

### Travaux dirigés (page 153)

#### TD 1

1  $f_\alpha$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

$$\text{et } f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Le signe de  $f_\alpha$  est donc celui de  $\alpha$ .

2 1.  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0.$

Sur  $]0; +\infty[$   $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$  donc  $f_\alpha$  est continue sur  $]0; +\infty[$ . De plus  $f_\alpha(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$  donc  $f_\alpha$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

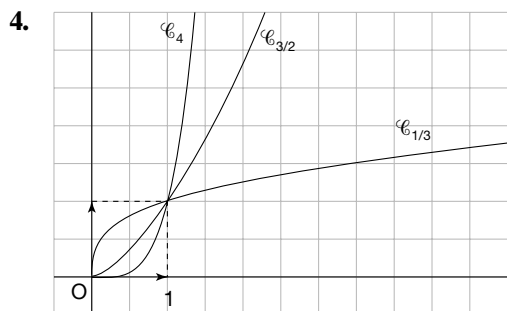
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x} = +\infty.$

$x$	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+
$f_\alpha(x)$	0	$+\infty$

3.  $\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1) \ln x}.$

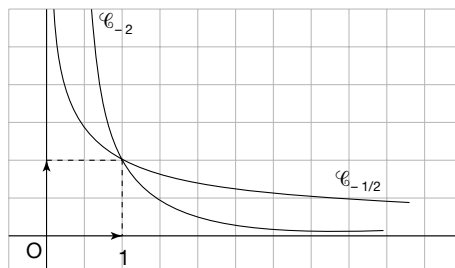
Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(\alpha-1) \ln x} = +\infty$  donc  $f_\alpha$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

Si  $\alpha > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{(\alpha-1) \ln x} = 0$  donc  $f_\alpha$  est dérivable en zéro.



3 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0.$

$x$	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		-
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	0



#### TD 2

2 1.  $f$  est définie sur  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = e^{x \ln x}.$

2. •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$

3. a) Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = (1 + \ln x)e^{x \ln x}.$

b)

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f$	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$

•  $e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,69.$

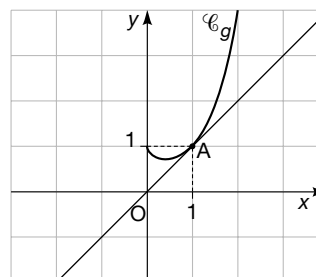
4. a) Pour tout  $x > 0$ ,

$$t(x) = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \times \ln x.$$

b) Posons  $X = x \ln x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} X = 0$  et  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = -\infty.$

c) Donc la courbe représentative de  $g$  admet pour tangente en  $(0; 1)$  l'axe des ordonnées.

$g(1) = f(1) = 1$  et  $g'(1) = f'(1) = 1$  donc la tangente en  $A(1; 1)$  a pour équation  $y - 1 = 1(x - 1)$  ou  $y = x.$



**TD 3**

**1** 1. Immédiat.

2. a) •  $\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{x \ln \frac{2}{5}}$ , et si  $f(x) = e^{x \ln \frac{2}{5}}$ ,

$$f'(x) = \ln \frac{2}{5} e^{x \ln \frac{2}{5}} < 0.$$

Donc les fonctions  $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$  et  $x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x$  sont strictement décroissantes sur  $]0; +\infty[$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$ .

b)

<b>x</b>	0	1	$+\infty$
<b>f'(x)</b>		-	
<b>f</b>	2	1	0

Donc l'équation a une solution et une seule strictement positive qui est  $x = 1$ .



**2** 1.  $x^5 = e^{5 \ln x}$  et  $(2,5)^x = e^{x \ln (2,5)}$ , donc  $x^5 = (2,5)^x$  équivaut à  $5 \ln x = x \ln 2,5$ . Puisque  $x > 0$ , cela équivaut à  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2,5}{5}$ .

2. a)  $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  sur  $]0; +\infty[$ .

b) •  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

•  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  ;

<b>x</b>	0	1	e	$+\infty$
<b>f'(x)</b>		+	0	-
<b>f</b>	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

$\frac{\ln 2,5}{5} \approx 0,18$ , donc l'équation a deux solutions strictement positives et deux seulement,  $\alpha$  et  $\beta$ , telles que  $1 < \alpha < e$  et  $\beta > e$ .

c)  $1,25 < a < 1,26$  et  $14,64 < b < 14,65$ .

## Corrigés des exercices

**Maîtriser le cours** (page 155)

**1. et 2. Puissances réelles et  $x \mapsto a^x$ ,  $a > 0$  et  $a \neq 1$**

**1** Corrigé dans le manuel.

**2** a)  $e^{\sqrt{3} \ln x} \leq e^{-\ln 3}$  d'où  $\sqrt{3} \ln x \leq -\ln 3$ .

$0 < x < e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3}$  ou encore  $0 < x \leq 3^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ .

b)  $x = 2^{-\frac{1}{\pi}}$  car  $e^{\pi \ln x} = e^{-\ln 2}$ .

c)  $e^{-x \ln 2} = e^{\ln 3}$  d'où  $x = -\frac{\ln 3}{\ln 2}$ .

d)  $(x-1) \ln 7 = x \ln 3$  soit  $x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$ .

e)  $x \ln 3 = (2x+1) \ln 4$  soit  $x = \frac{\ln 4}{\ln \frac{3}{16}}$ .

f)  $(1-3x) \ln 5 = -3 \ln 5$  soit  $x = \frac{4}{3}$ .

**3** a)  $x \ln 3 \geq \ln 4$  soit  $x \in \left[ \frac{\ln 4}{\ln 3}; +\infty \right[$ .

b)  $-x \ln 3 > \ln 4$  soit  $x \in \left] -\infty; -\frac{\ln 4}{\ln 3} \right[$ .

c)  $-x \ln 5 < 2x \ln 5$  soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

d)  $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$  équivaut à  $\frac{2 \cdot 2^x - 1}{3(2^x+1)} < 0$ .

Soit  $2^{x+1} < 1$  ou  $x+1 < 0$  et  $x \in ]-\infty; -1[$ .

e)  $x > 0$  et  $\frac{1}{2} x \ln x > \sqrt{x} \ln x$  ou

$x > 0$  et  $\ln x \times \left( \frac{1}{2} x - \sqrt{x} \right) > 0$ .

$x > 0$  et  $\sqrt{x} \ln x \left( \frac{1}{2} \sqrt{x} - 1 \right) > 0$ .

Donc  $\mathcal{S} = ]0; 1[ \cup ]4; +\infty[$ .

f)  $-x \ln \sqrt{2} < \ln 2$  soit  $-\frac{1}{2}x \leq 1$

d'où  $x \geq -2$ ,  $\mathcal{S} = [-2; +\infty[$ .

**4 a)** En posant  $2^x = X$  l'équation devient  $X^2 + 2X - 3 = 0$

$X_1 = -1$  et  $X_2 = 3$  d'où  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\}$ .

**b)** On montre de même que  $0 < 2^x < 3$

$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{\ln 3}{\ln 2} \right]$ .

**5 a)** Même principe qu'au **4. a)** donc

$\mathcal{S} = \left\{ 1; \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\}$ .

**b)**  $\mathcal{S} = ]-\infty; 1] \cup \left[ \frac{\ln 3}{\ln 2}; +\infty \right[$ .

**6 a)** En posant  $3^x = X$  alors  $3X^2 - 7X + 2 = 0$

$X_1 = 2$  et  $X_2 = \frac{1}{3}$ .

Donc  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 2}{\ln 3}; -1 \right\}$ .

**b)**  $3^x \leq \frac{1}{3}$  ou  $3^x \geq 2$  donc  $\mathcal{S} = ]-\infty; -1] \cup \left[ \frac{\ln 2}{\ln 3}; +\infty \right[$ .

**7** En posant  $3^x = X$  et  $3^y = Y$  on obtient le système :  $XY = 9$  et  $X + Y = 4\sqrt{3}$

d'où  $(X_1 = 3\sqrt{3}$  et  $Y_1 = \sqrt{3})$  ou  $(X_2 = \sqrt{3}$  et  $Y_2 = 3\sqrt{3})$ .

Ainsi  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right); \left( \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right) \right\}$ .

**8** Pour tout  $a > 0$  et tout  $b > 0$

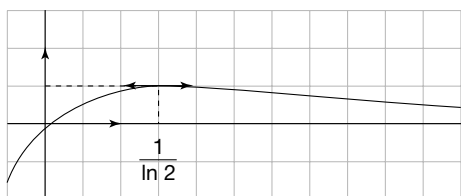
$a^{\ln b} = e^{\ln b \ln a}$  et  $b^{\ln a} = e^{\ln a \ln b}$ .

D'où l'égalité.

**9**  $f(x) = xe^{-x \ln 2}$  définie sur  $\mathbb{R}$

$f'(x) = (1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e \ln 2}$	0

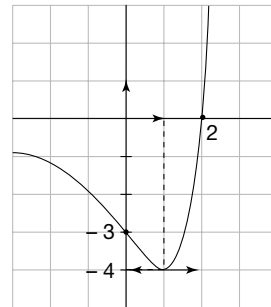


**10**  $f(x) = (e^{x \ln 2})^2 - 4e^{(x \ln 2)}$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$f'(x) = 2 \ln 2 [e^{x \ln 2} - 2]e^{x \ln 2}$ .

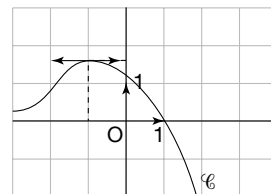
$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	0	-4	$+\infty$



**11**  $f(x) = (1-x)e^{x \ln 2}$

$f'(x) = (\ln 2 - x \ln 2 - 1)e^{x \ln 2}$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{\ln 2 - 1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e \ln 2}$	$-\infty$



**12** Corrigé dans le manuel.

### 3. La fonction racine n-ième

**13**  $A = 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{3}} = 2^4$ ;  $B = 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{31}{6}}$ .

**14**  $A = 2^2 \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-3} \times 2^{-\frac{1}{4}} = 1$ .

$B = 2^{\frac{10}{10}} - 2^{-2} 2^3 = 0$ .

**15** Corrigé dans le manuel.

**16**  $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \left( 3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right)$  est égal à :

$\left( 3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \right) \left[ \left( 3^{\frac{1}{3}} \right)^2 + 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + \left( 2^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right]$ .

Cette expression est de la forme  $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ , elle est donc égale à  $a^3 - b^3 = 1$ . D'où le résultat.

**17**  $\sqrt[3]{9 \times 27 \times 243} = \sqrt[3]{3^2 \times 3^3 \times 3^5} = \sqrt[3]{3^{10}} = 27\sqrt[3]{3}$

**18**  $A = x^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$ ;  $B = x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}$

**19**  $A = x^{-1}x^{-\frac{4}{3}}x^{-4} = x^{-\frac{19}{3}}$  ;  $B = x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{4}}$ .

**20**  $A = x^{-2}x^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{13}{6}}$  ;  $B = x^{-2}x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{7}{6}}$ .

**21** • a)  $x > 0$  et  $x^{\frac{7}{2}} = 4$  d'où  $x = 4^{\frac{2}{7}}$ .

b)  $x > 0$  et  $x\left(x^{\frac{1}{3}} - 4\right) < 0$  d'où  $\mathcal{S} = ]0 ; 64[$ .

**22** a)  $x > 0$  et  $x^{\frac{2}{3}}\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right) < 0$ ,  $\mathcal{S} = ]0 ; 1[$ .

b)  $x > 0$  et  $-\frac{4}{3} \ln x \leq \ln 2$ ,  $\mathcal{S} = \left]0 ; 2^{-\frac{3}{4}}\right]$ .

**23** a)  $x > -1$  et  $\frac{5}{2}(x+1) < 0$  soit  $\mathcal{S} = ]-1 ; 0]$ .

b)  $x^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{7}{4}}$  d'où  $x \in \left[0 ; \left(2^{\frac{7}{2}}\right)^2\right]$ .

**24** Corrigé dans le manuel.

**25** a)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ .      b)  $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ .

**26** a)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ .      b)  $f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}}$ .

**27**  $f'(x) = \frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$ .

**28** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{I}$ ,  $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}e^{-x} - x^{\frac{5}{3}}e^{-x}$ .

$f'(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}\left[\frac{5}{3} - x\right]$  d'où le résultat.

**29**  $f'(x) = -\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$  donc si  $x \in ]-\infty ; 1]$ .

$f'(x) < 0$ .

**30** Pour tout  $x$  de  $\mathbb{I}$ ,  $f'(x) = 1 - 2x^{-\frac{2}{3}}$ .

$f'(x) > 0$  si et seulement si  $x^{-\frac{2}{3}} < \frac{1}{2}$

soit  $-\frac{2}{3} \ln x < -\ln 2$  donc  $\ln x > \frac{3}{2} \ln 2$

et  $x \in ]2\sqrt{2} ; +\infty[$ .

#### 4. Croissances comparées

**31** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**32** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**33** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**34** Corrigé dans le manuel.

**35** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**36**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(\ln x)^2} = +\infty$ .

**37**  $\frac{e^{2x+3}}{x^{\frac{7}{2}}} = e^3 \frac{e^{2x}}{x^{\frac{7}{2}}} > \frac{e^x}{x^{\frac{7}{2}}}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+3}}{x^{\frac{7}{2}}} = +\infty$ .

**38**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$  donc pour  $x$  suffisamment

grand  $\sqrt[50]{x}$  dépasse  $\ln x$ .

**39** a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

**40** a)  $g : x \mapsto e^{x^2}$ ,  $g(0) = 1$  donc  $f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 0$ .

b)  $g(x) = e^{3x}$ ,  $g(0) = 1$ ,  $f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$   
et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 3$ .

**41** Corrigé dans le manuel.

### Apprendre à chercher

(page 157)

**42** De  $b + c \geq \sqrt{bc}$  à  $a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$

#### Les outils :

- Étude d'une fonction.
- Résolution d'inéquations.

#### Les objectifs :

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir exploiter les variations d'une fonction.

1.  $(b+c)^2 - 4bc = (b-c)^2$  donc  $(b+c)^2 \geq 4bc$ .

2.  $(a+b+c) \geq 3\sqrt[3]{abc}$  équivaut à  $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$  [1].

3. a)  $f$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{(x+b+c)^3}{bcx}$ .

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{(x+b+c)^2(2x-b-c)}{bcx^2}$ .

Or  $x > 0, b > 0$  et  $c > 0$ , donc  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b+c}{2}$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{b+c}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$		$f\left(\frac{b+c}{2}\right)$	

$$f\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{27}{4} \frac{(b+c)^2}{bc}$$

Or  $(b+c)^2 \geq 4bc$  donc  $\frac{(b+c)^2}{4bc} \geq 1$  et  $f\left(\frac{b+c}{2}\right) \geq 27$ .

D'où le résultat.

### 43 Comparaison de $u^v$ et $v^u$

#### Les outils :

- Exploiter la croissance de la fonction exponentielle.
- Étudier une fonction.

#### Les objectifs :

- Savoir traduire un problème équivalent.
- Savoir exploiter les variations d'une fonction.

1.  $1 < u < v$  donc  $0 < \ln u < \ln v$ ; donc  $e^{v \ln u} < e^{u \ln v}$  équivaut à  $v \ln u < u \ln v$  [1].

2. a) et b)  $\ln u > 0$  et  $\ln v > 0$ , donc [1] équivaut à  $\frac{v}{\ln v} < \frac{u}{\ln u}$ .

3. a) On introduit la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

b)  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ;

$x$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	0	$\frac{1}{e}$	0

$f$  est strictement croissante sur  $]1; e]$ , donc :

• si  $1 < u < v \leq e$ , alors  $\frac{\ln u}{u} < \frac{\ln v}{v}$  donc  $u^v < v^u$ ;

• si  $e \leq u < v$ , alors  $\frac{\ln u}{u} > \frac{\ln v}{v}$  donc  $u^v > v^u$ .

4.  $u = \sqrt{n}$  et  $v = \sqrt{n+1}$ ,  $u^v = (\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$  et

$$v^u = (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$$

• si  $n = 1$ ,  $u^v = 1$  et  $v^u = \sqrt{2}$ ;

• si  $n = 2$ ,  $u^v < v^u$ ;

• si  $n > 2$ ,  $u^v > v^u$ .

## Pour progresser

(page 158)

### Équations. Inéquations. Systèmes

44 a)  $x^{\frac{1}{5}} = X$  et  $X^2 - 3X + 2 = 0$ , d'où  $X = 1$  et  $X = 2$ .

Donc  $x^{\frac{1}{5}} = 1$  ou  $x^{\frac{1}{5}} = 2$ , soit  $x = 1$  ou  $x = 2^5$ ;  $\mathcal{S} = \{1; 2^5\}$ .

b)  $x^{\frac{1}{5}} = X$  et  $X^2 - 3X + 2 \geq 0$ , d'où  $0 < X \leq 1$  ou  $X \geq 2$ ;  $\mathcal{S} = ]0; 1] \cup [2^5; +\infty[$ .

45 a)  $\sqrt[3]{x} = X$ ,  $X > 0$  et  $X^2 - X - 2 = 0$ , d'où  $X = -1$  ou  $X = 2$ ;  $\mathcal{S} = \{2^3\}$ .

b)  $X^2 - X - 2 \leq 0$ , d'où  $0 < X \leq 2$ ;  $\mathcal{S} = ]0; 2^3]$ .

46 •  $x^{\frac{1}{4}} = X$ ,  $X > 0$ ;  $3X^2 + X - 4 < 0$ ,

d'où  $-\frac{4}{3} < X < 1$  soit  $0 < X < 1$ ;  $\mathcal{S} = ]0; 1[$ .

47 •  $x > 0$  et  $y > 0$ ;  $x \ln y = y \ln x$  et  $y^2 = x$ ;

d'où  $y^2 \ln y = 2y \ln y$  ou  $y \ln y(y-2) = 0$ ;

donc  $y = 2$  et  $x = 4$  ou  $x = 1$  et  $y = 1$ .

48 •  $x^{\frac{3}{4}} = X > 0$  et  $y^{\frac{2}{3}} = Y > 0$ ;  $X - 3Y = 0$

et  $X^2 - Y^2 = 648$ , d'où  $Y = 9$  et  $X = 27$ ;

d'où  $x = 81$  et  $y = 27$ .

49 •  $x^{\frac{1}{4}} = X > 0$  et  $y^{\frac{1}{4}} = Y > 0$ ;  $X - Y^2 = 0$

et  $X^3 - 32Y = 0$ , d'où  $Y = 2$  et  $X = 4$ ;  $x = 4^4$  et  $y = 2^4$ .

### Limites

50 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

51 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

52 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

53 a) On pose  $\frac{1}{x} = X$  d'où  $f(X) = \frac{e^X - 1}{X}$ ;

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$  donc  $\lim_{X \rightarrow 0} f(X) = 1$ .

b) On pose  $\frac{1}{x} \ln 2 = X$ , d'où  $f(X) = \frac{e^X - 1}{X} \ln 2$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2.$$

54 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

## Études de fonctions

**55** 1. a)  $f'(x) = 1 - x^{-\frac{2}{3}}$ .

b)  $f'(x) < 0$  pour  $x \in ]0; 1[$  car  $1 - x^{-\frac{2}{3}} < 0$  si  $-x^{-\frac{2}{3}} < -1$   
 $x^{-\frac{2}{3}} > 1$  donc  $-\frac{2}{3} \ln x > 0$  soit  $\ln x < 0$  et  $0 < x < 1$ .

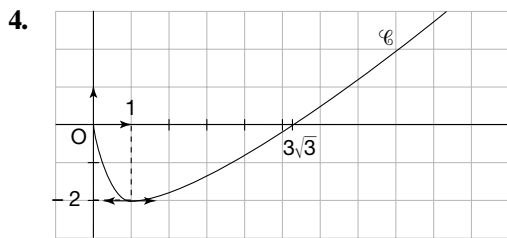
2. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ .

b) Donc  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$ .

3. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b)

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-2	$+\infty$



**56** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. a)  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{3x}$ .

b) Le signe de  $f'(x)$  est donc celui de  $x^{\frac{1}{3}} - 3$ .

3.

$x$	0	27	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$3(1 - \ln 3)$	$+\infty$

4. a)  $3(1 - \ln 3) < 0$ ;  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; 27[$  et l'image de cet intervalle est l'intervalle  $]3(1 - \ln 3); +\infty[$ , donc 0 a un antécédent unique  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 27$ . De même, il existe  $\beta$  unique de  $]27; +\infty[$ .

b)  $6 < \alpha < 7$  et  $93 < \beta < 94$ .

c) • Pour  $0 < x < \alpha$  ou  $x > \beta$ ,  $f(x) > 0$  donc  $\mathcal{C}_1$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_2$ .

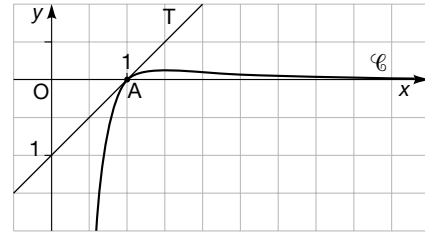
• Pour  $\alpha < x < \beta$ ,  $f(x) < 0$  donc  $\mathcal{C}_1$  est en dessous de  $\mathcal{C}_2$ .

**57** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses est asymptote en  $+\infty$ .

2.  $f'(x) = \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$ ;

$x$	0	$\frac{1}{e^3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f$	$-\infty$	$\frac{1}{3e}$	0

3. Au point A d'abscisse 1,  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = 1$ , donc la tangente à  $\mathcal{C}$  en A a pour équation  $y = x$ .



**58** 1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

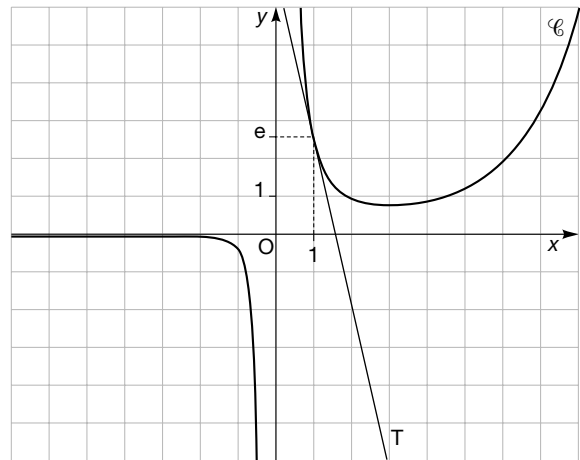
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ .

L'axe des ordonnées est asymptote verticale et l'axe des abscisses est asymptote en  $-\infty$ .

2.  $f'(x) = \frac{x^3 e^x - 3x^2 e^x}{x^6} = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$ ;

$x$	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f$	0	$+\infty$	$\frac{e^3}{27}$	$+\infty$

3.  $f(1) = e$  et  $f'(1) = -2e$ . Donc la tangente en  $x = 1$  a pour équation  $y - e = -2e(x - 1)$  ou  $y = -2ex + 3e$ .



**59** 1. et 2. • Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = x e^{-x \ln 2}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

$f'(x) = e^{-x \ln 2} - x \ln 2 e^{-x \ln 2} = e^{-x \ln 2}(1 - x \ln 2)$ ;

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	$-\infty$	$\frac{1}{e \ln 2}$	0

•  $g(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{x}$ ;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty.$$

$$g'(x) = \frac{e^{x \ln 2} (x \ln 2 - 1)}{x^2};$$

<b>x</b>	$-\infty$	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
<b>g'(x)</b>		-	- 0 +	
<b>g</b>	0	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow e \ln 2 \nearrow +\infty$	

3. a) A a pour coordonnées  $(\frac{2}{\ln 2}; \frac{2e^{-2}}{\ln 2})$

et  $f'(\frac{2}{\ln 2}) = -e^{-2}$ , donc T a pour équation

$$y = -e^{-2}x + \frac{4}{\ln 2}e^{-2}.$$

b)  $f(x) + e^{-2}x - \frac{4}{\ln 2}e^{-2} = h(x);$

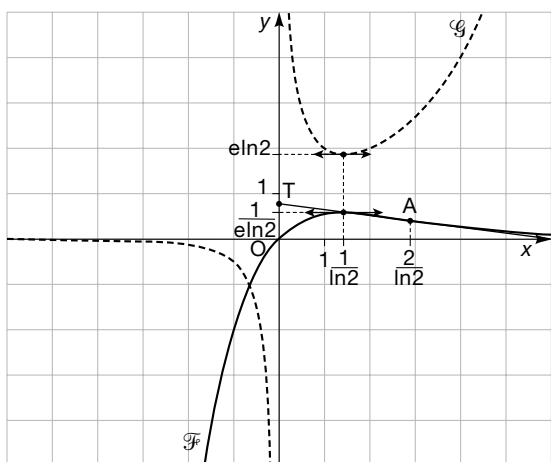
donc  $h(x) = xe^{-x \ln 2} + e^{-2}x - \frac{4e^{-2}}{\ln 2};$

$$h'(x) = e^{-x \ln 2}(1 - x \ln 2) + e^{-2};$$

$$h''(x) = e^{-x \ln 2} \ln 2 (x \ln 2 - 2).$$

<b>x</b>	$-\infty$	$\frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$
<b>h''(x)</b>		- 0 +	
<b>h'</b>		$\searrow 0 \nearrow$	
<b>h</b>		$\nearrow 0 \searrow$	

Pour  $x < \frac{2}{\ln 2}$ ,  $h(x) < 0$  donc  $\mathcal{F}$  est au-dessous de T et pour  $x > \frac{2}{\ln 2}$ ,  $h(x) > 0$  donc  $\mathcal{F}$  est au-dessus de T.



60 • 1. a)  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$

<b>x</b>	0	$e^2$	$+\infty$
<b>f'(x)</b>		+ 0 -	
<b>f</b>	$-\infty$	$\nearrow \frac{2}{e}$	$\searrow 0$

2.  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = 1$ , d'où T a pour équation  $y = x - 1$ .

3.  $g(x) = x - 1 - f(x).$

a)  $g'(x) = 1 - f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} [\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1)].$

b)  $g'(1) = 0$ , et le signe de  $g'(x)$  est celui de :

$$\ln x + 2(x\sqrt{x} - 1).$$

• Sur  $]0; 1[$ ,  $\ln x < 0$  et  $x\sqrt{x} - 1 < 0$ , donc  $g'(x) < 0$ ;

• sur  $]1; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$  et  $x\sqrt{x} - 1 > 0$ , donc  $g'(x) > 0$ .

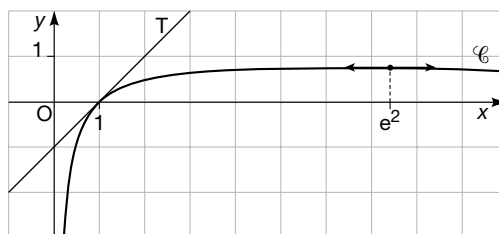
c)  $g(1) = 0$ ;

<b>x</b>	$-\infty$	1	$+\infty$
<b>g'(x)</b>		- 0 +	
<b>g</b>		$\searrow 0 \nearrow$	

Il résulte du tableau précédent que pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $g(x) \geq 0$ .

d) Ainsi pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $\mathcal{C}$  est au-dessous de T.

4.



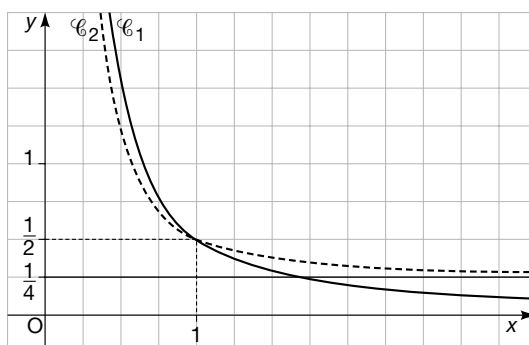
61 • 1. •  $f_1(x) = \frac{x+1}{4x^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$

$$f_1'(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{-2-x}{x^3} \right).$$

<b>x</b>	0	$+\infty$
<b>f_1'(x)</b>		-
<b>f_1</b>	$+\infty$	$\searrow 0$

•  $f_2(x) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right); \quad f_2'(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{-2}{x^3} \right).$

<b>x</b>	0	$+\infty$
<b>f_2'(x)</b>		-
<b>f_2</b>	$+\infty$	$\searrow \frac{1}{4}$



2.  $n \geq 3$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{x^n + 1}{x^2} \right)$  pour  $x > 0$ .

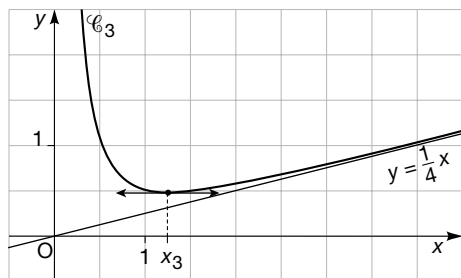
•  $f'_n(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{(n-2)x^n - 2}{x^3} \right]$ ,

$f'_n(x) = 0$  pour  $x = \left( \frac{2}{n-2} \right)^{\frac{1}{n}} = x_n$ .

<b>x</b>	0	$x_n$	$+\infty$
<b><math>f'_n(x)</math></b>		-	+
<b><math>f_n</math></b>	$+\infty$	$f_n(x_n)$	$+\infty$

•  $f_3(x) = \frac{1}{4} \left( x + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4x^2}$  ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f_3(x) - \frac{1}{4}x \right] = 0$ , donc la droite d'équation  $y = \frac{1}{4}x$  est asymptote oblique en  $+\infty$  à  $\mathcal{C}_3$ .



3. a)  $\left( \frac{2}{n-2} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{n-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4-n}{n-2} \leq 0$  ;

- pour  $n = 4$ ,  $x_n = 1$  ;
- pour  $n > 4$ ,  $x_n < 1$  .

b) •  $x_n - \frac{1}{2}$  et  $x_n^n - \frac{1}{2^n}$  ont le même signe, car :

$$x_n^n - \frac{1}{2^n} = \left( x_n - \frac{1}{2} \right) \left( x_n^{n-1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right),$$

et  $x_n^{n-1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} > 0$ .

•  $x_n^n - \frac{1}{2^n} = \frac{2}{n-2} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - n + 2}{2^n(n-2)}$ .

c)  $\mathcal{P}(x) = 2^{x+1} - x + 2$  ;  $\mathcal{P}'(x) = (\ln 2)2^{x+1} - 1 > 0$ .

<b>x</b>	0	$+\infty$
<b><math>\mathcal{P}'(x)</math></b>		+
<b><math>\mathcal{P}</math></b>	4	$+\infty$

Donc pour tout  $n > 4$ ,  $2^{n+1} - n + 2 > 0$ , d'où  $x_n > \frac{1}{2}$ .

Il en résulte que  $n > 4$ ,  $\frac{1}{2} < x_n < 1$ .

**62** • 1. Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{x \ln 2}$  et  $g(x) = e^{2 \ln |x|}$  et  $g(0) = 0$ . Donc  $f(x) \geq g(x)$  équivaut à  $x \ln 2 \geq 2 \ln |x|$  ou encore  $h(x) \geq 0$ .

2. • Pour tout réel  $x$  non nul :

$$h'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{x \ln 2 - 2}{x} ;$$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$  ;

<b>x</b>	$-\infty$	c	0	2	$\frac{2}{\ln 2}$	4	$+\infty$
<b><math>h'(x)</math></b>		+		-	0	+	
<b>h</b>	$-\infty$	0	$+\infty$	0	$2 - 2 \ln \left( \frac{2}{\ln 2} \right)$	0	$+\infty$

$2 - 2 \ln \left( \frac{2}{\ln 2} \right) = 2 - 2 \ln 2 + 2 \ln(\ln 2) \approx -0,12$ .

3.  $h$  est une bijection de  $]-\infty; 0[$  sur  $\mathbb{R}$ , donc il existe un réel  $c$  unique dans  $]-\infty; 0[$  tel que  $h(c) = 0$ .

Or  $h(-1) = -\ln 2$  et  $h\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4} \ln 2 - 2 \ln \frac{3}{4} \approx 0,05$ , donc  $c$  appartient à l'intervalle  $]-1; -\frac{3}{4}[$ .

De même,  $h$  est une bijection de l'intervalle  $]0; \frac{2}{\ln 2}[$

sur l'intervalle  $]2 - \ln \left( \frac{2}{\ln 2} \right); +\infty[$ , donc il existe un

réel  $a$  unique de  $]0; \frac{2}{\ln 2}[$  tel que  $h(a) = 0$ .

Or  $h(2) = 0$  donc  $a = 2$ .

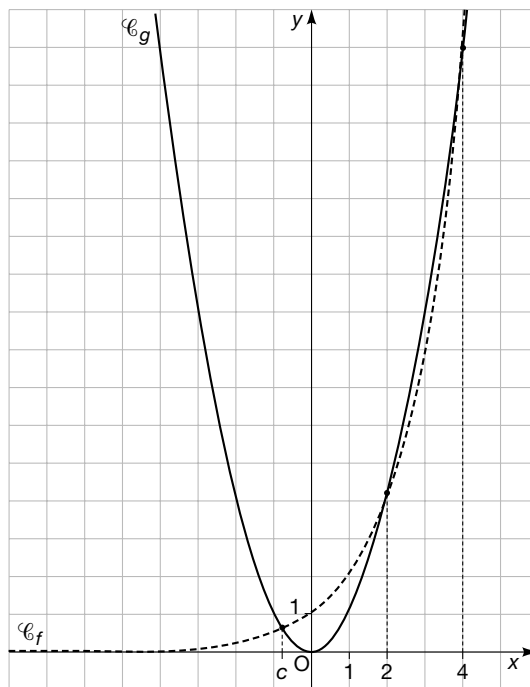
On démontre de même que  $b = 4$ .

4. Ainsi pour  $x$  de  $]-\infty; c[ \cup ]2; 4[$ ,  $h(x) < 0$  donc  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $\mathcal{C}_g$ .

5. À la calculatrice,  $h(-0,76) \approx 0,022$  et  $h(-0,77) \approx -0,11$ , donc :

$$-0,77 < c < -0,79.$$

6.



**63** 1. •  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$ ;  $f_n$  est continue en 0.

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = +\infty$  ou  $-\infty$  selon la parité de  $n$ , donc  $f_n$  n'est pas dérivable en 0 (tangente verticale en O).

2.  $f_1(x) = x \ln x$ ;  $f'_1(x) = \ln x + 1$ ;

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$		
$f'_1(x)$		-	0	+	
$f_1$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3.  $n \geq 2$ .

a)  $f'_n(x) = (\ln x)^n + n(\ln x)^{n-1}$   
 $= (\ln x)^{n-1}(n + \ln x)$ .

b) •  $n$  pair :

$x$	0	$e^{-n}$	1	$+\infty$			
$f'_n(x)$		+	0	-	0	+	
$f_n$	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

•  $n$  impair :

$x$	0	$e^{-n}$	1	$+\infty$		
$f'_n(x)$		-	0	+	0	+
$f_n$	0	$\searrow$	$-n^n e^{-n}$	$\nearrow$	$+\infty$	

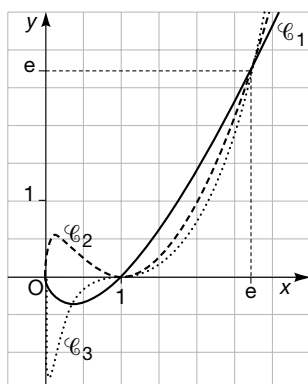
4. a) Les courbes  $\mathcal{C}_n$  passent par les points de coordonnées  $(0; 0)$ ;  $(1; 0)$ ;  $(e; e)$ .

b)  $(f_{n+1} - f_n)(x) = x(\ln x)^n(\ln x - 1)$ ;

• si  $n$  pair,  $\mathcal{C}_{n+1}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  pour  $x > e$ ;

• si  $n$  impair,  $\mathcal{C}_{n+1}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  pour  $0 < x < 1$  ou pour  $x > e$ .

5.



**64** 1.  $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{x} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$ ; on pose

$\frac{1}{x} = X, \tau(X) = X^3 e^{-X}, \lim_{x \rightarrow 0} X = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \tau(X) = 0$ .

Donc  $f$  est dérivable en zéro et le nombre dérivé est zéro.

2. Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1-2x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ ;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

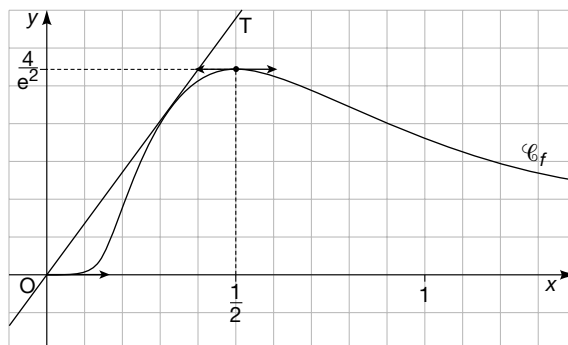
3. a)  $f(x_0) = \frac{1}{x_0^2} e^{-\frac{1}{x_0}}$  et  $f'(x_0) = \frac{1}{x_0^4} (1 - 2x_0) e^{-\frac{1}{x_0}}$ .

Donc une équation de T est :

$$y = \frac{1}{x_0^4} (1 - 2x_0) e^{-\frac{1}{x_0} x} + \frac{1}{x_0^3} e^{-\frac{1}{x_0} (3x_0 - 1)}.$$

b) T passe par l'origine pour  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

4.



**65** 1.  $f_n(x) = x^n \sqrt{x(1-x)}$ ,  $f_n(0) = f_n(1) = 0$ .

2.  $f_0(x) = \sqrt{x-x^2}$ , donc sur  $[0; 1]$ ,  $y^2 = x - x^2$  ou  $x^2 + y^2 - x = 0$ . On obtient pour  $\mathcal{C}_0$  un demi-cercle de centre  $(\frac{1}{2}; 0)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  avec  $y \geq 0$  et  $0 \leq x \leq 1$ .

3. a) Pour tout  $x$  de  $]0; 1[$ ,

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \left[ n + \frac{1}{2} - x(n+1) \right]. \end{aligned}$$

b)  $n \geq 1$ ;  $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$ .

Donc pour  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est dérivable en zéro.

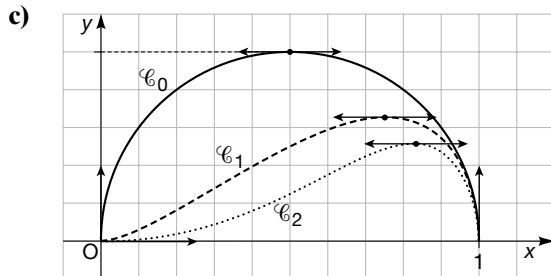
De même  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_n(x) - f_n(1)}{x} = +\infty$ ;  $f_n$  n'est pas dérivable en 1.

c)

$x$	$-\infty$	$\alpha = \frac{n+1}{n+2}$	$1$
$f'_n(x)$	$+$	$0$	$-$
$f_n$	$0$	$f_n(\alpha)$	$0$

4. a)  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x-1)$ .

b) Pour  $x$  dans  $[0; 1]$ ,  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ , donc  $\mathcal{C}_{n+1}$  est au-dessous de  $\mathcal{C}_n$ .



66 1. a) Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} - a$

ou encore  $f'(x) = \frac{a}{x} [e^{a \ln x} - x]$ .

b)  $f'(x) > 0$  si et seulement si  $a \ln x > \ln x$ .

Or  $a > 1$  donc  $f'(x) > 0$  pour  $x > 1$ .

$x$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$a-1$	$0$	$+\infty$

2. Il résulte que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) \geq 0$  donc  $x^{a-1} \geq a(x-1)$ .

### Prendre toutes les initiatives

67 M et P ont respectivement pour coordonnées  $(x; 2^x)$  et  $(x; x)$ . Donc  $\overrightarrow{MP}$  a pour coordonnées  $(0; x - 2^x)$ .

Notons  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\varphi(x) = 2^x - x = e^{x \ln 2} - x$$

$$\varphi'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} - 1.$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2} \text{ soit } \alpha \geq \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2}.$$

D'où le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$\frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

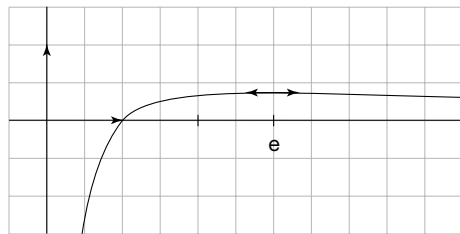
$$f(\alpha) = \frac{1 + \ln(\ln 2)}{\ln 2} \approx 0,91 > 0.$$

Il en résulte que  $f(x) > 0$  pour tout réel  $x$  donc que MP =  $\varphi(x)$  et cette distance est minimale pour

$$x = \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} > 0 \text{ avec } x \approx 0,53.$$

68  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

$x$	$0$	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	$0$



Pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ .

Donc pour tout entier  $n \neq 0$ ,

$$\frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln 3}{3} \text{ et } n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}}.$$

69  $f'(x) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$ .

$x$	$0$	$3$	$+\infty$
$f'(x)$	$0$	$+$	$-$
$f(x)$	$-1$	$\frac{27}{e^3}$	$-1$

$f(x)$  s'annule donc pour deux valeurs de  $x$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\alpha \in ]0; 3[ \text{ et } \beta > 3.$$

Plus précisément :

$$1,8 < \alpha < 1,9 \text{ et } 4,5 < \beta < 4,6.$$

•  $x^3 > e^x$  si et seulement si  $f(x) > 0$  donc si et seulement si  $x \in ]\alpha; \beta[$ .

Ainsi la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto x^3$  est au-dessus de celle représentant la fonction  $x \mapsto e^x$  si et seulement si  $x \in ]\alpha; \beta[$ .

70 Pour  $x > 0$ ,

$$x^a = e^{a \ln x} \text{ et } x^b = e^{b \ln x}.$$

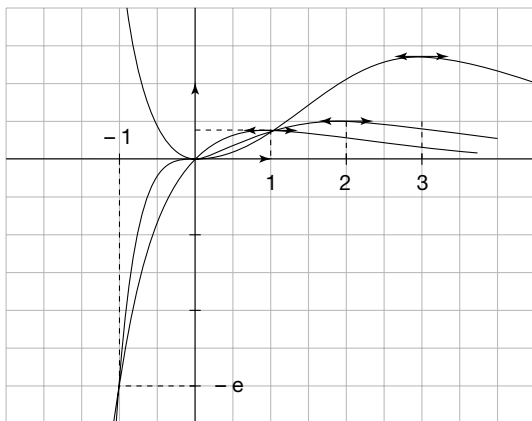
$x^a < x^b$  équivaut à  $a \ln x < b \ln x$

soit  $(a - b) \ln x < 0$ .

Or  $a - b < 0$  donc  $x^a < x^b \Leftrightarrow x \in ]1; +\infty[$ .

**71** A. 1.  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$
		$\frac{1}{e}$	0



2.  $f'_n(x) = x^{n-1}[n-x]e^{-x}$ .

•  $n$  impair :

$x$	$-\infty$	0	$n$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	0
		0	$\frac{n^n}{e^n}$	

•  $n$  pair :

$x$	$-\infty$	0	$n$	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	0
		0	$\frac{n^n}{e^n}$	

3.  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n e^{-x}(x-1)$  sur  $[0; +\infty[$ ,  $\mathcal{C}_{n+1}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  pour  $x > 1$ .

$f_{n+2}(x) - f_n(x) = x^n(x+1)(x-1)e^{-x}$  sur  $[-\infty; 0]$  si  $n$  est pair  $\mathcal{C}_{n+2}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  si  $x < -1$ , si  $n$  est impair  $\mathcal{C}_{n+2}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  si  $-1 < x < 0$ .

4. Voir figure de A. 1.

B. 1.  $e^{-x} > 0$  donc  $x^n = e^x \Leftrightarrow x^n e^{-x} = 1$  soit  $f_n(x) = 1$ .

2. a) D'après le tableau il est évident que pour connaître le nombre de solutions de l'équation  $f_n(x) = 1$  on est ramené à comparer 1 et  $\frac{n^n}{e^n}$ .

b)  $n^n = e^{n \ln n}$  donc  $f_n(n) = e^{n \ln n - n}$ .

3. a)  $g'(x) = \ln x e^{x \ln x - x}$ .

b)

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
$g$	1	$\searrow$	$\nearrow$	0
		$\frac{1}{e}$	1	

4. a) On est ramené à comparer  $g(x)$  et 1.

Si  $n$  est impair et  $n \geq 3$ ,  $f_n(x) = 1$  a 2 solutions.

Si  $n$  est pair et  $n \geq 4$ ,  $f_n(x) = 1$  a 3 solutions.

Si  $n = 2$ ,  $f_n(x) = 1$  a 1 solution.

**72** A.  $\varphi(x) = 1 - \ln x + \ln[\ln x]$ .

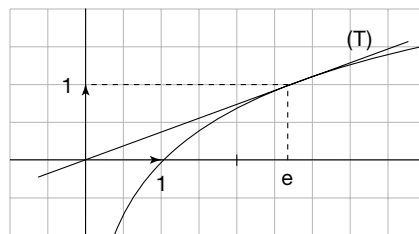
1. Pour tout réel  $x > 1$ ,  $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{1 - \ln x}{x \ln x}$ .

2.

$x$	1	$e$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$
		0	0

D'après le tableau pour tout  $x \geq e$ ,  $\varphi(x) \leq 0$ .

B. 1. a)



b)  $e^x = x^e \Leftrightarrow x = e \ln x$  ou  $\ln x = \frac{x}{e}$ .

Or  $y = \frac{x}{e}$  est l'équation de la tangente (T) donc l'unique solution est  $x = e$ .

2.  $f(x) = x \ln a - a \ln x$ .

a)  $f'(x) = \ln a - \frac{a}{x} = \frac{x \ln a - a}{x}$ .

$x$	0	1	$\frac{a}{\ln a}$	$a$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	0
		$\ln a$	$a\varphi(a)$	0	

b)  $f\left(\frac{a}{\ln a}\right) = a - a \ln a + a \ln(\ln a) = a \varphi(a)$ .

c)  $a\varphi(a) < 0$  donc sur  $]0; +\infty[$   $f(x)$  s'annule deux fois et sur  $]0; +\infty[$  l'équation  $(E_a)$  a deux solutions

3.  $f: x \mapsto x \ln 3 - 3 \ln x$ .

$x$	0	1	$\alpha$	$\frac{3}{\ln 3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	0
		$\ln 3$	0	$3\varphi(3)$	0	

Il existe  $\alpha \in ]1; \frac{3}{\ln 3}[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

Donc si  $x \in ]\alpha; 3[$ ,  $f(x) < 0$  et la courbe représentative de  $x \mapsto 3^x$  est en dessous de la courbe représentative de  $x \mapsto x^3$ .

**73** 1.  $f(x) = xe^{-x \ln 3}$  donc **a)** faux, **b)** vrai, **c)** faux, **d)** vrai.

2.  $f'(x) = e^{-x \ln 3} - x \ln 3$  ;  
 $e^{-x \ln 3} = e^{-x \ln 3} (1 - x \ln 3) = 3^{-x} (1 - x \ln 3)$  donc  
**a)** vrai, **b)** faux, **c)** vrai.

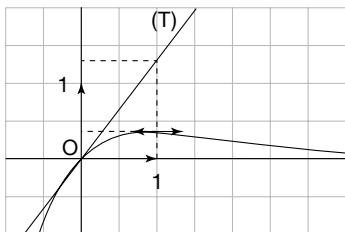
3.

$x$	$-\infty$	0	$\frac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e \ln 3}$	0

$e \ln 3 \approx 2,986... < 3$  et  $\frac{1}{e \ln 3} > \frac{1}{3}$  donc

**a)** faux, **b)** vrai, **c)** vrai.

Courbe  $\mathcal{C}$  :



**c)** Vrai car la tangente T a pour équation  $y = x$  et  $f(x) - x = x[e^{-x \ln 3} - 1]$ .  
 $e^{-x \ln 3} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $x$	-	0	+
Signe $[e^{-x \ln 3} - 1]$	+	0	-
Signe $[f(x) - x]$	-	0	-

D'où le résultat.

4.  $g(x) = \ln f(x) = \ln x - x \ln 3$ .

**a)** Vrai car pour  $x > 0, f(x) \in ]0; \frac{1}{e \ln 3}[$  donc  $f(x) < 0$ .

**b)** Vrai.

**c)**  $g(x) = -1$  équivaut à  $f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$  donc **c)** faux.

**74** 1. Vraie car  $f'(x) = -\ln 5 f(x)$  avec  $f(x) = e^{-x \ln 5}$ .

2. Vraie car pour  $x > 1, \sqrt{x} > 1$  et  $\ln \sqrt{x} > 0$  donc  $f$  est dérivable et  $f'(x) = \frac{1}{2x \ln \sqrt{x}} = \frac{1}{x \ln x}$ .

3. Vraie car  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x > 3$  équivaut à  $e^{-x \ln \sqrt{2}} > e^{\ln 3}$  soit  
 $-x \ln 2 > 2 \ln 3$  d'où  $x < -\frac{2 \ln 3}{\ln 2}$ .

4. Vraie.

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} \ln 2} - 1}{\frac{1}{x}}$$

On pose  $\frac{1}{x} \ln 2 = X$  et  $f(x) = \frac{e^X - 1}{X} \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(X) = \ln 2.$$

**5.** Faux car  $x^a < x^b$  équivaut à  $a \ln x < b \ln x$  ou  $(b - a) \ln x > 0$ .

$\ln x > 0$  uniquement si  $x > 1$  donc pas vrai pour  $x > 0$ .

**75** 1. Voir le cours.

2. a)  $f'(x) = x^{-\frac{4}{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \ln x\right)$  d'où  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^3$  et

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^3, f(e^3) = \ln e^3 \times (e^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{e}.$$

**b)**  $f(1) = 0$  donc 1 est solution. Elle est unique car  $f$  est une bijection de  $]0; e^3]$  sur  $]-\infty; \frac{3}{e}]$ .

**c)** Si  $x = e^{\frac{3}{4}}, f\left(e^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}}$  et  $f'\left(e^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4} e^{-1}$  donc

$$y = \frac{3}{4} e^{-1} x - \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} e^{-1} x \text{ donc la tangente passe par l'origine du repère.}$$