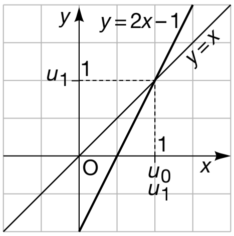
chapitre 7 Limites de suites

Travaux dirigés (page 173)

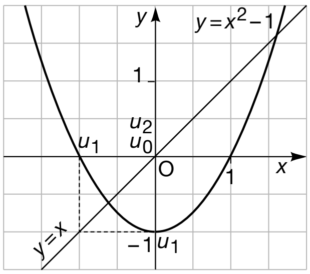
TD 1

2 a)

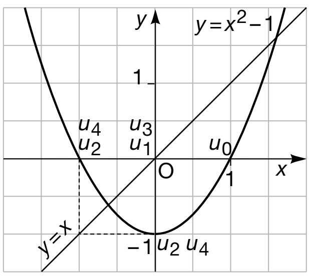


La suite (u_n) est constante : pour tout n, $u_n = 1$.

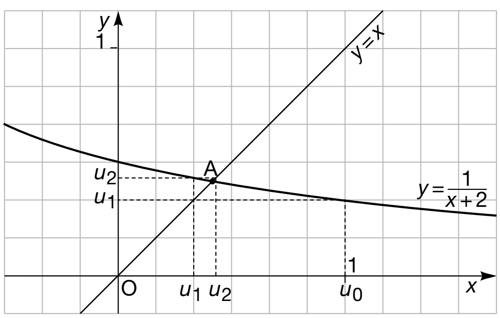
b) La suite prend (alternativement) les deux valeurs 0 et -1 . Elle ne converge pas.



c) $u_0 = 1$ puis la suite prend alternativement les deux valeurs 0 et -1 . Elle ne converge pas.

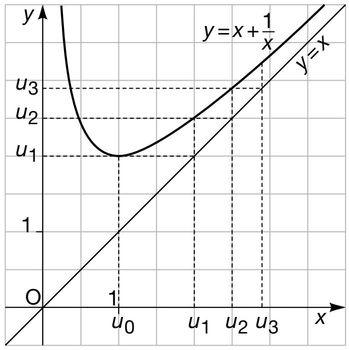


d)



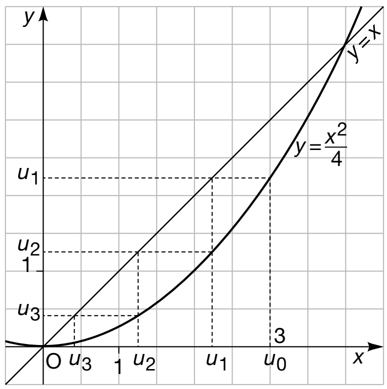
La suite est alternée et semble converger vers ℓ, abscisse du point A ($\ell = \sqrt{2} - 1$) .

e)



La suite semble croissante (non majorée) et de limite $+\infty$.

f)

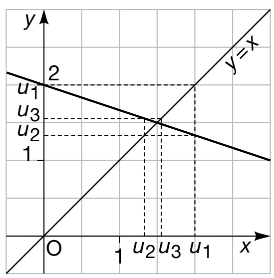


La suite semble décroissante et semble converger vers 0 .

TD 2

1 **1.** La suite (u_n) semble alternée et de limite $\dfrac{3}{2}$.

2.



3. a) α est solution de $x = -\dfrac{x}{3} + 2$, soit $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

$$t_{n+1} = -\frac{u_n}{3} + 2 - \frac{3}{2} = -\frac{u_n}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}t_n.$$

La suite (t_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Comme $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha = \dfrac{3}{2}$.

2 **1.** Si $\boldsymbol{a = 1}$, $u_{n+1} - u_n = b$: (u_n) est une suite arithmétique de raison b.

2. a) $\boldsymbol{a \neq 1}$ **:** Δ et d ont des coefficients directeurs différents, elles sont donc sécantes.

α est solution de $x = ax + b$, donc $a = \dfrac{b}{1-a}$.

b) $t_{n+1} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a}$

$$= au_n + \frac{-ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = at_n.$$

La suite (t_n) est géométrique de raison a.

3. $\boldsymbol{a = -1}$. $u_1 = -u_0 + b$;
$u_2 = -u_1 + b = u_0 = u_4 = u_6$;
$u_3 = u_5 = u_1$.

On peut conjecturer que pour tout n,

$$u_{2n} = u_0 \text{ et } u_{2n+1} = u_1.$$

Démontrons-le par récurrence.

- La propriété est vraie au rang 0.
- Supposons-la vraie au rang n.

$u_{2(n+1)} = -u_{2n+1} + b = -u_1 + b = u_0$;
$u_{2(n+1)+1} = -u_{2(n+1)} + b = -u_0 + b = u_1$.

Donc la suite est bien alternée et prend alternativement les valeurs u_0 et u_1.

TD 3

1 **1.** Résulte de $0 \leqslant \sqrt{a} < u_0$.

2. $u_0^2 - 2u_0\sqrt{a} + a > 0 \Leftrightarrow u_0 - 2\sqrt{a} + \dfrac{a}{u_0} > 0$.

Il résulte du **1.** que $\dfrac{a}{u_0} < \sqrt{a} < u_0$ et donc que

$u_0 + \dfrac{a}{u_0} < 2u_0$ et donc que $\dfrac{1}{2}\left(u_0 + \dfrac{a}{u_0}\right) < u_0$.

$$\textbf{3. } v_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}}$$
$$= \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a}} = v_n^2.$$

Récurrence « immédiate » :

La relation est vraie pour $n = 1$. Supposons-la vraie au rang n.

$v_{n+1} = v_1^{2 \times 2^{n-1}} = v_1^{2^n}$. La relation est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$w_n = \ln v_n = 2^{n-1} \ln v_1$.

Comme $u_1 > \sqrt{a}$, il résulte que $0 < v_1 < 1$; alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Comme $u_n = -\sqrt{a}\,\dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

4. Application : $u_1 = \dfrac{43}{7} = 6{,}142\,86$;

$u_2 = \dfrac{1\,831}{301} \approx 6{,}083\,06$; $u_3 = \dfrac{3\,352\,399}{551\,131} \approx 6{,}082\,76$.

2 **1. a)** $a < b$ équivaut (dans $\mathbb{R}^{+*}$) à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ qui entraîne $a < \sqrt{ab}$ et $\sqrt{ab} < b$ donc $\mathrm{A} \in [a\,;b]$.

De $(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 > 0$ découle $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$. Enfin,

$\dfrac{a}{2} < \dfrac{b}{2}$ entraîne $\dfrac{a+b}{2} + b$.

b) Dans $\mathbb{R}^{+*}$, $(a < b) \Leftrightarrow (a^2 < ab)$
$\Leftrightarrow (a^2 + ab < 2ab)$
$\Leftrightarrow \left(a < \dfrac{2ab}{a+b}\right)$.

Dans le **a)**, on a : $2\sqrt{ab} < a + b$ donc

$2ab < \sqrt{ab}\,(a+b)$ puis $\dfrac{2ab}{a+b} < \mathrm{A}$.

2. a) Pour tout n, $a_{n+1}b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \times \dfrac{a_n + b_n}{2}$
$= a_nb_n$.

Montrons, par récurrence, que pour tout n, $a_n < \sqrt{ab} < b_n$.

D'après la question précédente, la propriété est vraie au rang 1. Supposons la vraie au rang n. Le même raisonnement qu'à la question précédente, en remplaçant a et b respectivement par a_n et b_n nous permet de conclure que $a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1}$. La propriété est donc vraie pour tout n. En fait, on peut même conclure que pour tout n,

$$a_n < a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1} < b_n.$$

b) Il résulte de la remarque précédente que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

3. a) Comme $a_n < a_{n+1}$, $b_{n+1} - a_{n+1} < b_{n+1} - a_n$.

Puis $b_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$, et donc

$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n - b_n}{2}$.

b) Il résulte du **a)** que $0 \leqslant b_1 - a_1 < \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$: la propriété est donc vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n. Le caractère positif de $b_{n+2} - a_{n+2}$ résulte de **2. a)**.

De la question **3. a)**, on déduit

$$b_{n+2} - a_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(b_{n+1} - a_{n+1})$$

et donc compte tenu de l'hypothèse de récurrence,

$b_{n+2} - a_{n+2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}(b_0 - a_0)$. La propriété est donc vraie pour tout n.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure que la suite $(b_{n+1} - a_{n+1})$ converge vers 0.

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers la même limite.

c) Comme pour tout n, $a_n \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b_n$, on a immédiatement :

$0 \leqslant \sqrt{ab} - a_n \leqslant b_n - a_n$ et $0 \leqslant b_n - \sqrt{ab} = b_n - a_n$.

Comme $\sqrt{ab}\,(b_n - a_n) = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure que la limite commune des suites (a_n) et (b_n) est le réel $\sqrt{ab}$.

4. a) $a = 2$ et $b = 3$; $a_1 = \frac{12}{5}$ et $b_1 = \frac{5}{2}$;

$a_2 = \frac{120}{49} \approx 2{,}448\,98$ et $b_2 = \frac{49}{20} = 2{,}45$;

$a_3 = \frac{11\,760}{4\,801} \approx 2{,}449\,489\,69$ et $b_3 = \frac{4801}{1\,960} \approx 2{,}449\,489\,8$.

TD 4

1. Tous les rectangles ont pour largeur $\frac{1}{n}$.

• Le premier rectangle inférieur (de sommet A) a pour longueur $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$ et donc pour aire :

$$\frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Le k-ième rectangle inférieur a pour longueur :

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n+k} \text{ et pour aire } \frac{1}{n+k}.$$

Le dernier (de sommet B) a pour longueur $f(2) = \frac{1}{2}$ et donc pour aire $\frac{1}{2n}$.

En résumé : $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

• Pour S_n : la première longueur est $f(1)$ donc l'aire est $\frac{1}{n}$.

La dernière est $f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$, donc l'aire du dernier rectangle est $\frac{1}{2n-1}$.

On a bien : $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$.

2. $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$

donc la suite (s_n) est croissante.

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$, donc la suite (S_n) est décroissante.

3. $S_n - s_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(S_n - s_n) = 0$ et, compte-tenu des résultats de la question précédente, les suites (S_n) et (s_n) sont adjacentes et convergentes (vers $\mathcal{A}$).

4. a) $S_p - s_p \leqslant 10^{-2} \Rightarrow |s_p - \mathcal{A}| \leqslant 10^{-2}$, donc

$\frac{1}{2p} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow p \geqslant 50 \Rightarrow s_p$, valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

$\frac{1}{2p} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow p \geqslant 5000 \Rightarrow s_p$, valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-4} près.

b) $s_{50} = 0{,}688$ et $s_{500} \approx 0{,}6926$ donc :

$$0{,}6926 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 0{,}6936.$$

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 103)

1. et 2. Limite d'une suite

1 *Corrigé dans le manuel.*

2 $u_n > 10^6 \Leftrightarrow (\sqrt{n})^3 > (10^2)^3 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 10^2$

$$\Leftrightarrow n > 10^4,$$

donc $n_0 = 10^4$.

3 **a)** (u_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2} > 1$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) (u_n) est géométrique de raison $\frac{10}{10{,}1}$; $-1 < \frac{10}{10{,}1} < 1$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (théorème 1).

4 $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

5 Pour tout n, $u_n = \frac{2}{3^n}$.

$\frac{2}{3^n} < 10^{-4} \Leftrightarrow 3^n > 20\,000$.

$3^9 = 19\,683$ donc à partir de l'indice $n = 10$, $u_n < 10^{-4}$.

6 Pour tout n, $u_n = 2^n$.
$2^{49} < 10^{15} < 2^{50}$, donc à partir de l'indice $n = 50$, $u_n > 10^{15}$.

7 **1.** $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{6}$; $u_4 = \frac{1}{24}$;
$u_5 = \frac{1}{120}$; $u_6 = \frac{1}{720}$.
2. Pour $n \geqslant 1$, $n! \geqslant n$,

donc $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (*théorème 5*).

8 Pour $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \cos 2n \leqslant 1$,

donc $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, le théorème 5 nous permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

9 Pour tout n,
$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$, donc $n \leqslant n + 1 - \cos n \leqslant n + 2$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (*théorème 5*).

10 **1.**

n	1	2	3	4	5	6
u_n	– 0,9	0,64	– 0,343	0,1296	– 0,031 25	0,004

n	7	8	9	10	11
u_n	– 0,000 21	0,000 25	-10^{-9}	0	10^{-11}

2. $n \geqslant 30 \Leftrightarrow \frac{n}{10} - 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow u_n \geqslant 2^n$;

or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (*théorème 5*).

11 *Corrigé dans le manuel.*

12 **a)** $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$;
or, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{4} - 2 + \frac{2x}{x^2+1}$;

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$, donc :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

13 **a)** $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{5x^2 - 3x + 7}{x^2 + x + 1}$;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{-3x^2 + 2x + 4}{2(x+1)^2}$;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{3}{2}$.

14 **a)** $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{10x - 3}{x^2 + 1}$;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 1}{3x + 7}$;

or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

15 *Corrigé dans le manuel.*

16 **a)** $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \frac{n\pi + 1}{2n + 1}$ et $f : x \mapsto \sin x$.

$v_n = g(n)$ avec $g : x \mapsto \frac{\pi x + 1}{2x + 1}$; or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

b) $u_n = f(v_n)$ avec $v_n = \frac{2n\pi}{3n + 1}$ et $f : x \mapsto \cos x$.

$v_n = g(n)$ avec $g : x \mapsto \frac{2\pi x}{3x + 1}$; or $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{2\pi}{3}$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{2\pi}{3}$; $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} f(x) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{2}.$$

17 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{1-n} = 0$. **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

18 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n - 1}{2e^n + 3} = \frac{1}{2}$. **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 3} = -\frac{1}{3}$.

19 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$. **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(2 + e^{-n}) = \ln 2$.

20 **a)** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$, $(n \neq 0)$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc le numérateur a pour limite 1 en $+\infty$ et le dénominateur $+\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \sqrt{n} \times \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{2}{n}}$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

21 **a)** Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ».

$$u_n = n^2 \times \frac{\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$= n^2 \times \frac{\dfrac{1}{n}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, le dénominateur a pour limite $2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) $u_n = \dfrac{(\sqrt{2n^2-5} - \sqrt{2}n)(\sqrt{2n^2-5} + \sqrt{2}n)}{\sqrt{2n^2-5} + \sqrt{2}n}$

$= \dfrac{-5}{\sqrt{2n^2-5} + n\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2n^2-5} = f(v_n)$ avec $v_n = 2n^2 - 5$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2n^2-5} = +\infty$.

Comme, de plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\sqrt{2} = +\infty$, le dénominateur a pour limite $+\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

22 **a)** $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{(n+2)(n+1)}} \times (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

$= \dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\,(3n + \sqrt{9n^2+1})}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

23 • $u_n = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = n \times \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}$, $(n \neq 0)$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• $v_n = \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

• $w_n = \dfrac{n^2+1}{n+1} - n = \dfrac{1-n}{n+1}$;

pour $n \neq 0$, $w_n = \dfrac{\dfrac{1}{n} - 1}{1+\dfrac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -1$.

• $t_n = \dfrac{\dfrac{n^2+1}{n^2+n} - 1}{\dfrac{1-n}{n+1} - 1} = 1 - \dfrac{n}{n^2}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$.

24 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2-4}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2}{n} = +\infty$.

$v_n = \dfrac{3n^2-4}{n^2+n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.

$w_n = u_n - 3n = \dfrac{3n^2 - 4 - 3n^2 - 3}{n+1} = \dfrac{-7}{n+1}$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

25 **1.** Récurrence immédiate.

2. a) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = 1$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

b) $v_n = \dfrac{1}{3} + n$, $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}+n} = \dfrac{3}{1+3n}$.

3. $u_n = f(n)$ avec $f\colon x \mapsto \dfrac{3}{1+3x}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

26 **1. a)** $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \dfrac{1}{3}u_n + 1 = \dfrac{1}{3}v_n$.

(v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) $v_n = 6 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{2}{3^{n-1}}$, $u_n = \dfrac{2}{3^{n-1}} - 3$.

2. a) $S_n = 6 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{3}} = 9\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$;

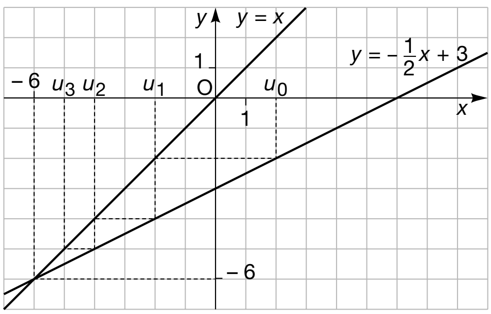
$S'_n = S_n - 3(n+1) = 9\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right) - 3n - 3.$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 9$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = -\infty$.

27 **a)** On ne s'intéresse au comportement des suites (u_n) et (v_n) que pour les « grandes » valeurs de n (vers $+\infty$). L'inégalité peut ne pas être vérifiée pour un nombre fini d'indice.
b) $|u_n - \ell| \leqslant v_n \Leftrightarrow \ell - v_n \leqslant u_n \leqslant \ell + v_n$.
c) Posons, pour tout entier n, $\ell - v_n = w_n$ et $\ell + v_n = t_n$. Par hypothèse, pour tout n supérieur à un certain entier m, $w_n \leqslant v_n \leqslant t_n$. De plus, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \ell$.
Le théorème 4 permet de conclure : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

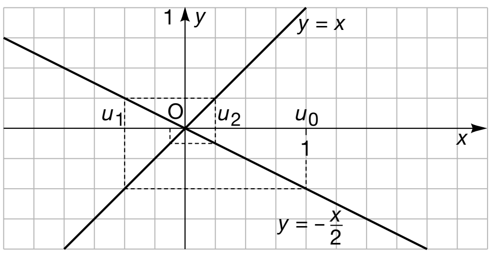
3. Suites monotones et convergence

28 **a)**



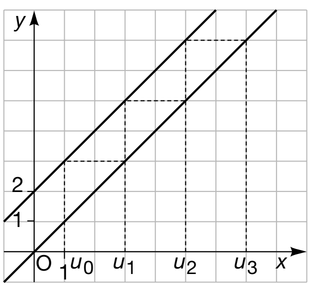
(u_n) semble décroissante et de limite -6.

b)



(u_n) semble ni croissante, ni décroissante. ((u_{2n}) décroît et (u_{2n+1}) croît…) (u_n) semble converger vers 0. ((u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.)

c)



(u_n) semble croissante et de limite $+\infty$. ((u_n) est une suite arithmétique de raison 2.)

29 • $u_5 = 4{,}6$; donc 0 n'est pas un majorant.

• D'autre part, $\dfrac{10}{n^2} > 0$, donc $u_n < 5$, et les réels 5 et 6 sont des majorants de (u_n).

• $u_{10\,000} = 5 - \dfrac{10}{10^{-8}} = 5 - 10^{-7} = 4{,}999\,999\,9$;
or, $4{,}999\,999\,9 > 4{,}999\,99$, donc $4{,}999\,99$ n'est pas un majorant de (u_n).

30 *Corrigé dans le manuel.*

31 **1. a)** Quel que soit le réel A, il existe un terme de la suite supérieur à A : $u_n > A$.
b) Quel que soit le réel A, $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir de l'indice n.
2. La suite étant non minorée, quel que soit le réel B, il existe un terme de la suite inférieur à B. La suite étant de plus décroissante, l'intervalle $]-\infty\,;B[$ contient tous les termes de la suite à partir de l'indice n : la suite a pour limite $-\infty$.

32 **1.** Pour tout $n > 0$, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) > 0.$

2. a) $u_n = \ln\left(2 \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3} \times \ldots \times \dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty.$

33 *Corrigé dans le manuel.*

34 **a)** $u_0 = 0$ et, si $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}$;

$1 + \dfrac{1}{n^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} > 1 \Leftrightarrow 0 < u_n < 1$.
La suite (u_n) est bornée (par 0 et 1).

b) Pour tout n, $u_n \geqslant 0$ et $u_n = \sqrt{1-\dfrac{2}{n^2+1}} < 1$: (u_n) est bornée (par 0 et 1).
c) Pour tout n, $u_n < 0$.

Pour tout n, $\sqrt{2n+3} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}} > -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$: (u_n) est bornée $\left(\text{par } -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } 0\right)$.

35 **a)** Pour tout n, $2^n \geqslant 1$, donc la suite est minorée ; mais, et c'est une propriété sur $\mathbb{R}$, pour tout $M > 0$, il existe n tel que $2^n > M$: la suite n'est pas majorée.

b) $n\sqrt{3} - 2 > n$ pour $n \geqslant 3$, donc (u_n) n'est pas majorée, et $u_n \geqslant -2$ donc (u_n) est minorée.

c) Pour tout n, $u_n \geqslant -1$ et pour $n \geqslant 1, u_n \geqslant n^2$, donc (u_n) est minorée mais non majorée.

36 **a)** $\dfrac{1}{n+1}$ et n^2 sont positifs, donc $u_n \geqslant n^2 \geqslant 0$; la suite (u_n) est minorée mais non majorée.

b) $u_n \geqslant -1$, donc (u_n) est minorée par -1 ; $u_n \geqslant n-1$ donc (u_n) est non majorée.

c) • Si n est pair, $u_n = n^2$, donc la suite n'est pas majorée.

• Si n est impair, $u_n = -n^2$, qui tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite n'est pas minorée.

37 **1.** Pour tout n,

$$u_n = \frac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right) < \frac{3}{2}.$$

2. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} > 0$.

3. Théorème 7 : toute suite croissante et majorée est convergente. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} = 0$, il en résulte

$\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

38 La fonction $f : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est croissante sur $[4 ; +\infty[$ et donc, pour tout $n \geqslant 4$, $n^2 - 5n + 6 \geqslant f(4) = 2$.

Il en résulte, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4. Suites adjacentes

39 *Corrigé dans le manuel.*

40 • $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} < 0$: la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

41 **a)** La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ est strictement décroissante $\left(f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}\right)$: la suite (u_n) est décroissante.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ est strictement croissante $\left(g'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}\right)$: la suite (v_n) est croissante.

Pour tout n,

$u_n - v_n = \dfrac{6}{n+1}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$, les deux suites sont bien adjacentes.

b) La suite (v_n) n'étant pas monotone, les deux suites ne peuvent être adjacentes.

42 •
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 ; \end{aligned}$$

la suite (u_n) est croissante.

•
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0 ; \end{aligned}$$

la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

43 • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{2n} < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

•
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 ; \end{aligned}$$

la suite (v_n) est croissante.

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{2n}$; or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$: les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

44 • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} < 0$: la suite (v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

45 **1.** La propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang n :

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 1 \leqslant v_n &\Leftrightarrow 3u_n + 1 \leqslant 4 \leqslant 3v_n + 1 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant 1 \leqslant v_{n+1} : \end{aligned}$$

la propriété est vraie pour tout n.

2. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n}{4} \geqslant 0$: la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1 - v_n}{4} \leqslant 0$: la suite (v_n) est décroissante.

Pour tout n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3}{4}(v_n - u_n)$. Par une récurrence « immédiate », $v_n - u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n (v_0 - u_0)$ et donc $0 \leqslant (v_n - u_n) \leqslant 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, le théorème 4 nous permet de conclure : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent vers la même limite ℓ. De $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant u_n - v_n$ on déduit que la limite ℓ est 1.

Apprendre à chercher (page 180)

46 Études d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Les outils :
- Théorème de Pythagore.
- Étude d'une fonction irrationnelle.

Les objectifs :
- Savoir résoudre une équation irrationnelle.
- Savoir utiliser l'égalité $f(\ell) = \ell$ pour une fonction continue f.

1. a) Par hypothèse, le procédé peut se poursuivre indéfiniment, donc $\ell_n > 1$. De plus, $\mathscr{C}_{n+1}$ est inscrit dans $\mathscr{C}_n$, donc $\ell_{n+1} < \ell_n$.
b) Une suite décroissante et minorée est convergente (*théorème 7*).
c) On applique le théorème de Pythagore.
Dans le triangle $A_{n+1}B_nB_{n+1}$ rectangle en B_n :

$$\ell_{n+1}^2 = (\ell_n - 1)^2 + 1 \text{ soit } \ell_{n+1} = \sqrt{1 + (\ell_n - 1)^2}.$$

2. a) $f(x) = \sqrt{1 + (x-1)^2}$.
b) f étant continue, ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
C'est donc une solution de l'équation
$x = \sqrt{1 + (x-1)^2}$, la suite étant minorée par 1, $\ell \geqslant 1$.
c) Dans $\mathbb{R}^+$, $x = \sqrt{1 + (x-1)^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 + (x-1)^2$
$\Leftrightarrow 0 = 2 - 2x \Leftrightarrow x = 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = 1$.

47 Études d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

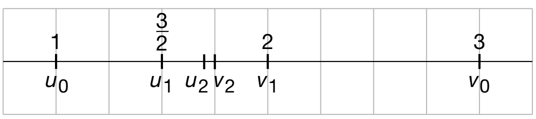
Les outils :
- Démonstration par récurrence.
- Suites adjacentes.

Les objectifs :
- Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.

1. a) $u_1 = \dfrac{3}{2}$; $v_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{12}{7}$; $v_2 = \dfrac{7}{4}$;

$u_3 = \dfrac{168}{97}$; $v_3 = \dfrac{97}{56}$.

b)



2. a) Par hypothèse, u_0 et v_0 sont strictement positifs : la proposition P_0 est vraie. Supposons P_n vraie et étudions le signe de u_{n+1} et de v_{n+1}.
$u_nv_n > 0$ et $u_n + v_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
Pour tout n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) $u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \times \dfrac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n$.

Et ceci quel que soit n, donc, de proche en proche,
$$u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n = u_0v_0 = ab.$$

3. • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_nv_n - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \dfrac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}$;

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$.

4. a) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$

$$= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0.$$

Donc, pour tout n,
$$v_n - u_n \geqslant 0 \text{ et } u_{n+1} - u_n \geqslant 0, \ v_{n+1} - v_n \leqslant 0 ;$$
la suite (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

5. a) (u_n) étant croissante, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et :

$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2v_n}{2} = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

b) Au rang 0, $v_0 - u_0 \leqslant \dfrac{1}{2^0}(v_0 - u_0) = v_0 - u_0$.

P_0 est vraie. Supposons P_n vraie :
$$(u_n - v_n) \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$

Alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$, d'après **a)** ;

donc $\qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$,

et $\qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$.

P_{n+1} est vraie, donc, pour tout n,
$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$

c) On a montré en **4. a)** que $v_n - u_n$ était positif pour tout entier n, donc $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ (*théorème 4*) et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ.

d) Le produit $u_n v_n$ converge donc vers ℓ^2.
Or, pour tout n, $u_n v_n = ab$ donc

$$\ell^2 = ab.$$

De plus, les suites (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs (question **2. b**), donc

$$\ell = \sqrt{ab}.$$

Pour progresser (page 181)

Convergence

48 *Corrigé dans le manuel.*

49 **1.** Soit P_n la propriété $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

P_1 : $\frac{1}{1!} = 1$, $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$, donc $\frac{1}{1!} \leqslant \frac{1}{2^{1-1}}$, P_1 est vraie. Supposons P_n vraie.

Alors $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{n+1}$;
or, $n+1 \geqslant 2$, donc :

$$0 < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

La propriété $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ est vraie pour tout n.

2. $u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$,

soit $u_n \leqslant 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 3$.
La suite (u_n) est majorée par 3.

3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Étant majorée, elle converge.

50 • **1.** $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a) $u_1 = 1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$: P_1 est vraie. Supposons P_n vraie.

Alors $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow u_n + \frac{1}{n} \leqslant 2$.

$$u_{n+1} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = u_n + \frac{n+2}{(n+1)^2};$$

or $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ car $(n+2)n < (n+1)^2$.

Donc $u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \leqslant u_n + \frac{1}{n} \leqslant 2$ et

$u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$: P_{n+1} est vraie.

b) Pour tout n non nul, $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$: la suite (u_n) est majorée par 2. Étant croissante, elle converge (*théorème 7*).

51 • • Montrons par récurrence que :

$$0 \leqslant u_n - \ell \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell).$$

Par hypothèse, pour tout n, $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant \frac{2}{3}(u_n - \ell)$,

donc pour $n = 0$, $0 \leqslant u_1 - \ell \leqslant \frac{2}{3}(u_0 - \ell)$.

La propriété P_1 est vraie. Supposons-la vraie au rang n.

Alors $0 \leqslant u_{n+1} - \ell \leqslant \frac{2}{3}(u_n - \ell) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(u_0 - \ell)$.

La propriété P_{n+1} est vraie, donc, pout tout entier n,

$0 \leqslant u_n - \ell \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (1 - \ell)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

• $u_n \in \left]\ell - 10^{-3} ; \ell + 10^{-3}\right[\Leftrightarrow |u_n - \ell| < 10^{-3}$.

Par hypothèse, $0 \leqslant 1 - \ell$ et $\ell > 0$, donc $0 \leqslant 1 - \ell < 1$.

Il suffit donc de prendre N tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^N < 10^{-3}$.

À la calculatrice, $N = 18$.

52 • **1.** $u_p = \frac{a(2p+1) + b(2p-1)}{(2p-1)(2p+1)}$,

donc $2(a+b)p + (a-b) = 1$ quel que soit p.

Donc $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

2. $S_n = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}\right)$

donc $S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\frac{1}{2}$.

53 **1. a)** Récurrence : $u_0 < 4$
Supposons $u_n < 4$, alors $3u_n + 4 < 16$ et $u_{n+1} < 4$.
La suite (u_n) est majorée par 4.

b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \dfrac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$ du signe de $-u_n^2 + 3u_n + 4$.
Or $-u_n^2 + 3u_n + 4 = (1 + u_n)(4 - u_n) > 0$ sur $]-1 ; 4[$.
Comme pour tout n, $u_n \in [0 ; 4[$, $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Croissante et majorée, la suite (u_n) converge (*théorème 7*) vers un réel ℓ.

La fonction $f = x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est continue sur $[0 ; 4]$.
Donc $\ell = f(\ell)$ soit $-\ell^2 + 3\ell + 4 = 0$ qui admet une seule solution positive 4.

2. a) Pour tout x de $[0 ; 4]$, $f(x) \in [0 ; 4]$.

$$4 - f(x) \leqslant \frac{1}{2}(4 - x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 2 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow f^2(x) \geqslant \left(2 + \frac{x}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow 4x \geqslant x^2 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

b) Par récurrence, $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$,

donc, pour tout entier naturel n, $0 < |4 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$ (*théorème 5*).

c) D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n,

$0 \leqslant n^2(4 - u_n) \leqslant \dfrac{n^2}{2^{n-2}}$. Posons $w_n = \dfrac{n^2}{2^{n-2}}$.

$$\ln w_n = 2\ln n - n\ln 2 + 2\ln 2 = n\left(2\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) + 2\ln 2.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln w_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

54 $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$

$$= \frac{n^2(a + b + c) + n(3a + 2b + c) + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Donc $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$
$$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$$
$$+ \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$$
$$\ldots$$
$$+ \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2}$$
$$+ \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}$$

Donc $S_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+4}$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$.

55 **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a) $u_{2n} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \geqslant n \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

3. $u_{2^1} = u_2 = \dfrac{3}{2} \geqslant \dfrac{2}{2}$: P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie : $u_{2^n} \geqslant \dfrac{n}{2}$. Alors :

$u_{2^{n+1}} = u_{2^{n+1}} - u_{2^n} + u_{2^n} = u_{2N} - u_N + u_{2^n}$ avec $N = 2^n$.

D'après la question **2.** et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{2^{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

P_{n+1} est vraie. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2^n} \geqslant \dfrac{n}{2}$.

4. La suite (u_n) est croissante non majorée, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

56 **1.** $v_{n+1} = \ln[e\sqrt{u_n}] - 2 = 1 + \dfrac{1}{2}\ln u_n - 2 = \dfrac{1}{2}v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

2. $v_n = \dfrac{1}{2^n}$; $\ln u_n = 2 + \dfrac{1}{2^n}$.

3. a) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln u_n) = 2$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^2$.

57 **A. 1. a)** • $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

x	0		e		$+\infty$
f ′(x)	‖	−	0	+	
f	‖	$+\infty$ ↘	e	↗ $+\infty$	

2. Pour $x > e$, $f(x) > e$.

B. 1. $u_{n+1} = f(u_n)$ et l'image par f de l'intervalle $]e ; +\infty[$ est $]e ; +\infty[$.
$u_0 = a > e$ est vrai ; si $u_n > e$, alors $f(u_0) > e$, $u_{n+1} > e$.
Donc pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > e$.

2. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{\ln u_n}-u_n=\dfrac{u_n(1-\ln u_n)}{\ln u_n}$; or $u_n>\text{e}$, donc $\ln u_n>1$ et $1-\ln u_n<0$, donc la suite est décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente vers $\ell>0$. De la continuité de f, on déduit que $f(\ell)=\ell$ ou $\ell(1-\ln\ell)=0$, donc $\ell=\text{e}$.

Étude de limites par comparaison

58 *Corrigé dans le manuel.*

59 **a)** Pour $n\neq 0$, $u_n=\dfrac{2+\dfrac{\cos n}{n}}{5+\dfrac{\sin n}{n}}$;

or $\dfrac{-1}{n}\leqslant\dfrac{\cos n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$, $-\dfrac{1}{n}\leqslant\dfrac{\sin n}{n}\leqslant\dfrac{1}{n}$, donc (*théorème 5*) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$. Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{2}{5}$.

b) $2+\cos n\geqslant 1$, donc $u_n\geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ (*théorème 5*).

60 **1.** Pour tout n, $0\leqslant\dfrac{2n^2}{n^2+1}\leqslant\dfrac{2n^2+2}{n^2+1}=2$; la suite (v_n) est bornée par 0 et 2 .

2. Pour tout n, $0\times\dfrac{1}{2^n}\leqslant u_n\leqslant 2\times\dfrac{1}{2^n}$,

soit $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0$, donc (*théorème 5*) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

61 *Corrigé dans le manuel.*

62 • Pour $n\geqslant 1$,

$\dfrac{1}{n^2+1}>\dfrac{1}{n^2+2}>\ldots>\dfrac{1}{n^2+n}>0$,

donc $0<u_n\leqslant\dfrac{n}{n^2+1}=\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{n}}=0$, (*théorème 5*) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

63 • **1.** Pour $n\geqslant 1$,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ ;$$

or $2\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n}>0$,

donc $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$,

donc (*théorème 5*) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3. $\sqrt{n}\times w_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\sqrt{n+1}-1$.

$w_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=1$.

64 • **1.** Pour tout n, $u_{n+1}=u_n^2+1\geqslant 1>0$.

2. $u_{n+1}-u_n=u_n^2-u_n+1$. Or le trinôme x^2-x+1 est toujours strictement positif ($\Delta<0$, $a>0$) ; donc, pour tout n, $u_{n+1}-u_n>0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

3. $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=5$, $u_4=26$.

Or $26>2^4=16$ donc la propriété est vraie au rang 4.

Supposons-la vraie au rang $n>4$, $u_n\geqslant 2^n$. Alors :

$$u_{n+1}=u_n^2+1\geqslant(2^n)^2+1=2^{2n}+1\ ;$$

or, $2^{2n}+1=2^{n+1}\left(2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ et, pour $n\geqslant 4$,

$$2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}>1\ ;$$

donc $u_{n+1}>2^{n+1}$: pour tout $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 2^n$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$, donc (*théorème 5*) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

65 •• **1. a)** Pour tout réel $x>0$,

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x(x+1)^2}>0$.

f est strictement croissante et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$: pour tout réel $x>0$, $f(x)<0$ et $\dfrac{1}{x+1}\leqslant\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

b) Pour tout $x>0$, $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)<\dfrac{x+1}{x}-1=\dfrac{1}{x}$.

2. a) $u_n\leqslant\ln\dfrac{n+1}{n}+\ln\dfrac{n+2}{n+1}+\ldots+\ln\dfrac{2n}{2n-1}$

$$\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}=u_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n},$$

et $u_n\leqslant\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\dfrac{2n}{2n-1}\right)\leqslant u_n+\dfrac{1}{2n}$.

b) Il en résulte, pour tout entier non nul n,

$u_n\leqslant\ln 2\leqslant u_n+\dfrac{1}{2n}$ soit : $\ln 2-\dfrac{1}{2n}\leqslant u_n\leqslant\ln 2$ et le théorème d'encadrement nous permet de conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$.

66 **1. a)** La propriété est vraie pour $n = k$.
Supposons qu'elle soit vraie au rang $n > k$

$$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1} < \frac{k^n}{n!} \text{ car } k < n+1.$$

b) $\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{k^n}{n!} \times \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{x}{k}\right)^n \times \dfrac{k^k}{k!}$.

c) Comme $0 < \dfrac{x}{k} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x}{k}\right)^n = 0$ et, (*théorème d'encadrement*) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

2. a) $\dfrac{n^{n-1}}{n!} = \dfrac{n}{n} \times \dfrac{n}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{n}{2} \times \dfrac{n}{1}$ produit dont tous les facteurs sont supérieurs ou égaux à 1.

b) $\dfrac{n^n}{n!} = n \times \dfrac{n^{n-1}}{n!} \geqslant n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.

Suites du type $u_{n+1} = au_n + b$

67 **1.** $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1 + 3$

$$= \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n\,;$$

la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 1$.

2. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ (*théorème 1*), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3$.

4. a) $S_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 - 3 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 - 3 + \cdots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3$

$$= -3(n+1) + \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= -3(n+1) + 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -3(n+1) = -\infty$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$.

68 **1.** $u_0 = 1\,; u_1 = 0\,; u_2 = -\dfrac{1}{2}\,; u_3 = -\dfrac{3}{4}\,; u_4 = -\dfrac{7}{8}$.

2. a) $v_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2} - \alpha = \dfrac{1}{2}(u_n - 1 - 2\alpha)$, donc « (v_n) est géométrique » équivaut à $\alpha = 1 + 2\alpha$, soit $\alpha = -1$.

b) $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ avec $v_n = u_n + 1$.

Donc $v_0 = 1$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $u_n = -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) $u_{n+1} - u_n = -1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0\,;$$

la suite (u_n) est décroissante. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc la suite (u_n) converge vers 1.

Remarque : On aurait pu montrer que (u_n) était minorée par -1… De plus, le calcul des cinq premiers termes permet de conjecturer que $u_n = -\dfrac{2^n - 1}{2^n} = -1 + \dfrac{1}{2^n}$.

La démonstration par récurrence ne pose pas de problème.

d) $u_n \in \left]-1 - 10^{-4}\,; -1 + 10^{-4}\right[\Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} < 10^{-4}$

$$\Leftrightarrow 2^n > 10^4\,;$$

or $2^{13} = 8\,192$, donc $u_n \in \left]-1 - 10^{-4}\,; -1 + 10^{-4}\right[$ à partir de $n = 14$.

69 **1.** $v_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{3} - \alpha$

$$= 2\left(u_n - \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2v_n = 2(u_n - \alpha),$$

donc « (v_n) géométrique » équivaut à $\alpha = \dfrac{1}{6} + \dfrac{\alpha}{2}$, soit $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

2. (v_n) est une suite géométrique de raison $2 > 1$, donc la suite ne converge pas.

3. $v_0 = u_0 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$ donc $v_n = \dfrac{5}{3} \times 2^n$.

$$s_n = \frac{5}{3} \times 2^0 + \frac{5}{3} \times 2^1 + \cdots + \frac{5}{3} \times 2^n = \frac{5}{3} \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$= \frac{5}{3}(2^{n+1} - 1).$$

4. $u_n = v_n + \dfrac{1}{3}$, donc

$$S_n = s_n + (n+1) \times \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3} + \frac{5}{3}(2^{n+1} - 1).$$

Suites du type $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$

70 **1.** Soit P_n : « $u_n > 1$ ».
$u_0 = 3 > 1$. P_0 est vraie. Supposons P_n vraie.

Alors $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{u_n + 1} > 4 - 3 = 1$ donc, pour tout n, $u_n > 1$, ce qui assure l'existence de u_{n+1}.

2. $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \dfrac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \dfrac{2}{3} v_n$:

la suite (v_n) est géométrique.

Sa raison est $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

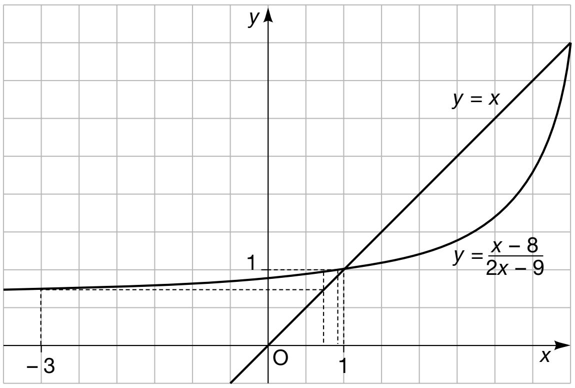
3. Comme pour tout n, $v_n \neq 1$,

$v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

71 *Corrigé dans le manuel.*

72 • **1. a) et b)**



La suite (u_n) semble converger vers 1.

2. P_n : « $u_n < 1$ ».

$u_0 = -3 < 1$ donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 8}{u_n - \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{7}{18 - 4u_n} ;$$

$u_n < 1 \Leftrightarrow 18 - 4u_n > 14 \Leftrightarrow \dfrac{7}{18 - 4u_n} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} < 1.$

Donc, pour tout entier n, $u_n < 1$.

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - 8 - 2u_n^2 + 9u_n}{2u_n - 9} = \dfrac{2u_n^2 - 10u_n + 8}{9 - 2u_n}$.

L'étude de la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 10x + 8$ sur $]-\infty\,; 1[$ montre que $f(x) > 0$. De plus, $9 - 2u_n > 0$ d'après **2.**

Donc, pour tout n, $u_{n+1} - u_1 > 0$ et la suite (u_n) est croissante. Étant majorée par 1, elle converge (*théorème 7*).

4. $v_{n+1} = 1 - \dfrac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 9} = \dfrac{v_n}{9 - 2u_n}$; or, $u_n < 1$,

donc $\dfrac{1}{9 - 2u_n} < \dfrac{1}{7}$ et v_n est positif. Il en résulte que pour

tout n, $0 < v_{n+1} < \frac{1}{7} v_n$. Une récurrence immédiate nous donne $0 < v_n < \dfrac{1}{7^n} v_0 = \dfrac{4}{7^n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{7^n} = 0$,

donc (*théorème 5*) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

5. Pour tout n, $u_n = 1 - v_n$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 - \lim_{n \to +\infty} v_n = 1.$$

6. $u_n > 0{,}99 \Leftrightarrow v_n < 0{,}01$.

Il suffit donc de choisir N tel que $\dfrac{4}{7^N} < \dfrac{1}{100}$, soit

$7^N > 400$; $7^3 = 343$, $7^4 = 2\,401$ donc $N = 3$.

73 • **1.** Soit P_n la propriété : « $u_n > 0$ ».

• $u_1 = \frac{3}{2} > 0$: P_1 est vraie.

• Supposons P_n vraie. Alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) > 0$,

donc P_{n+1} est vraie et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.

2. Pour $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n} > 0.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} > \sqrt{2}$.

Comme $u_1 > \sqrt{2}$, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{2}$.

3. • $\frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2}$$

$$= u_{n+1} - \sqrt{2}.$$

D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \text{ donc } u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}).$$

Soit p_n la propriété « $u_n - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ».

• $u_1 < 1 = \dfrac{1}{2^0}$, donc p_1 est vraie.

• Supposons p_n vraie.

D'après le résultat précédent :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

donc p_{n+1} est vraie et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}.$$

4. Il résulte de **2.** et **3.** que pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - \sqrt{2}) = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}.$$

Suites adjacentes

74 *Corrigé dans le manuel.*

75 • **1.** • $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$$= \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{-n+1}{(n+1)!} \leqslant 0,$$

(v_n) est décroissante.

• $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$;

donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. $u_7 = \frac{685}{252} \approx 2{,}718\,2$; $v_7 = \frac{4\,567}{1\,680} \approx 2{,}718\,4$.

Donc $\ell = 2{,}718$ à 10^{-3} près par défaut.

3. Supposons $\ell = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers non nuls.

Alors $u_q < \ell < v_q$, donc $q!\,u_q < p(q-1)! < q!\,v_q$.

Or $q!\,v_q = q!\left(u_q + \frac{1}{q!}\right)$,

donc $q!\,u_q < p(q-1)! < q!\,u_q + 1$.

Les trois nombres ci-dessus sont des entiers naturels : cette double inégalité est impossible, car il n'y a pas d'entier entre deux entiers consécutifs. C'est une contradiction : ℓ n'est pas rationnel.

76 • **1.** $u_1 = \frac{7}{2}$; $v_1 = \frac{15}{4}$; $u_2 = \frac{29}{8}$; $v_2 = \frac{59}{16}$.

2. a) $w_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{v_n - u_n}{2}$$

et donc $w_{n+1} = \frac{1}{4} w_n$. La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Pour tout n, $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n w_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

3. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} \leqslant \frac{u_n - v_n}{2} = -\frac{w_n}{2} \leqslant 0$, donc la suite (v_n) est décroissante. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. a) $t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) = t_n.$$

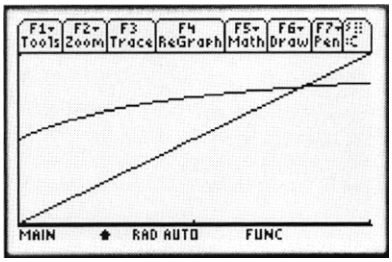
La suite (t_n) est constante et égale à $\frac{11}{3}$.

b) $\ell = \frac{11}{3}$.

77 • **1.** Pour tout x de $[0\,;2]$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$.

f est donc croissante sur $[0\,;2]$: $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$ soit $\frac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{3}$ et $f(x)$ appartient bien à $[1\,;2]$.

2.



a) (u_n) semble croissante et convergente et (v_n) semble décroissante et convergente. Elles semblent adjacentes.

b) $u_0 \in [1\,;2]$. Supposons que $u_n \in [1\,;2]$ alors, d'après la question **1.**, $u_{n+1} = f(u_n) \in [1\,;2]$: pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

$u_1 = \frac{3}{2}$ donc $u_0 \leqslant u_1$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n+1}$. f est croissante sur $[1\,;2]$ donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$, la suite (u_n) est croissante.

On démontre de même que :

– pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$;

– pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

c) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

Le dénominateur $(v_n + 1)(u_n + 1)$ étant toujours strictement positif (et même supérieur à 4), $v_{n+1} - u_{n+1}$ et $v_n - u_n$ sont de même signe. Par une récurrence immédiate, ils sont du signe de $v_0 - u_0$. Donc pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \geqslant 0 \text{ et } v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{4}(v_n - u_n).$$

d) Il en résulte (récurrence immédiate) que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$: le théorème d'encadrement nous permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : elles convergent vers un même réel α.
f étant continue, α est solution de l'équation $f(x) = x$ qui équivaut à $x^2 - x - 1 = 0$ qui admet une unique solution dans $[1 ; 2]$, le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

78 **1.** Notons P_n la proposition : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».
• $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$ donc P_0 est vraie.
• Supposons P_n vraie.

Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$, donc P_{n+1} est vraie et pour tout n, u_n et v_n sont bien strictement positifs.

2. $$(v_n - u_n)(v_n + u_n) = \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2}{4} - u_{n-1}v_{n-1}$$
$$= \frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{4} \geqslant 0 ;$$
donc $(v_n - u_n)(v_n + u_n) \geqslant 0$,
soit, d'après **1.**, $v_n - u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant u_n$.

3. a) $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}$$
$$= \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2} \times \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} \times (v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

b) Notons P_n la proposition : « $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$ ».

$v_0 - u_0 = b - a = \frac{1}{2^0}(b-a)$, donc P_0 est vraie.

On suppose P_n vraie. Alors :

$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(b-a)$: P_{n+1} vraie.

Donc, pour tout n, $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$.

4. • $$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{2^n}(b-a)\right]$$
$= 0$ (*théorème 1*).

• Tous les termes considérés sont strictement positifs ;

donc étudions $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \geqslant 1$, car $v_n \geqslant u_n$

donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$, car $u_n \leqslant v_n$;

donc la suite (v_n) est décroissante et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

5. $v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(5-2)$.

Il suffit d'avoir $\frac{3}{2^n} < \frac{1}{10^3}$ soit $2^n > 3\,000$.

Or, $2^{11} = 2\,048$ et $2^{12} = 4\,096$, donc $v_{12} - u_{12} \leqslant 10^{-3}$.
En fait, le calcul de u_3 et v_3 suffit pour affirmer que $\ell = 3{,}328$ à 10^{-3} près par défaut.

79 **1. a)** P_n : « $u_n < v_n$ ».
$u_0 = -1 < 2 = v_0$. P_0 est vraie.
Supposons P_n vraie, soit $u_n < v_n$. Alors :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10} = \frac{3(u_n - v_n)}{10} < 0,$$
donc P_{n+1} est vraie et, pour tout n, $u_n < v_n$.

b) • $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0$, donc (u_n) est croissante.

• $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{5} < 0$, donc (v_n) est croissante.

• D'après **a)**, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$ donc, par récurrence immédiate, $u_n - v_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n (u_0 - v_0)$.

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$ (*théorème 1*),
alors $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$: les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. $s_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a\,\frac{u_n + 4v_n}{5} = k(u_n + av_n)$,

d'où $u_n\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{5}\right) + v_n\left(\frac{1}{2} + \frac{4a}{5}\right) = ku_n + kav_n$.

En identifiant, $k = \frac{1}{2} + \frac{a}{5}$ et $ak = \frac{1}{2} + \frac{4a}{5}$, soit :

$$\frac{1}{2}a + \frac{a^2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{4a}{5} \Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 5 = 0$$

$\Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$ et $k = 1$ ou $a = -1$ et $k = \frac{3}{10}$.

3. Donc $s_n = u_n + \frac{5}{2}v_n = u_0 + \frac{5}{2}v_0 = 4$,

et $t_n = u_n - v_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n (u_0 - v_0) = \frac{-3^{n+1}}{10^n}$.

4. $\frac{7}{2}v_n = 4 + \frac{3^{n+1}}{10^n}$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{8}{7}$.

Fonctions continues et limites de suites

80 **1.** $u_1 = \sqrt{6} \approx 2{,}449$; $u_2 \approx 2{,}906$; $u_3 \approx 2{,}984$.
2. $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$.

Pour tout x, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6+x}} > 0$ donc f est strictement croissante (ou f est la composée de deux fonctions croissantes).

• $u_0 < u_1 < 3$.

• Supposons $u_n < u_{n+1} < 3$, alors f étant strictement croissante $f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(3)$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} < 3$, donc pour tout n, $u_n < u_{n+1} < 3$; la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge. Soit ℓ sa limite.

3. f étant continue sur $[0\,;+\infty[$, ℓ est solution positive de l'équation $f(x) = x$, soit $\sqrt{x+6} = x$.

Dans $\mathbb{R}^+$, (E) $\Leftrightarrow$ $x + 6 = x^2$, qui a deux solutions -2 et 3, donc $\ell = 3$.

81 • **1.** $u_1 < u_2 = 2$. Supposons $u_n < u_{n+1} \leqslant 2$ et soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$.

Pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-2\,;+\infty[$.

Donc $f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 2$, et ceci est donc vrai pour tout n. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2 : elle converge vers ℓ (*théorème 7*).

2. f étant continue sur $[-2\,;+\infty[$, ℓ est solution positive de l'équation $f(x) = x$.

Soit $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow$ (dans $\mathbb{R}^+$) $x + 2 = x^2$ qui admet deux solutions -1 et 2, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

82 • **1. a)** $u_0 = 1 > 0$.

Supposons $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} > 0$ donc, pour tout n, $u_n > 0$.

b) $u_1 = 2$ donc $\dfrac{3}{2} \leqslant u_1 \leqslant 2$.

$n \geqslant 1$; supposons $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$. Alors $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2}{3}$

et $1 + \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{2}{3}$, soit $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{3} < 2$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. $f(x) - f(y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{y-x}{xy}$; pour $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ et $y \geqslant \dfrac{3}{2}$:

$xy \geqslant \dfrac{9}{4}$, donc $\dfrac{1}{xy} \leqslant \dfrac{4}{9}$ et $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{4}{9}|x - y|$.

3. a) f étant continue et les termes (u_n) étant tous supérieurs à $\dfrac{3}{2}$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$, soit $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ ou encore $x^2 - x - 1 = 0$, donc $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le nombre d'or).

b) En utilisant **2.**, comme $\ell \geqslant \dfrac{3}{2}$:

$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - \ell|$, soit $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - \ell|$.

c) Soit P_n : « $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - \ell|$ » ;

$|u_1 - \ell| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{0} |u_1 - \ell|$ donc P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie : $|u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - \ell|$, alors :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n} |u_1 - \ell|,$$

donc P_{n+1} est vraie et ainsi, pour tout n, P_n est vraie.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

83 • **A. 1. a)** $f'(x) = 1 \times \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{4}$ et $f''(x) = \dfrac{1-x}{4}\mathrm{e}^{-x}$.

b)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f'	$-\infty$ ↗	$1 + \dfrac{1}{4\mathrm{e}}$	↘ 1

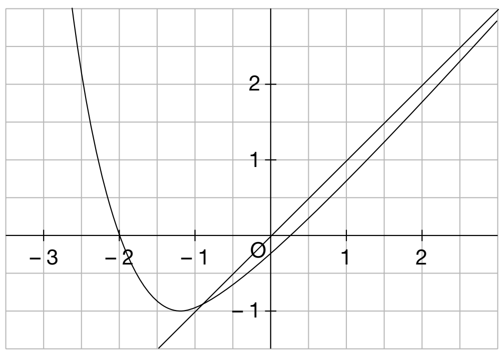
c) Sur $]-\infty\,;1]$, f' est continue, strictement croissante et $0 \in \left]-\infty\,;1 + \dfrac{1}{4\mathrm{e}}\right]$: l'équation $f'(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$. $\alpha \approx -1{,}20$.

2. a) f est décroissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-\dfrac{1}{4}(x+1)e^{-x}\right] = 0$: la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à C.

Si $x < -1$, C est au-dessus de Δ et si $x > -1$, C est en dessous de Δ.

c)



B. 1. La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers -1.

2. a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $-1 < u_n < 0$.

$u_1 = -\dfrac{1}{4}$: la propriété est vraie au rang 1.

Supposons la vraie au rang n.

f étant croissante sur $[-1\,;+\infty[$, $f(-1)<u_{n+1}<f(0)$, soit $-1<u_{n+1}<-\dfrac{1}{4}$ et la propriété est vraie pour tout n.

b) $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{1}{4}(u_n+1)e^{u_n}<0$: la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par -1, elle est convergente.

3. a) $0<u_{n+1}+1=u_n-\dfrac{1}{4}(u_n+1)e^{-u_n}+1$

$$=(u_n+1)\left(1-\frac{1}{4e^{u_n}}\right).$$

Comme $u_n<0$, $\dfrac{1}{e^{u_n}}>1$ et $u_{n+1}+1\leqslant\dfrac{3}{4}(u_n+1)$.

b) $u_0=-\dfrac{1}{4}$ soit $0\leqslant u_0+1\leqslant 1$: la propriété est vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang n.

D'après **a)**, $0<u_{n+1}+1\leqslant\dfrac{3}{4}(u_n+1)$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence, $0\leqslant u_{n+1}+1=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}=0$, le théorème 4 nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}=-1$.

84 **1.** Pour tout $x\geqslant 1$, $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}\geqslant 0$. f est croissante sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $f(1)=1$ donc pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)\geqslant 1$.

2. a) $u_0>1$. Supposons $u_n>1$, alors $u_{n+1}=f(u_n)>1$, donc pour tout entier n, $u_n>1$, v_n existe et est strictement positif, donc w_n existe.

b) $w_{n+1}=\ln\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}=\ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n}\right)^2=2w_n$.

c) $w_0=\ln\dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$w_n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Il en résulte que $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$.

$$u_n=\frac{1}{1-v_n}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

85 **1.** (u_n) semble décroissante et convergente vers $\ell\in\,]-2\,;-1{,}5[$.

2. a) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$.

$f(u_0)-u_0=-1$, donc $u_1\leqslant u_0$.

Supposons $u_{n+1}\leqslant u_n$. f étant croissante, $f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ soit $u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$. La propriété est vraie pour tout n : la suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout réel x, $f(x)\geqslant -2$, donc pour tout n, $u_n\geqslant -2$. $u_0=0$ et la suite est décroissante, donc pour tout n, $u_n\leqslant 0$. Décroissante et minorée, la suite est convergente.

3. a) $\varphi'(x)=e^x-1$: φ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, croissante sur $]0\,;+\infty[$.

φ atteint son minimum en 0 : $\varphi(0)=-1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

Sur $]-\infty\,;0[$, φ est strictement décroissante et continue ; $0\in\,]-1\,;+\infty[$: l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution. Même raisonnement sur $]0\,;+\infty[$.

Les équations $\varphi(x)=0$ et $f(x)=x$ étant équivalentes, cette dernière admet deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$.

b) $-1{,}85\leqslant\ell\leqslant-1{,}84$.

86 **1.** $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f:x\mapsto\dfrac{x}{2+x^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc si (u_n) converge, sa limite , est solution de l'équation $f(x)=x$, soit :

$$\frac{x}{2+x^2}=x\Leftrightarrow x(1-2-x^2)=0\Leftrightarrow x(1+x^2)=0.$$

La seule limite possible est donc 0 .

2. $2+u_n^2>2$, donc $\dfrac{1}{2+u_n^2}<\dfrac{1}{2}$ et $|u_{n+1}|\leqslant\dfrac{|u_n|}{2}$.

3. Montrons par récurrence que $|u_n|\leqslant\dfrac{|u_0|}{2^n}$.

• $|u_1|\leqslant\dfrac{|u_0|}{2}$ d'après **2.**

• Supposons $|u_n|\leqslant\dfrac{|u_0|}{2^n}$.

Alors $|u_{n+1}|\leqslant\dfrac{|u_n|}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|u_0|}{2^n}=\dfrac{|u_0|}{2^{n+1}}$, donc pour tout n, $|u_n|\leqslant\dfrac{|u_0|}{2^n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

4. u_{n+1} et u_n sont de même signe par définition, donc (récurrence immédiate), du signe de u_0.

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{2+u_n^2}-u_n=\dfrac{-u_n(1+u_n^2)}{2+u_n^2}$, donc $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $-u_n$, c'est-à-dire du signe de $-u_0$.

Si $u_0>0$, la suite est décroissante.

Si $u_0<0$, la suite est croissante.

Si $u_0=0$, la suite est constante (égale à 0).

87 **A.** La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x)$ est dérivable et pour tout $x\geqslant 0$.

$f'(x)=\dfrac{-x^2}{1+x}\leqslant 0$ sur $[0:+\infty[$.

f est décroissante et $f(0) = 0$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, soit $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
La fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$ est dérivable et pour tout $x \geqslant 0$. $g'(x) = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant$ sur $[0\,;+\infty[$.
g est décroissante et $g(0) = 0$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$, soit $\ln(1+x) \leqslant x$.

B. 1. $u_1 = \dfrac{3}{2} > 0$: la propriété est vraie au rang 1.
Supposons la vraie au rang n : $u_n > 0$. Alors comme pour tout n le facteur $\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ est strictement positif, $u_{n+1} > 0$: la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

2. $\ln u_1 = \ln \dfrac{3}{2}$: la propriété est vraie au rang 1.
Supposons la vraie au rang n.
Alors $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence la propriété est encore vraie au rang $n+1$ donc pour tout entier n non nul.

3. En appliquant (1) aux réels $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dots, \dfrac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leqslant \frac{1}{2^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Et en ajoutant membre à membre, on obtient :

$$\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n \leqslant \ln u_n \leqslant \mathrm{S}_n.$$

4. a) $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \dfrac{1}{4^n}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{T}_n = \dfrac{1}{3}$.

5. a) On a montré dans le 1. que tous les termes de la suite étaient strictement positifs.
Pour tout n non nul, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1$: la suite (u_n) est donc strictement croissante *(voir point méthode exercice 1 p. 11)*.

b) La suite (S_n) est elle aussi croissante et donc majorée par sa limite 1. Il en résulte que pour tout n non nul, $\ln u_n \leqslant 1$ soit encore $u_n \leqslant \mathrm{e}$.
Croissante et majorée, la suite (u_n) converge.

c) En utilisant les résultats des questions **3.** et **4.** et celui admis dans cette question :

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n\right) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \ln u_n \leqslant \lim_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n,$$

soit encore : $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}$.

Divers

88 **1.** $u_0 = 3{,}2 = \dfrac{32}{10}$; $u_1 = 3{,}243 = \dfrac{1}{10}\left(32 + \dfrac{43}{100}\right)$.

2. $\dfrac{43}{100} + \dots + \dfrac{43}{100^n} = \dfrac{43}{100} \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{100^n}}{1 - \dfrac{1}{100}} = \dfrac{43}{99}\left(1 - \dfrac{1}{100^n}\right)$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{43}{100} + \dots + \dfrac{43}{100^n}\right) = \dfrac{43}{99}$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{10}\left(32 + \frac{43}{99}\right).$$

4. $\mathrm{A} = \dfrac{3\,211}{990}$.

89 • **1.** $u_n > 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant k u_n$.

- Soit P_n : « $0 < u_n \leqslant k^n u_0$ ». $0 < u_0 = k^0 u_0$ donc P_0 vraie.
- Supposons P_n vraie : $0 < u_n \leqslant k^n u_0$.

Alors $0 < u_{n+1} \leqslant k u_n \leqslant k^{n+1} u_0$, donc P_{n+1} est vraie et pour tout n, $0 < u_n \leqslant k^n u_0$.
$0 < k < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ (*théorème 1*)
et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (*théorème 5*).

2. a) $u_1 = 10$; $u_2 = 50$; $u_3 = \dfrac{500}{3} \approx 166{,}66$;
$u_4 = \dfrac{1\,250}{3} \approx 416{,}66$; $u_5 = \dfrac{2\,500}{3} \approx 833{,}33$.
On pourrait conjecturer la croissance de (u_n) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Or, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{10^n} = \dfrac{10}{n+1}$; donc, pour $n \geqslant 10$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{10}{11} = k$, donc, d'après **1.**, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1}$; quel que soit $a > 1$, il existe n_0 tel que $a < n_0 + 1$ (n_0 est la partie entière de a) et donc, pour $n > n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{a}{n_0 + 1} < 1$ et d'après **1.**,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Remarque : Si $a \in [0\,;1]$; la suite converge aussi vers 0 et c'est encore vrai si $a < 0$.

3. a) $u_1 > ku_0$ et si $u_n \geqslant k^n u_0$, alors :
$$u_{n+1} > ku_n \geqslant k^{n+1}u_0 ;$$
donc, pour tout n, $u_n \geqslant k^n u_0$.
Puisque $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$ (*théorème 1*) et :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ (\textit{théorème 5}).}$$
b) Si $u_n \geqslant 1{,}1$ alors $u_{n+1} = u_n^2 \geqslant (1{,}1)^2 \geqslant 1{,}1$ (propriétés de $x \mapsto x^2$ sur $[1 ; +\infty[$); donc, pour tout n, $u_n \geqslant 1{,}1$.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \geqslant 1{,}1 > 1$ et d'après **3. a)**, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

90 • **1.** $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$, donc, pour tout n, $u_n > 0$.

2. Pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < 1$: la suite (u_n) est décroissante.

3. Décroissante et minorée, elle converge (*théorème 7*).

4. $u_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $u_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $u_3 = \dfrac{1}{2}$; $u_4 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

On peut conjecturer que $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ pour tout n.

$u_0 = \dfrac{\sqrt{0+1}}{0+1} = 1$, la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Alors $u_{n+1} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+1} + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$,

donc, pour tout n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

91 •• **1.** $u_1 = -1 < 3$. Supposons $u_n \leqslant 3$. Alors :
$$u_{n+1} \leqslant \frac{3n + 3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{6n+6}{2(n+1)} = 3,$$
donc la suite est bien majorée par 3.

2. $u_{n+1} - u_n = \left[\dfrac{n}{2(n+1)} - 1\right]u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$
$$= \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n) \geqslant 0 ;$$
la suite (u_n) est croissante.
Croissante et majorée, elle converge (*théorème 7*).

3. $v_{n+1} = (n+1)\left[3 - \dfrac{n}{2(n+1)}u_n - \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}\right]$
$$= \frac{1}{2}n(3 - u_n) = \frac{1}{2}v_n .$$
La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 4$.

4. $v_n = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $u_n = 3 - \dfrac{v_n}{n}$;
or, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Prendre toutes les initiatives

92 Étant adjacentes (v_n) et (w_n) convergent vers une limite commune ℓ.
$u_n = v_n - 1$: somme de deux suites convergentes, (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell - 1$.
De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3 - \ell$.
$\ell - 1 = 3 - \ell$ soit $\ell = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

93 $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{e^{\frac{1}{n}}}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^0 = 1$.

94 **a)** Montrons par récurrence que pour tout n,
$$1 \leqslant u_n \leqslant 3.$$
$u_0 = 1$. La propriété est vrai au rang 0.
Supposons la vraie au rang n.
$1 \leqslant u_n \leqslant 3 \Leftrightarrow 4 \leqslant 3 + u_n \leqslant 6 \Leftrightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{6}$.
Comme $[2 ; \sqrt{6}] \subset [1 ; 3]$, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
b) $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $[-3 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{3+x}.$$
Montrons par récurrence que pour tout n,
$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$
$u_0 = 1$ et $u_1 = 2$: la propriété est vraie au rang 0.
Supposons la vraie au rang n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
La fonction f étant strictement croissante sur $[1 ; 3]$ $\left(f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} > 0\right)$, il en résulte que $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée : elle converge vers ℓ. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{3+x} = x \Leftrightarrow 3 + x = x^2$ équation qui admet une seule solution positive : $\ell = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

95 $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln 1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - 1}$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n = \dfrac{1}{1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.

96 • Soit α la mesure en radian de $\widehat{ACB}$, alors :
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ soit } 0 < \cos\alpha < 1 .$$

$AB = BC \sin\alpha$; $AH_1 = AB\cos\alpha = BC\cos\alpha\sin\alpha$;
$H_1H_2 = AH_1\cos\alpha = BC\cos^2\alpha\sin\alpha$;
$H_{n-1}H_n = H_{n-2}H_{n-1}\cos\alpha = BC\cos^n\alpha\sin\alpha$.

Donc $u_n = BC\sin\alpha \times \dfrac{1-\cos^{n+1}\alpha}{1-\cos\alpha}$,

et, puisque $0 < \cos\alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^{n+1}\alpha = 0$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{BC\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

97 **a)** Montrons par récurrence que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 4$ (conjecture à la calculatrice).
$u_0 = 1$. La propriété est vraie au rang 0.
Supposons la vraie au rang n.
$2 \leqslant u_n \leqslant 4 \Leftrightarrow 2 + \ln 2 \leqslant 2 + \ln u_n \leqslant 2 + \ln 4$.
Comme $[2 + \ln 2 ; 2 + 2\ln 2] \subset [1 ; 4]$, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 4$.
b) $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = 2 + \ln x.$$
Montrons par récurrence que pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
$u_0 = 1$ et $u_1 = 2$: la propriété est vraie au rang 0.
Supposons la vraie au rang n : $u_n \leqslant u_{n+1}$. La fonction f étant strictement croissante sur $[1 ; 4]$ ($f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$), il en résulte que $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée : elle converge vers ℓ, la fonction f étant continue sur $]0 ; +\infty[$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
$2 + \ln x = x \Leftrightarrow \ln x - x + 2 = 0$.
Étudions sur $[1 ; 4]$ la fonction g définie par :
$$g(x) = \ln x - x + 2.$$
$g'(x) = \dfrac{1-x}{x} < 0$ sur $[1 ; 4]$ donc g est strictement décroissante. $g(1) = 1$ et $g(4) = 2\ln 2 - 2 < 0$. Il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha = 3{,}146\,19$ à 10^{-5} près par défaut.

Problèmes

(page 189)

98 **1.** $v_n = \dfrac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}, \text{ (pour } n \neq 0) ;$$

et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

2. a) • Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 1 - \cos x$ donc $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante.
Or $f(0) = 0$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$.
• $g'(x) = f(x) \geqslant 0$ donc g est croissante.
Puisque $g(0) = 0$, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$.
• $h'(x) = g(x) \geqslant 0$ donc h est croissante.
Puisque $h(0) = 0$, pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) \geqslant 0$.
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 \leqslant n \times n^3 = n^4$. Pour tout $x \geqslant 0$, d'après **a)**, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$, donc pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^3}{6n^6} \leqslant \sin\dfrac{k}{n^2} \leqslant \dfrac{k}{n^2}$. En sommant pour k de 1 à n, $v_n - \dfrac{1}{6n^6}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 \leqslant u_n \leqslant v_n$;
or, $\sum k^3 \leqslant n^4$ donc $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$.
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n - \dfrac{1}{6n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$
et (*théorème d'encadrement (5)*), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

99 **1.** Si (u_n) est constante, alors pour tout n :
$$u_n = \frac{3}{35}u_n + \frac{2}{35}u_n = \frac{1}{7}u_n \text{ et donc } u_n = 0.$$
Une suite de S est constante : la suite nulle.
2. Si (u_n) est arithmétique, de raison r, alors :
$$u_n + 2r = \frac{3}{35}(u_n + r) + \frac{2}{35}u_n.$$
u_n est, pour tout n, une fonction (constante) de r donc (u_n) est constante donc nulle.
3. Si (u_n) est géométrique, de raison q, de même (u_n) est, pour tout n, une fonction (constante) de q, donc (u_n) est constante donc nulle.

4. $\dfrac{3}{35}\left[\alpha\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\right] + \dfrac{2}{35}\left[\alpha\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n} + \beta\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n}\right]$

$$= \alpha\left[\frac{3}{35}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \frac{2}{35}\left(\frac{2}{7}\right)^{n}\right] + \beta\left[\frac{3}{35}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{2}{35}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\right]$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n}\left[\frac{3}{35}\times\frac{2}{7} + \frac{2}{35}\right] + \beta\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\left[\frac{3}{35}\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{2}{35}\right]$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n} \times \frac{4}{49} + \beta\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} \times \frac{1}{25}$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta\left(-\frac{1}{5}\right)^{n+2}.$$

La suite appartient bien à S.

4. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = -\dfrac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \dfrac{2}{7}\alpha - \dfrac{1}{5}\beta = -\dfrac{4}{35} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 10\alpha - 7\beta = -4 \end{cases}$

D'où $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

100 **Partie A**

1. $\varphi'(x) = \dfrac{x+1}{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$: φ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. La fonction φ étant continue, $\varphi(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution β.

$\varphi(0{,}27) \times \varphi(0{,}28) < 0$: $0{,}27 \leqslant \beta \leqslant 0{,}28$.

2. $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x+1)^2}$.

x	0		β		1		α_n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$			
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	n	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. f est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ et de plus, $f([1\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[$ donc, pour tout naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

2. a) $f(e^n) = n \times \dfrac{e^n}{e^n+1} \leqslant n = f(\alpha_n)$. f étant croissante sur $[1\,;+\infty[$, $e^n \leqslant \alpha_n$.

b) $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n \ln(\alpha_n) = n(\alpha_n + 1)$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha_n) = n + \frac{n}{\alpha_n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}.$$

Pour tout n non nul, $0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n} \leqslant \dfrac{n}{e^n}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n} = 1$.

3. a) $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) = \dfrac{n}{e^n}$.

b) Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t.$$

g est dérivable. Pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = \ln(1+t) \geqslant 0$.

g est donc croissante et comme $g(0) = 0$, il en résulte : pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant (1+t)\ln(1+t) - t$.

La fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(t) = (1+t)\ln(1+t) - t - \frac{t^2}{2}$$

est dérivable. Pour tout $t \geqslant 0$, $h'(t) = \ln(1+t) - t$.

$h''(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 \leqslant 0$ donc h' est décroissante.

Comme $h'(0) = 0$, pour tout $t \geqslant 0$, $h'(t) \leqslant 0$.

h est donc décroissante et comme $h(0) = 0$, il en résulte : pour tout $t \geqslant 0$, $(1+t)\ln(1+t) - t \leqslant \dfrac{t^2}{2}$.

c) $0 \leqslant (1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) - \varepsilon_n \leqslant \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$ donc

$0 \leqslant \dfrac{n}{e^n} - \varepsilon_n \leqslant \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$. De la première inégalité, il résulte

$\varepsilon_n \leqslant \dfrac{n}{e^n}$ soit $\dfrac{\varepsilon_n^2}{2} \leqslant \dfrac{n^2}{2e^{2n}}$.

d) Pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant n - \varepsilon_n e^n \leqslant \dfrac{n^2}{2e^{2n}}$ et donc

$0 \leqslant e^n + n - \alpha_n \leqslant \dfrac{n^2}{2e^{2n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^n + n - \alpha_n) = 0$.

C'est nouveau au bac

(page 190)

101 **1.** a et d.
2. a et b.
3. a, c et d.

102 **1.** F ; **2.** V ; **3.** V ; **4.** F

103 **1.** F ; **2.** F ; **3.** V

104 **1.** F ; **2.** V ; **3.** F

105 **1.** Cours.

2. a) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n}$.

La suite (u_n) est donc croissante.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, comme $\lim\limits_{X\to\ell} e^{-x} = e^{-\ell}$ (*théorème 2*) alors ℓ est solution de l'équation $\ell = \ell + e^{-\ell}$.

c) Cette dernière égalité est impossible car, quel que soit ℓ, $e^{-\ell}$ est non nul. La suite (u_n) n'est donc pas convergente.