^2 e^{-x}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

| | | | |
|--------------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) | - | 0 | - |
| f | $+\infty$ | ↘ 2 ↗ | 0 |

2. T : $y = -ex$.



3. a) F est une primitive de f sur \mathbb{R} équivaut à, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$, soit :

$$e^{-x}[-ax^2 + (2a - b)x + b - c] = e^{-x}(x^2 + 2x + 2),$$

d'où $a = -1$, $b = -4$, $c = -6$.

Ainsi $F(x) = (-x^2 - 4x - 6)e^{-x}$.

b) $\mathcal{A}(\alpha) = 4 \int_0^\alpha f(x) dx = 4[(-\alpha^2 - 4\alpha - 6)e^{-\alpha} + 6] \text{ cm}^2$.

Note : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 24 \text{ cm}^2$.

174 • Partie A

1. $g'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

| | | | | | |
|---------|---|------------|-------------|------------|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ | | |
| $g'(x)$ | 0 | + | 0 | - | |
| g | 0 | \nearrow | $1 - \ln 2$ | \searrow | $-\infty$ |

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, g est continue strictement décroissante et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

$g(\frac{7}{4}) \approx 0,106$ et $g(2) \approx -0,009$ sont de signes contraires,

donc $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. a) $T_2 : y = -\frac{12}{25}x + \frac{64}{25} - \ln 5$.

b) $x_0 = \frac{16}{3} - \frac{25}{12} \ln 5$, d'où $v_1 = 1,980$ et $v_2 = 0,181$.

$g(v_1) \approx 1,4 \times 10^{-4}$ et $g(v_2) \approx -3,4 \times 10^{-4}$ sont de signes contraires, donc $1,980 < \alpha < 1,981$.

c) $g(x) \geq 0$ sur $[0; \alpha]$; $g(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B

1. Taux d'accroissement de f en 0 : lorsque $x \neq 0$,

$$T(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}.$$

On pose $h = x^2$, $\lim_{x \rightarrow 0} T(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. f est une fonction impaire, il suffit d'étudier ses variations sur \mathbb{R}^+ .

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1) = \frac{g(x)}{x^2}$;

f' est du signe de g.

| | | | | | |
|---------|---|------------|-------------|------------|---|
| x | 0 | α | $+\infty$ | | |
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | - | |
| f | 0 | \nearrow | $f(\alpha)$ | \searrow | 0 |

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0.$$

2. • On pose pour tout x de $]-1; +\infty[$,

$\varphi(x) = \ln(1+x) - x$; $\varphi'(x) = -\frac{x}{1+x}$;

| | | | | |
|---------------|----|------------|-----------|------------|
| x | -1 | 0 | $+\infty$ | |
| $\varphi'(x)$ | | + | 0 | - |
| φ | | \nearrow | 0 | \searrow |

Ainsi pour tout x de $]-1; +\infty[$,

$\varphi(x) \leq 0$ donc $\ln(1+x) \leq x$ [1].

• $T_0 : y = x$. La position de \mathcal{C}_f et T_0 est déterminée par le signe de la fonction différence :

$$d : x \mapsto f(x) - x = \frac{\ln(x^2 + 1) - x^2}{x}.$$

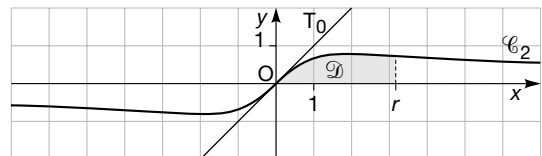
Or pour tout réel x, $x^2 > -1$, donc d'après [1] :

$$\ln(x^2 + 1) - x^2 \leq 0;$$

le signe de d(x) est l'opposé de celui de x.

Ainsi, \mathcal{C}_f est au-dessus de T_0 sur $]-\infty; 0[$, en-dessous sur $]0; +\infty[$ et T_0 coupe \mathcal{C}_f en O.

Note : \mathcal{C}_f « traverse » sa tangente en O ; l'origine O est un point d'inflexion.



Partie C

1. Pour $r > 0$, $F(r) = \int_0^r f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D})$. f est impaire donc \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à O. Si \mathcal{D}' est le domaine symétrique de \mathcal{D} par rapport à O :

$$F(-r) = \int_0^{-r} f(t) dt = -\int_{-r}^0 f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D}').$$

D'où $F(-r) = F(r)$. Ainsi F est paire.

| | | |
|----------------|---|------------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $F'(x) = f(x)$ | 0 | + |
| F | 0 | \nearrow |

2. D'après **B. 2.**, pour tout t de $[0; 1]$, $0 \leq f(t) \leq t$,

d'où par intégration, $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$.

3. Pour tout réel $t \geq 1$,

$$0 \leq 1 \leq t^2 \Rightarrow t^2 \leq t^2 + 1 \leq 2t^2$$

$$\Rightarrow \ln(t^2) \leq \ln(t^2 + 1) \leq \ln(2t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t} \quad [2].$$

4. • Pour $x \geq 1$, $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = F(1) + \int_1^x f(t) dt.$$

Or, pour tout t de $[1; x]$, d'après [2],

$$\frac{2 \ln t}{t} \leq f(t) \leq \frac{\ln 2}{t} + \frac{2 \ln t}{t},$$

d'où, par intégration sur $[1; x]$,

$$2J(x) \leq \int_1^x f(t) dt \leq \ln 2 \times \ln x + 2J(x),$$

et, en ajoutant $F(1)$ à chaque membre :

$$F(1) + 2J(x) \leq F(x) \leq F(1) + \ln 2 \times \ln x + 2J(x),$$

soit $F(1) + (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) + \ln 2 \times \ln x + (\ln x)^2$ [3].

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

• Pour $x \geq 1$, d'après (3),

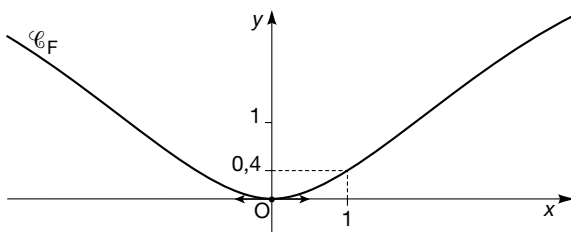
$$\frac{F(1)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} + \ln 2 \times \frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \right)^2 = 0, \quad \text{donc, d'après le}$$

théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

5.

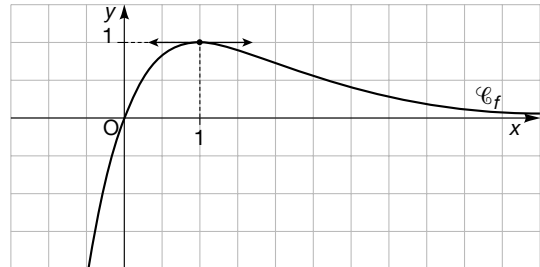


175 • Partie A

1. • $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times x e^{-x} = 0$.

| | | | |
|---------|-----------|------------|------------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | + | - |
| f | $-\infty$ | \nearrow | \searrow |



2. Par intégration par parties,

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx = [-x(e^{1-x})]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = e - 2.$$

Partie B

1. a) Sur $[0; 1]$, $0 \leq 1-x \leq 1$, d'où $1 \leq e^{1-x} \leq e$, puis :

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n.$$

b) $J_n = \frac{1}{n+1}$.

c) Par intégration de l'inégalité 1. a) sur $[0; 1]$,

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

2. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \\ &= [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1) I_n. \end{aligned}$$

3. a) $k_{n+1} = (n+1)! e - I_{n+1} = (n+1)! e + 1 - (n+1) I_n$
 $= (n+1)(n! e - I_n) + 1 = (n+1) k_n + 1$.

b) $k_1 = e - I_1 = 2$. Ainsi $k_1 \in \mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe un entier n ($n \geq 1$) tel que $k_n \in \mathbb{N}$; alors $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$ donc $k_{n+1} \in \mathbb{N}$. D'où le résultat.

c) Pour tout $n \geq 2$, $0 < \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} < 1$ donc $I_n \notin \mathbb{N}$.

Par l'absurde : si $n! e \in \mathbb{N}$, alors $I_n = n! e - k_n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le résultat précédent.

Donc $n! e \notin \mathbb{N}$.

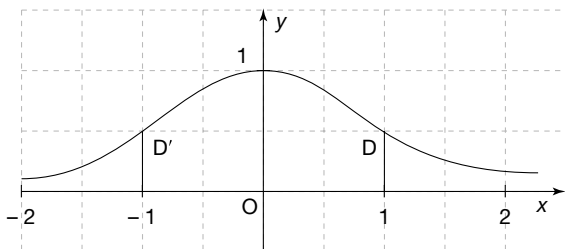
4. a) Si $n \geq q$, alors q divise $n!$ et donc $\frac{n! p}{q} \in \mathbb{N}$.

b) Si e était un rationnel $\frac{p}{q}$, alors pour $n \geq q$, on aurait

$n! e = \frac{n! p}{q}$ entier, ce qui est absurde d'après 3. c).

Donc e est irrationnel.

176 • 1. a) F est la primitive de f sur \mathbb{R} vérifiant $F(0) = 0$; ainsi $F' = f$.
 f est paire donc \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à (Oy) .
 F n'est pas paire.



Contre-exemple :

$$F(-1) = -\text{aire}(D') = -\text{aire}(D) = -F(1).$$

2. a) b) c) Par dérivation d'une fonction composée,

$$G'(x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1.$$

$G(x) = x + k$; or $G(0) = 0$ donc $k = 0$; ainsi pour tout x de I , $G(x) = x$.

$$F(1) = F\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) b) c) } H'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &\quad \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+2)^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi H est constante sur \mathbb{R}^+ de valeur

$$H(0) = F(1) + F(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Alors } F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = H(1) = \frac{\pi}{4}.$$

177 1. Faux. f est continue sur $]-\infty; 0[$ donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

Note : $F(x) = \ln(-x) + k$.

2. Faux. Contre-exemple : sur \mathbb{R} , $h = fg$ avec $f(x) = 2x$, $g(x) = 3$.

$H(x) = 3x^2 + k$, $F(x) = x^2 + k_1$, $G(x) = 3x + k_2$
 d'où $H \neq FG$.

3. Faux. En effet, $[F(2x - 1)]' = 2 \times f(2x - 1)$.

4. Vrai. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto f(t)$ vérifient les hypothèses du théorème d'intégration par parties et de plus $f(a) = f(b) = 0$.

$$\text{Alors } \int_a^b tf'(t) dt = [tf(t)]_a^b - \int_a^b f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

178 • 1. a) f est dérivable sur $[1; +\infty[$ donc f est continue sur $[1; +\infty[$.

$$\text{b) } f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2}.$$

$f'(t) = 0$ lorsque $t = 1$, et pour tout $t > 1$, $f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

2. a) $\mathcal{A}(1) = 0$.

b) Pour $x_0 \geq 1$ et $h > 0$:

$\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ représente l'aire colorée.

Cette aire peut être encadrée par les aires des rectangles « inférieur » et « supérieur » :

$$h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

$$\text{d'où } f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h). \quad [1]$$

c) Pour $x_0 > 1$ et $h < 0$ tel que $x_0 + h \geq 1$:

de même, l'encadrement s'écrit

$$-h \times f(x_0 + h) \leq \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0)$$

$$\text{d'où } f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$$

$$\text{soit } f(x_0 + h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0). \quad [2]$$

d) f est continue en x_0 donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Par le théorème d'encadrement, on déduit de [1] et [2]

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{A} est dérivable en x_0 et $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.

Finalement \mathcal{A} est dérivable sur $[1; +\infty[$ et $\mathcal{A}' = f$ donc \mathcal{A} est une primitive de f sur $[1; +\infty[$.