

## Travaux dirigés (page 125)

### TD 1

**1** 1.  $f(x) = \ln x + 1 - x$   $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ .

<b>x</b>	0	1	1
<b>f'(x)</b>		+	0 -
<b>f(x)</b>	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

Il résulte du tableau que  $f(x) \leq 0$  donc  $\ln x \leq x - 1$ . (1)

**2. a)** On pose  $x = 1 + t$  avec  $t > -1$  alors (1) devient :  $\ln(1 + t) \leq t$ .

**b)** On pose  $x = \frac{1}{1+t}$  avec  $t > -1$  alors (1) devient  $-\ln(1 + t) \leq \frac{1}{1+t} - 1$  d'où  $\frac{t}{1+t} \leq \ln(1 + t)$ . (2)

**3** 1. Si  $x = \frac{1}{p}$ , à partir de (3)

$$\frac{1}{1+p} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p} \quad (4)$$

**2. a)** 
$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+2} \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+n} \leq \ln\left(\frac{n+n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2n-1} \end{cases}$$
 par addition

$$u_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{n+n}{2n-1}\right) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

soit  $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ .

**b)**  $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n < \ln 2$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$ .

### TD 2

**1** 1. En posant  $\varphi(x) = x - \ln x$   $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x}$  pour tout  $x > 0$ .

<b>x</b>	0	1	$+\infty$
<b><math>\varphi'(x)</math></b>		+	0 -
<b><math>\varphi(x)</math></b>		$\searrow$ 1 $\nearrow$	

Pour tout  $x > 0$ ,  $\varphi(x) \geq 1$  donc  $x - \ln x \neq 0$ .

**2. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ .

**b)**  $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \ln x} = 0$ ,

donc  $g$  est dérivable en zéro et  $g'(0) = 0$ .

**c)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  car  $g(x) = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}}$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

**3. a)**  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$ .

<b>x</b>	0	e	$+\infty$
<b><math>g'(x)</math></b>	0	+	0 -
<b><math>g(x)</math></b>	0	$\nearrow$ $\frac{e}{e-1}$ $\searrow$	1

**b)** D'après le tableau de variation les coordonnées de A sont  $\left(e; \frac{e}{e-1}\right)$ .

**2** 1.  $u_n$  est la somme des termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison  $\frac{\ln a}{a}$ .

**2. a)** Pour tout  $x > 1$ ,

$$0 \leq \frac{x}{x - \ln x} \leq \frac{e}{e-1}$$

ou encore  $\frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}$  donc  $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$

et comme  $a > 1$ ,  $0 \leq \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{e}$ .

**b)**  $u_n = \frac{1 - \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\ln a}{a}}$  or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{n+1} = 0$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = g(a)$ .

### TD 3

**1.**  $f(1) = f(1) + f(1)$  donc  $f(1) = 0$ .

**2. a, b)** Pour tout  $y > 0$

$$g'(y) = x f'(xy) = f'(y).$$

c) Pour tout  $x > 0$  et  $y = 1$

$$g'(1) = xf'(x) = f'(1) = k.$$

3. a)  $f'(x) = \frac{k}{x}$  d'où  $xf'(x) = k$ , donc  $x \mapsto k \ln x$  est

solution de (3).

b)  $f(x) = h(x) + k \ln x$ .

$f$  est solution de (3) si et seulement si

$$x \left[ h'(x) + \frac{k}{x} \right] = k$$

soit  $h'(x) = 0$ .

c)  $h(x) = C$  donc

$$f(x) = k \ln x + C.$$

$$\begin{aligned} 4. f(xy) &= k \ln(xy) + C = k \ln x + k \ln y + C \\ &= k \ln x + C + k \ln y + C. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $C = 0$  d'où la conclusion.

#### TD 4

1.  $\log 1 = 0$  ;

$$\log 10 = 1 ;$$

$$\log 100 = 2 ;$$

$$\log 1\,000 = 3 ;$$

$$\log 10\,000 = 4 .$$

2.  $\frac{1}{\ln 10} \approx 0,43$ , donc  $0 < k < 1$ .

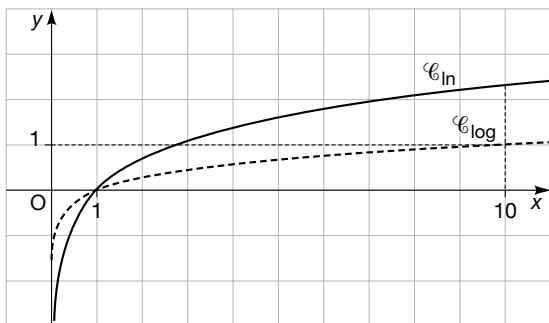
3. Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,

$$\log(xy) = k \ln(xy) = k \ln x + k \ln y ,$$

donc  $\log(xy) = \log x + \log y$ .

Il en va de même pour les autres résultats.

4.



2 1. a) Lorsque la concentration décuple, le pH diminue de 1.

b)  $\log(\text{H}_3\text{O}^+) = -6,3$  et  $[\text{H}_3\text{O}^+] \approx 50 \times 10^{-7}$ .

2.  $M = \log(50,01 \times 10^6) \approx 7,7$ .

3. L'intensité d'une conversation normale est 50 décibels.

#### TD 5

1. a)  $\varphi(x) = x + e^{-x}$   $\varphi'(x) = 1 - e^{-x}$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0
$\varphi(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Il résulte du tableau que pour tout réel  $x$ ,  $x + e^{-x} \geq 1$ .

b) Il est évident que  $x + e^{-x} > 0$  donc  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. a)  $f(x) = \ln[e^{-x}(1 + xe^x)] = -x + \ln(1 + xe^x)$  (1) pour tout réel  $x$ .

b) Pour tout  $x > 0$

$$f(x) = \ln x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \ln x + \ln \left( 1 + \frac{e^{-x}}{x} \right). \quad (2)$$

c) D'après (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et d'après (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. a) D'après (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + xe^x) = 0$  donc la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

b) D'après (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$  donc la courbe  $(\Gamma)$  d'équation  $y = \ln x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

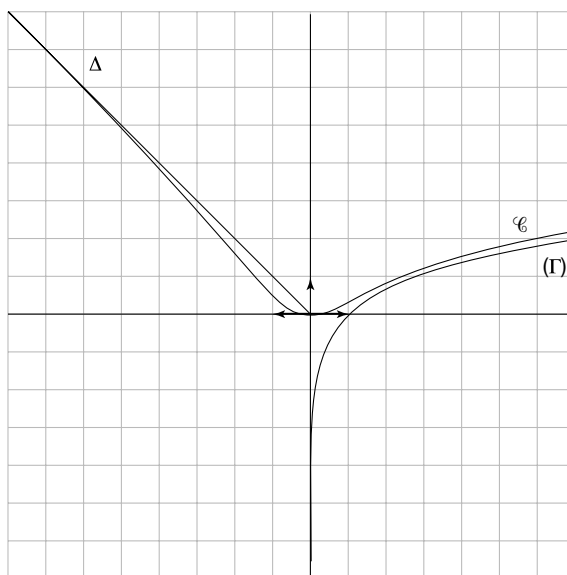
4.  $\varphi(x) = 1 + xe^x$   $x \in ]-\infty ; 0]$ .

a)  $\varphi'(x) = e^x(x + 1)$ .

$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0
$\varphi(x)$	1		$1 - \frac{1}{e}$

Il résulte du tableau que pour tout  $x < 0$ ,  $\varphi(x) \in ]0 ; 1[$ .

b)  $f(x) + x = \ln(1 + e^x)$  or  $\varphi(x) \in ]0 ; 1[$  donc  $\ln(1 + xe^x) < 0$  et  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $\Delta$ .





# Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 129)

## 1. Les fonctions ln et exp

**1**  $a = 3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5}$  ;  $b = \frac{8e^2}{4e^2} = 2e$  ;  $c = \frac{8}{8} = 1$ .

**2** Pour tout  $x > 1$   $\ln(x-1) + \ln x = \ln(x^2-x)$  donc  $e^{\ln(x^2-x)} = x^2-x$ .

**3** Corrigé dans le manuel.

**4** a)  $x \neq 0$  ; b)  $x < 1$  ; c)  $x > 3$ .

d)  $x \neq 0$  et  $x > -1$ . e)  $x > 0$  et  $x \neq 1$ .

**5** a)  $x \in ]-\infty ; -4[ \cup ]0 ; +\infty[$ .

b)  $x \in \mathbb{R}^- \setminus \{1 ; 2\}$ .

c)  $x \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1 ; 1\}$ .

d)  $x \in ]2 ; 3[$ .

**6** a)  $x > 0$  ; b)  $x \neq 0$  ; c)  $x > -1$  ; d)  $x < -1$  ou  $x > 1$ .

## 2. Résolution d'équations et d'inéquations

**7** Corrigé dans le manuel.

**8** a)  $e^{x+2} = 3$  équivaut à  $x + 2 = \ln 3$  d'où  $x = \ln 3 - 2$ .

b)  $x \neq -1$  et  $\frac{x}{x+1} = \ln 2$  d'où  $x = \frac{\ln 2}{1 - \ln 2}$ .

c)  $e^x > 0$  donc  $e^x = 4$   $x = \ln 4$ .

d)  $e^x + 1 = e^2$  d'où  $x = \ln(e^2 - 1)$ .

**9** a)  $x \in ]0 ; e[$ .

b)  $x \in [e^2 ; +\infty[$ .

c)  $x \in [e^{-1} ; e^2]$ .

d)  $x \in \left] \frac{e^{-1} + 1}{2} ; +\infty \right[$  car  $\frac{e^{-1} + 1}{2} > \frac{1}{2}$ .

**10** a)  $x \in ]-\infty ; 1 + \ln 2[$ .

b)  $x < \frac{1}{\ln 3 - 1}$  et  $x \neq 0$ .

c)  $x \in [-\ln 2 ; \ln 2]$ .

d)  $x \in ]-\infty ; \ln 4]$ .

**11** a)  $x$  appartient à  $]2 ; +\infty[$  et  $x^2 - 4 = 3x - 4$  d'où  $\mathcal{S} = \{3\}$ .

b)  $x < -2$  et  $x^2 + 3x - 4 = 0$  d'où  $\mathcal{S} = \{-4\}$ .

**12** a)  $\varphi = \{4\}$ .

b) L'équation n'a pas de solution.

**13** Corrigé dans le manuel.

## 3. Logarithme d'un produit

**14** Corrigé dans le manuel.

**15**  $a = \ln 2 + 2 \ln 5$

$b = 4 \ln 2 - 2 \ln 5$

$c = \ln 2 + 3 \ln 5$ .

**16**  $\ln(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \ln 1 = 0$ .

**17** a)  $x = \ln 5$  et  $y = \ln 6$  donc  $y > x$ .

b)  $x = \ln 9$  et  $y = \ln 8$  donc  $x > y$ .

**18**  $a = \ln 7 + 4 \ln 3 - 3 \ln 2 - 2 \ln 3 - \ln 7 + 3 \ln 2 - 3 \ln 3$  d'où  $a = -\ln 3$ .

$b = \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{3}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{3}{2} \ln 3$  d'où  $b = \ln 5$ .

**19** a) Pour  $x > 0$ ,  $\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$ .

b)  $\ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) = \ln 1 = 0$ .

**20** a)  $x \in ]1 ; +\infty[$ .

b)  $x \in ]1 ; +\infty[$ .

**21** a)  $n \ln 2 \leq \ln 100$  d'où  $0 \leq n \leq 6$ .

b)  $-n \ln 3 \leq -2 \ln 10$  d'où  $n \geq 5$ .

c)  $\ln(0,2) \geq n \ln \frac{2}{5}$  d'où  $n \geq 2$ .

d)  $n \ln\left(1 + \frac{3}{100}\right) \geq \ln 2$  d'où  $n \geq 24$ .

**22** a)  $x > 0$  et  $x^2 = 2x(x+4)$  d'où  $x(x+8) = 0$ .

Donc l'équation n'a pas de solution.

b)  $x > 0$  et  $x^2 = 2x^2 + 8x$  d'où  $x(x+8) = 0$  donc l'équation n'a pas de solution.

**23** Corrigé dans le manuel.

**24** a)  $x > 6$  et  $x^2 - 5x - 14 = 0$  d'où  $\mathcal{S} = \{7\}$ .

b)  $x > 2$  et  $(3x-1)(x-1) = (x-2)^2$

soit  $x > 2$  et  $2x^2 - 3 = 0$ .

Donc l'équation n'a pas de solution.

**25** a)  $1 < x < 5$  et  $x^2 - 6x + 8 \leq 0$  d'où  $\mathcal{S} = \{2 ; 4\}$ .

b)  $x > \frac{1}{3}$  et  $3x(x-1) \leq 0$  d'où  $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{3} ; 1 \right]$ .

**26 a)**  $x > 1$  et  $3x^2 - x - 2 \geq 6x + 4$

$x > 1$  et  $3x^2 - 7x - 6 \geq 0$

d'où  $\mathcal{S} = ]3; +\infty[$ .

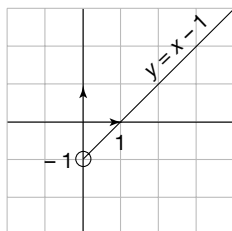
**b)**  $x > \frac{2}{3}$  et  $x^3 - 3x + 2 > 0$  soit  $x > \frac{2}{3}$  et

$(x-1)^2(x+2) > 0$

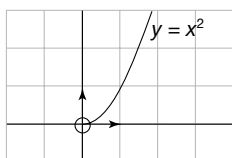
d'où  $\mathcal{S} = ]\frac{2}{3}; 1] \cup ]1; +\infty[$ .

**27** Corrigé dans le manuel.

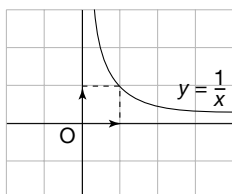
**28 a)**  $x > 0; y > -1$  et  $y = x - 1$ .



**b)**  $x > 0; y > 0; y = x^2$ .



**c)**  $x > 0, y > 0$  et  $y = \frac{1}{x}$ .



#### 4. Étude la fonction ln

**29** Corrigé dans le manuel.

**30 1.**  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$ .

**2.**

$x$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout réel  $x > 0, f(x) \geq 1$  donc  $f(x) > 0$ .

**31 1.** Sur la figure on peut lire que :  $f(1) = 1$  ;  $f(2) = 2 \ln 2$  et  $f'(2) = 0$ .

Or  $f'(x) = a + \frac{c}{x}$  donc  $a + b = 1$  ;  $2a + c = 0$  ;

$2a + b + c \ln 2 = 2 \ln 2$ .

Or  $b = 1 - a$  d'où  $a + c \ln 2 = 2 \ln 2 - 1$ .

**2.** Il résulte de la question précédente que :  $c = 2$  ;  $a = -1$  et  $b = 2$ .

D'où  $f(x) = -x + 2 + 2 \ln x$ .

**32 1.** Pour tout  $x > 0$   $f'(x) = a + \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

**2. a)** La tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 3 donc  $f'(1) = 3$  ou  $a + 1 = 3$  et  $a = 2$ .

**b)**  $A(1; 0)$  est un point de  $\mathcal{C}$  donc  $f(1) = 1$  soit  $0 = a + b$  d'où  $b = -2$ .

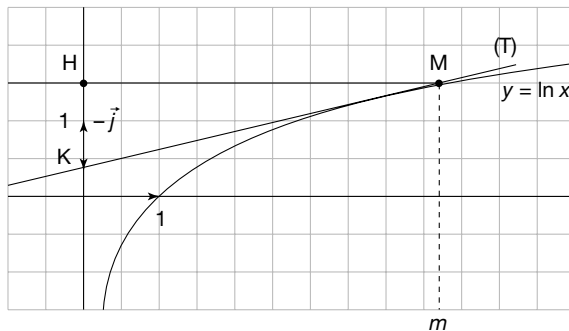
**3.** Il résulte que  $f(2) = 2x - 2 + \frac{1}{x} \ln x$ .

**33 1.** (T) a pour équation  $y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln m$ .

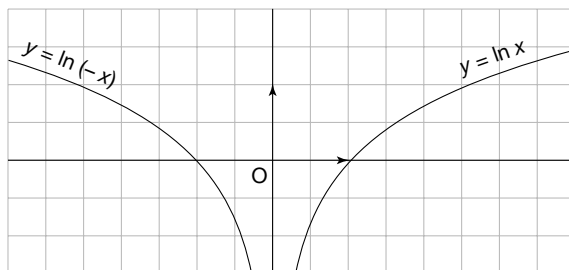
**2. a)** Si  $x = 0$  alors  $y = \ln m - 1$  d'où le résultat.

**b)** H a pour coordonnées  $(0; \ln m)$  donc  $\overline{KH}$  a pour coordonnées  $(0; 1)$  et  $\overline{KH} = \vec{j}$ .

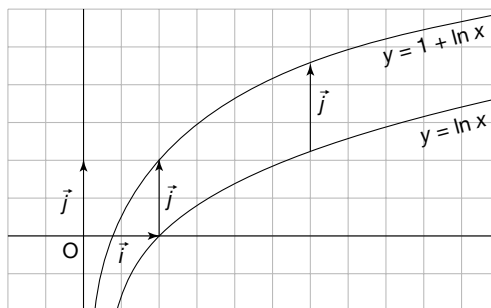
**3.** D'où la construction de la tangente en M.



**34 a)**  $x \mapsto \ln(-x)$  avec  $x < 0$  a pour courbe représentative la courbe symétrique de  $\mathcal{C}$  par rapport à l'axe des ordonnées.



**b)**  $x \mapsto 1 + \ln x$  a pour courbe représentative celle déduite de  $\mathcal{C}$  par la translation de vecteur  $\vec{j}$ .



**35 1.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**2. a)**  $S_n = \ln \left[ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \right]$

donc  $S_n = \ln \left( \frac{1}{n+1} \right) = -\ln(n+1)$ .

**b)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ .

## 5. Des limites importantes

**36** Corrigé dans le manuel.

**37** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**38** a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .    b)  $f(x) = x + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**39** a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\ln 2$      $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 3$ .

**40** a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$      $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ .

**41** a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**42** Corrigé dans le manuel.

**43**  $f(x) - x + 1 = 1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$ .

D'où le résultat.

**44**  $\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = (x - x \ln x)$  donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = 0$ .

Il en résulte que la fonction  $f$  est dérivable en  $x = 0$ .

**45**  $f(x)$  est définie pour  $\frac{x+1}{x} > 0$  soit  $x < -1$  ou  $x > 0$ . Les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$  sont asymptotes à  $\mathcal{C}$ . En effet  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$  et

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  car  $f(x) = x - \ln(x+1) + \ln x$ .

De plus  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ x \rightarrow -\infty}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$  donc la droite d'équa-

tion  $y = x$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}$ .

**46** 1.  $\ln(3 + e^x) = \ln e^x(1 + 3e^{-x})$   
 $= \ln e^x + \ln(1 + 3e^{-x})$

d'où  $f(x) = x + \ln(1 + 3e^{-x})$ . (1)

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 3$  et d'après (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$   
 donc  $y = \ln 3$  et  $y = x$  sont asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}$ .

## 6. Dérivée d'une fonction $\ln \circ u$

**47** 1. Sur  $]0 ; +\infty[$   $u$  est dérivable et strictement positif. Donc  $f(x) = x^2 \ln u(x)$  est dérivable sur cet intervalle.

2. a) En  $x = 0$   $u(x) = 0$  donc pas de réponse.

b)  $t(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = x \ln x - x \ln(x+1)$

$\lim_{x \rightarrow 0} t(x) = 0$  donc  $f$  est dérivable en  $x = 0$ .

**48** Corrigé dans le manuel.

**49** a)  $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$ .

b)  $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}$ .

**50** a)  $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$ .

b)  $f'(x) = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$ .

**51** a)  $f'(x) = e^{-x} \left[ -\ln x + \frac{1}{x} \right]$ .

b)  $f'(x) = (1 + \ln x) e^{x \ln x}$ .

**52** a)  $f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

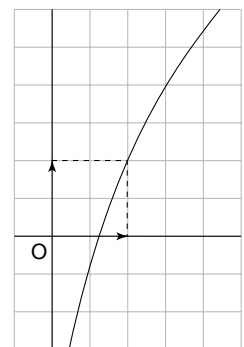
b)  $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$ .

## 7. Études des fonctions

**53** a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ .

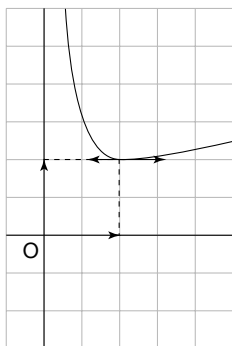
$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

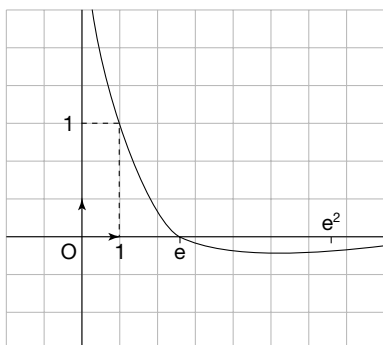
$x$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$

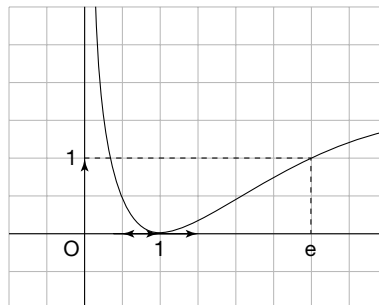
$x$	0	$e^2$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	0



d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x.$$

$x$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



**54** Corrigé dans le manuel.

**55** 1.  $g'(x) = e^x[1+x]$ .

$x$	$-\infty$	-1	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{1}{e} > 0$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout réel  $x$ ,  $y(x) > 0$ .

2. a)  $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} g(x)$ .

b) Comme  $g(x) > 0$  pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) > 0$  pour  $x > 0$  et  $f'(x) < 0$  pour  $x < 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

c) Pour tout  $m$  réel,  $f(x) = 0$  pour deux valeurs de  $x$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\alpha < 0$  et  $\beta > 0$ .

## Apprendre à chercher

(page 133)

### 56 Série harmonique et exponentielle

#### Les outils :

- La fonction exponentielle.

#### Les objectifs :

- Savoir étudier la convergence d'une suite.
- Savoir conjecturer un résultat.

1. Non.

2.  $e^{u_n} = e^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = e \times e^{\frac{1}{2}} \times \dots \times e^{\frac{1}{n}}$  [1].

3. a)  $f(x) = e^x - x - 1$ ;  $f'(x) = e^x - 1$ ;

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f$		$\searrow$	1	$\nearrow$

Il résulte que pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq x + 1$ .

b) Donc pour tout  $k \geq 1$ ,  $e^{\frac{1}{k}} \geq \frac{k+1}{k}$ .

c) Donc  $e^{u_n} \geq \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n}$ ,

donc  $e^{u_n} \geq n + 1$  [2].

4. Il résulte de la question précédente que  $u_n \geq \ln(n+1)$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

### 57 Tangentes communes à deux courbes

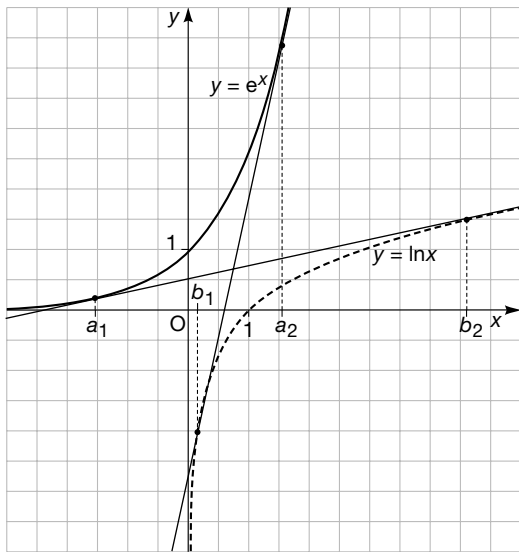
#### Les outils :

- Étude d'une fonction.
- Équations de droites.

**Les objectifs :**

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir utiliser un tableau de variations.

1.



2. a) • Tangente  $T_2$  en  $(b; \ln b)$  :  $y - \ln b = \frac{1}{b}(x - b)$ ,  
d'où  $\frac{1}{b}x - y - 1 + \ln b = 0$  [1].

• Tangente  $T_A$  en  $(a; e^a)$  :  $y - e^a = e^a(x - a)$ , d'où  $e^a x - y + e^a(1 - a) = 0$  [2].

b)  $T_1 = T_2$  équivaut à  $b = e^{-a}$  et  $e^a(1 - a) = -1 + \ln b$  ;  
or,  $\ln b = -a$ , d'où  $e^{-a} = \frac{a - 1}{a + 1}$ .

3. a)  $f(x) = e^{-x} - \frac{x - 1}{x + 1}$ .

Pour tout réel  $x, x \neq -1, f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(x + 1)^2} < 0$ .

$x$	$-\infty$	$a_1$	$-1$	$a_2$	$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f$	$+\infty$	0	$-\infty$	0	-1

D'où l'existence de deux valeurs  $a_1$  et  $a_2$  telles que  $f(a_1) = 0$  et  $f(a_2) = 0$  avec  $-1,6 < a_1 < -1,5$  et  $1,5 < a_2 < 1,6$ . Et  $0,2 < b_1 < 0,3$  et  $4,5 < b_2 < 4,9$ .

**58 Calculer avec les logarithmes**

**Les outils :**

- Résolution d'une équation du second degré.
- Utilisation d'équations équivalentes.

**Les objectifs :**

- Savoir « passer » d'une équation à une équation équivalente.
- Savoir vérifier la cohérence d'un résultat.

1. a)  $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2} \ln ab = \ln \sqrt{ab}$ .

b) Il résulte que :

$\ln \left[ \frac{1}{3}(a + b) \right] = \ln \sqrt{ab}$ , d'où  $a + b = 3\sqrt{ab}$ .

Or,  $a > 0, b > 0$ , donc cette équation est équivalente à :

$(a + b)^2 = 9ab$  ou  $a^2 + b^2 - 7ab = 0$  [2].

2. En posant  $k = \frac{a}{b}$  avec  $k > 0, k^2 - 7k + 1 = 0$ .

Donc  $k > 0$  et  $\left(k = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$  ou  $k = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)$ , donc :

$\frac{a}{b} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$  ou  $\frac{a}{b} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ .

**59**

**Les outils :**

- Résolution d'un système.
- Résolution d'une équation du second degré.

**Les objectifs :**

- Savoir résoudre un système par « implication ».
- Savoir conduire une réciproque.

1.  $xy = 4$  équivaut à  $\ln x + \ln y = 2 \ln 2$ .

2. a)  $X + Y = 2 \ln 2$  et  $X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2$  d'où

$Y = 2 \ln 2 - X$  et  $X^2 + X^2 - 4X \ln 2 + 4(\ln 2)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2$ .

Soit :  $Y = 2 \ln 2 - X$  et  $4X^2 - 8X \ln 2 + 3(\ln 2)^2 = 0$ . (1)

b) La résolution de (1) donne  $X_1 = \ln \sqrt{2}$  et  $X_2 = \ln(2\sqrt{2})$ .

c) La question précédente avec  $Y = 2 \ln 2 - X$  conduit au résultat.

3. À partir du système initial, on vérifie que les deux couples trouvés conviennent.

**60 Problème d'existence**

**Les outils :**

- Étude et représentation d'une fonction.

**Les objectifs :**

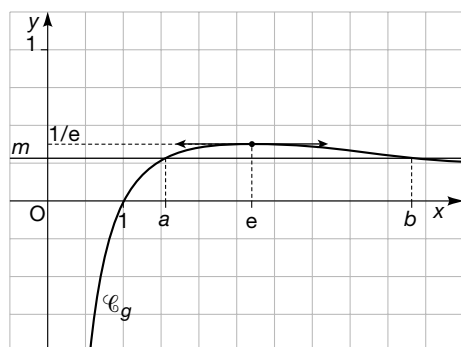
- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir utiliser une courbe et un tableau de variations.

1. a) Pour tout  $x > 0, g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , d'où le tableau

de variations :

$x$	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

b) Courbe représentative :



c)  $m$  est un réel de l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{e}\right]$ . Il existe donc un réel unique  $a$  de  $]1; e[$  et un réel unique  $b$  de  $]e; +\infty[$  pour lesquels  $g(a) = g(b) = m$ .

D'où  $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$  ou  $\frac{\ln a}{\ln b} = \frac{a}{b}$ .

## Pour progresser

(page 135)

### Équations et inéquations

**61** 1. a)  $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$   
 $|x^2 - 4| = 1$  d'où  $\mathcal{S} = \{\sqrt{5}; -\sqrt{5}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ .

b)  $x \in ]-4; 2[ \cup ]2; +\infty[$ .  
 $|x - 2|(x + 4) = 8$ .

Si  $x \in ]-4; 2[$   $(2 - x)(x + 4) = 8$ .  
 $-x^2 - 2x = 0$  et  $x = 0$  ou  $x = -2$ .

Donc  $\mathcal{S}_1 = \{0; -2\}$ .

Si  $x > 2$ .  $(x - 2)(x + 4) = 8$  d'où  $x^2 + 2x - 16 = 0$   
donc  $x = -\sqrt{17} - 1$  ou  $\sqrt{17} - 1$  et  $\mathcal{S}_2 = \{\sqrt{17} - 1\}$ .

Donc  $\mathcal{S} = \{-2; 0; \sqrt{17} - 1\}$ .

c)  $x \in \mathbb{R} - \left(-\frac{3}{2}; 1; 0\right)$  et  $|2x + 3| |x - 1| = x^2$ .

Si  $x \in \left]-\frac{3}{2}; 1\right[$   $3x^2 + x - 3 = 0$

soit  $\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{-1 - \sqrt{37}}{6}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}\right\}$ .

Si  $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[ \cup ]2; +\infty[$

$x^2 + x - 3 = 0$  et  $\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right\}$  donc

$\mathcal{S} = \left\{\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{37}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right\}$ .

**62** a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ xy = 3 \end{cases}$

donc  $(x + y = 4$  et  $xy = 3)$  ou  $(x + y = -4$  et  $xy = 3)$ .

Il en résulte que  $\mathcal{S} = \{(1; 3); (3; 1)\}$ .

b)  $x + y = 1$  et  $3e^x - e^4 e^{-x} - 2e^2 = 0$

ou  $x + y = 1$  et  $3(e^x)^2 - 2e^2 e^x - e^4 = 0$ .

Il en résulte que  $e^x = e^2$  ou  $e^x = -\frac{1}{3}e^2$  d'où  $x = 2$  et

$y = -1$   $\mathcal{S} = \{(2; -1)\}$ .

**63** 1.  $\ln x = X$  et  $X^2 - 2X - 3 = 0$

soit  $X = -1$  ou  $X = 3$

donc  $x = e^{-1}$  ou  $x = e^3$   $\mathcal{S} = \{e^{-1}; e^3\}$ .

2.  $\mathcal{S} = ]0; e^{-1}] \cup [e^3; +\infty[$ .

**64** a)  $e^x = X$   $X^2 - 5X + 4 = 0$   $\mathcal{S} = \{0; \ln 4\}$ .

b)  $e^{-x} = X$  et  $X^2 - 5X + 6 = 0$ .

$X = 3$  ou  $X = 2$  donc  $\mathcal{S} = \{-\ln 3; -\ln 2\}$ .

**65** a)  $\ln|x| = X$  et  $X^2 - 2X - 3 > 0$

$X < -1$  ou  $X > 3$ .

Soit  $|x| < \frac{1}{e}$  ou  $|x| > e^3$ .

$\mathcal{S} = ]-\infty; -e^3[ \cup \left]-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right[ \cup ]e^3; +\infty[$ .

b)  $e^x = X$  avec  $3X^2 - 7X + 2 < 0$

$\frac{1}{3} < X < 2$  donc  $x \in ]-\ln 3; \ln 2[$ .

**66**  $\ln x = 3$  et  $\ln y = 1$  d'où  $\mathcal{S} = \{(e^3; e)\}$ .

**67**  $x > 0, y > 0, \ln x = X, \ln y = Y$ .

$XY = -12$  et  $X + Y = 1$

d'où

$(X = 4$  et  $Y = -3)$  ou  $(X = -3$  et  $Y = 4)$  donc

$\mathcal{S} = \{(e^4; e^{-3}); (e^{-3}; e^4)\}$ .

**68**  $e^x = X, e^y = Y, e^X - Y = e, 2X + Y = 4 + e$

d'où  $X = 2, Y = e$ .

Donc  $\mathcal{S} = \{(\ln 2; 1)\}$ .

**69** 1. a)  $P(-1) = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$ .

b)  $P(x) = (x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$ .

c)  $P(x) \leq 0$  si et seulement si  $x \in ]-\infty; -2] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ .

2. Pour  $x \in ]0; 2[$  l'équation équivaut à :

$x^2(2x + 5) \leq 2 - x$  soit  $P(x) < 0$ .

D'où  $\mathcal{S} = \left]0; \frac{1}{2}\right[$ .

### Étude de fonctions

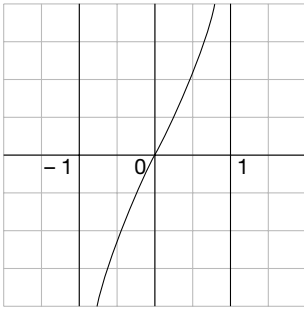
**70** 1. Si  $x \in ]-1; 1[$ ,  $-x \in ]-1; 1[$  et

$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

soit  $f(-x) = -f(x)$  donc  $f$  est une fraction impaire.

2.  $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x^2}\right) > 0$ .

$x$	-1	0	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



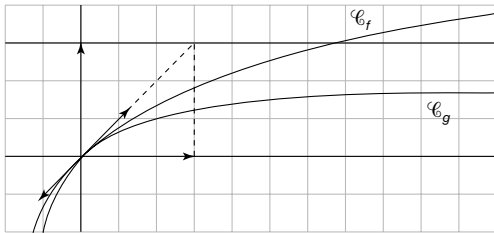
**71** 1.  $h : x \mapsto f(x) - g(x)$  avec  $x \in I$ .

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f$	0	$+\infty$

Il résulte du tableau que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $h(x) \geq 0$  donc  $f(x) \geq g(x)$ .

2.  $f'(0) = 1$  et  $g'(0) = 1$  donc la droite d'équation  $y = x$  est tangente commune à  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  en  $x = 0$ .



**72** 1.  $\ln(m_1x) = \ln(m_2x) \Leftrightarrow x(m_1 - m_2) = 0$ .

Or  $x \in ]0; +\infty[$  et  $m_1 \neq m_2$  donc  $x(m_1 - m_2) \neq 0$  et les courbes  $\mathcal{C}_{m_1}$  et  $\mathcal{C}_{m_2}$  n'ont pas de point commun.

2. Pour tout  $x > 0$   $f_m(x) = \ln m + \ln x$ .

$$f_m(x) = f_1(x) + \ln m$$

donc  $\mathcal{C}_m$  est l'image de  $\mathcal{C}_1$  par la translation de vecteur  $(\ln m)\vec{j}$  si  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  est le repère.

3. M a pour coordonnées  $(\frac{1}{m}; 0)$  et N a pour coordonnées  $(\frac{e}{m}; 1)$ . La droite (MN) a pour équation

$$y = \frac{1}{e-1}(mx - 1)$$

Ainsi toutes les droites (MN) passent par le point  $\Omega$  de coordonnées  $(0; \frac{-1}{e-1})$ .

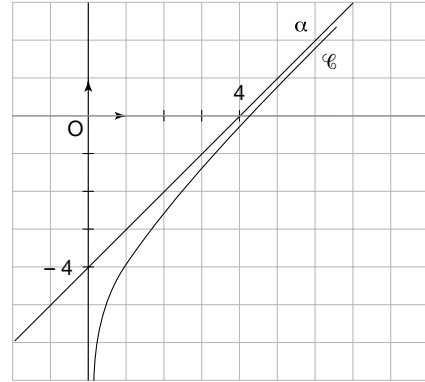
**73** 1.  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$  sur  $I$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

2. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-4) = 0$  donc la droite  $y = x - 4$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

b)  $f(x) - (x-4) = \ln \frac{x}{x+1} < 0$  donc  $\mathcal{C}$  est en dessous

de la droite  $d$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f$	$-\infty$	$+\infty$



**74** 1.  $f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)}$

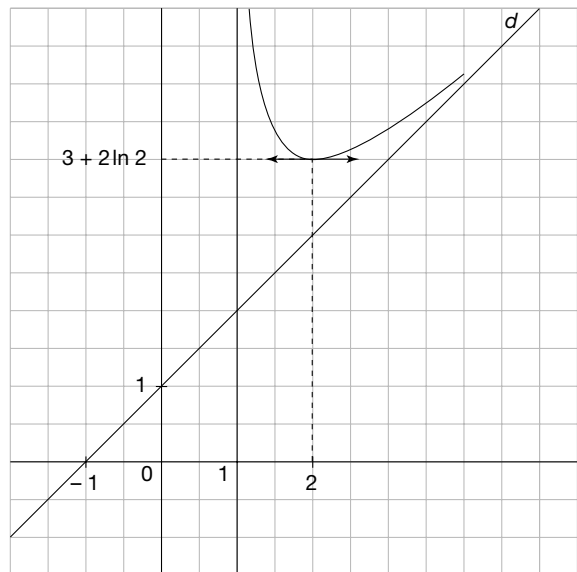
$x$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$3+2\ln 2$	$+\infty$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$ .

b)  $f(x) - (x+1) = 2 \ln \left( \frac{x}{x-1} \right)$ .

Pour tout  $x > 1$   $f(x) > (x+1)$  donc  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $d$ .

c)



**75** Pour tout  $x > 0$ ;  $f(x) = x - \ln 2 - \ln \left( 1 + \frac{1}{2x} \right)$ .

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

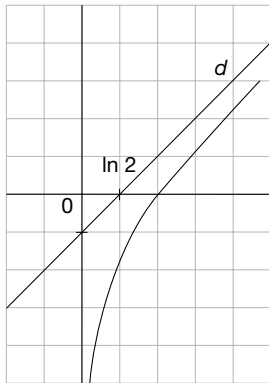
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - \ln 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) = 0.$

Donc la droite  $d$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

c)  $f(x) - (x - \ln 2) = -\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) < 0$  donc  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $d$ .

2.  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(2x+1)} > 0.$

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f$	$-\infty$	$+\infty$



**76** 1.  $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}.$

$x^2 + 2x - 1 > 0$  pour tout  $x > \sqrt{2} - 1.$

Donc sur  $I = ]1; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  et  $f$  est croissante strictement sur  $I$ . On a le tableau suivant :

$x$	1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. a) D'après le tableau, il existe  $\alpha$  unique dans  $I$  tel que  $f(\alpha) = 0.$

b)  $1, 1 < \alpha < 1, 2.$

**77**  $f(x) = \ln(1 + e^x) - \ln 2$  ou encore (1)

$f(x) = \ln e^x + \ln(1 + e^{-x}) - \ln 2$  soit

$f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x}).$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + \ln 2] = 0$  donc la droite d'équation

$y = x - \ln 2$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ ; de plus d'après (1) :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2$  donc la droite d'équation  $y = -\ln 2$  est asymptote horizontale.

**78** 1. a)  $f(x) = \ln e^{-x}(e^x + 1) = -x + \ln(e^x + 1).$

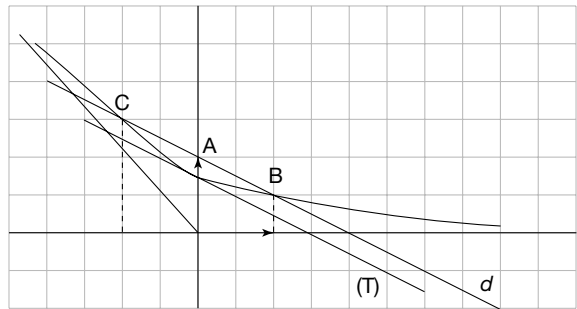
b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$  donc  $y = -x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $-\infty.$

2.  $f'(x) = -1 + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-1}{1+e^x} < 0.$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

La droite (BC) a pour vecteur directeur  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et

$f'(0) = -\frac{1}{2}$  d'où le parallélisme.



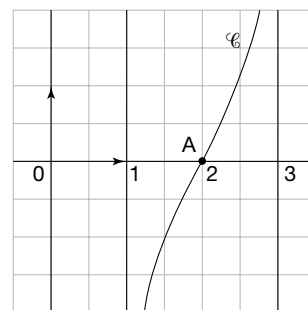
**79** 1. a)  $1 < x < 3$  donc  $-3 < -x < -1$  et  $1 < 4 - x < 3.$

b)  $\frac{1}{2} [f(4-x) + f(x)] = \left[ \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \right] = 0.$

c) Il résulte de la question précédente que  $A(2; 0)$  est centre de symétrie pour  $\mathcal{C}.$

2.  $f'(x) = \frac{2}{(x-1)(3-x)}.$

$x$	1	2	3
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



**80**  $f(x) = \frac{x \ln x - 4}{2 \ln x}.$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 4}{2x \ln x} = +\infty.$

Donc  $\mathcal{C}$  admet une tangente verticale en  $x = 0.$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{2}{x} \right] = 0$  donc  $y = \frac{2}{x}$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}.$

•  $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2}.$

• Sur  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ ,  $x(\ln x)^2 > 0$  d'où le résultat.

$x$	0	1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+		+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

Sur  $]0; 1[$   $f(x) > 0$  et sur  $]1; +\infty[$ , il existe  $\alpha$  unique tel que  $f(\alpha) = 0$ .

$$f(3) \times f(4) < 0 \text{ donc } 3 < \alpha < 4.$$

**81** • 1. a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$  donc  $y = x$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}$ .

b)  $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$  sur I.

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

$h$  strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  d'où l'existence d'un  $\alpha$  unique.  $h(0,5) \approx -0,19$  et  $h(0,6) \approx 0,09$ .

$$h(0,5) \times h(0,6) < 0 \text{ d'où } 0,5 < \alpha < 0,6.$$

c)  $f(x) - x = \frac{h(x)}{x^2}$ . Donc si  $x \in ]0; \alpha[$   $h(x) < 0$  et  $\mathcal{C}$  est au-dessous de  $d$  et si  $x > \alpha$   $h(x) > 0$  et  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $d$ .

2. a)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3}$ .

b)  $g(x) = x^3 - x + 1 + 2\ln x$ .

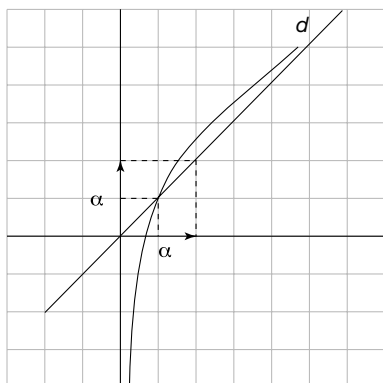
$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Il résulte que pour tout  $x$  de I,  $g(x) \geq 1$ .

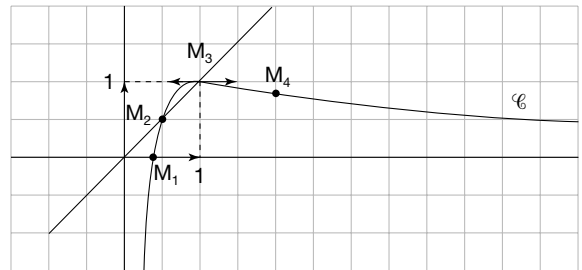
c)

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0



**82** • 1.  $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\searrow$	0



2.  $M_1$  a pour coordonnées  $(\frac{1}{e}; 0)$ .

Une tangente en  $x_0$  a pour équation

$$y = -\frac{\ln x_0}{x_0^2} + \frac{1 + 2\ln x_0}{x_0}$$

Donc la tangente passe par O si et seulement si

$\ln x_0 = -\frac{1}{2}$  soit  $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$  et  $M_2$  a pour coordonnées  $(e^{-\frac{1}{2}}; \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}})$ .

Le point  $M_3$  a pour coordonnées  $(1; 1)$

$f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$  donc  $M_4$  a pour coordonnées  $(e^{\frac{1}{2}}; \frac{3}{2} e^{\frac{1}{2}})$ .

a) Les nombres  $e^{-1}; e^{-\frac{1}{2}}; 1; e^{\frac{1}{2}}$  forment une suite géométrique de raison  $e^{\frac{1}{2}}$ .

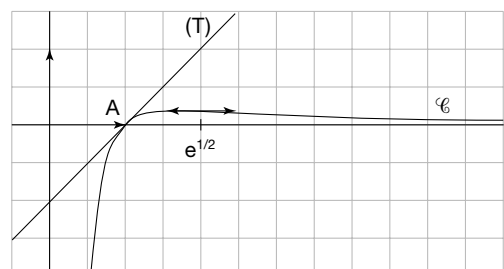
**83** • 1.  $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ .

$x$	0	$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $\frac{1}{2e}$ $\searrow$	0

2. a)  $f(1) = 0$   $f'(1) = 1$ .

Donc T a pour équation  $y = x - 1$ .

b)



3. M a pour coordonnées  $(u; \frac{\ln u}{u^2})$ .

$f'(u) = \frac{1-2\ln u}{u^3}$ . Donc  $T_u$  a pour équation :

$$y = \frac{1-2\ln u}{u^3}x + \frac{3\ln u - 1}{u^2}$$

$T_u$  a pour coefficient 1 si et seulement si :

$$\frac{1-2\ln u}{u^3} = 1 \text{ soit } u^3 - 1 + 2\ln u = 0.$$

4. En posant  $\varphi(u) = u^3 - 1 + 2\ln u$  définie sur  $]0; +\infty[$

$$\varphi'(u) = 3u^2 + \frac{2}{u} > 0.$$

$u$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(u)$		+	
$\varphi(u)$	$-\infty$	0	$+\infty$

D'après le tableau  $\alpha = 1$  est la seule solution de  $\varphi(u) = 0$  donc A est le seul point de  $\mathcal{C}$  en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = x$ .

**84** • **A.1.**  $g'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ .

$x$	0	1	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-	
$g$	0	$1 - \ln 2$	0	$-\infty$

$1,9 < \alpha < 2$ .

2.  $g(x) > 0$  pour  $0 < x < \alpha$  et  $g(x) < 0$  pour  $x > \alpha$ .

**B.1. a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ .

**b)**  $f$  est dérivable en O et la tangente T en  $x=0$  a pour équation  $y = x$ .

**2. a)**  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \left[ x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$ .

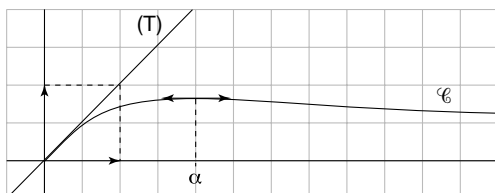
**b)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**3. a)**  $f'(x) = \frac{2x^2 - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{x^2} g(x)$ .

**b)**

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	1	+	-
$f$	0	$f(\alpha)$	0

$g(\alpha) = 0$  donc  $\ln(1 + \alpha^2) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1}$  donc  $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ .



**85** • **1. a)**  $x(\ln x)^2 = 4(\sqrt{x})^2 (\ln(\sqrt{x}))^2 = [2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}]^2$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln \sqrt{x} = 0$  d'où le résultat.

**b)**  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = (\ln x)^2 + 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 + 1 = +\infty$

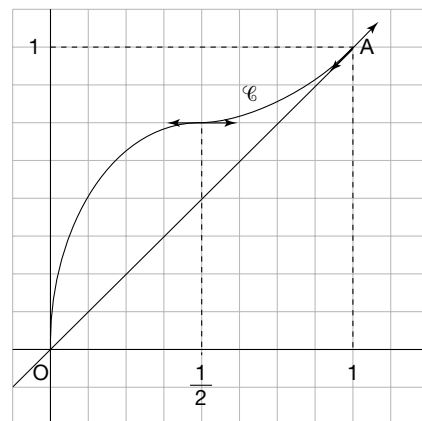
donc  $f$  n'est pas dérivable en  $x=0$ .

**2.** Pour tout  $x$  de  $]0; 1]$   $f'(x) = [\ln x + 1]^2$ .

$x$	0	$e^1$	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0		1

**3. a)**  $f'(1) = 1$  donc la tangente en A a pour équation  $y = (x - 1) + 1 = x$ . Cette tangente passe donc par O.

**b)**  $f(x) - x = x(\ln x)^2 > 0$  sur  $]0; 1]$  donc  $\mathcal{C}$  est au-dessus de la tangente en A.



### Fonctions exp et ln et suites

**86** **1.**  $v_n = 15 \left( \frac{1}{2} \right)^n$  donc  $w_n = \ln 15 - n \ln 2$ . Il en résulte que  $w_{n+1} - w_n = -\ln 2$ . Donc  $(w_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $\ln 15$  et de raison  $(-\ln 2)$ .

**2. a)**  $S_n = \frac{n+1}{2} [2 \ln 15 - n \ln 2]$ .

**b)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ .

**3. a)**  $\ln P_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$  donc  $P_n = e^{S_n}$ .

**b)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$ .

**87** • **1.**  $v_{n+1} = \ln u_{n+1} - 2 = \ln e^{\sqrt{u_n}} - 2$  soit

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n - 1 = \frac{1}{2} v_n$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = \ln e^3 - 2 = 1$  et de raison  $\frac{1}{2}$ .

**2.**  $v_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$  et  $\ln u_n = 2 + \left( \frac{1}{2} \right)^n$ .

**3. a)**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = 2$ .

**b)** Donc la suite  $u_n$  converge vers  $e^2$ .

**88** • 1. a)  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$  et  $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ .

<b>x</b>	1	$+\infty$
<b>f'(x)</b>		+
<b>f(x)</b>	$\ln 2 - 1$	0

<b>x</b>	1	$+\infty$
<b>g'(x)</b>		-
<b>g(x)</b>	$\ln 2 - \frac{1}{2}$	0

b) Il résulte que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1 ; +\infty[$   $f(x) \leq 0$  et  $g(x) \geq 0$ .

Donc  $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ . (1)

2. a) De (1) on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1 \\ \frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

Par addition :

$v_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq v_n$ . (2)

Il résulte de (2) que  $v_n \geq \ln(n+1)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**89** • 1.  $f^{(1)}(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  et  $f^{(2)}(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ .

2. a)  $f^{(1)}(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  avec  $u_1 = 1$  et  $v_1 = -1$ .

Si  $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}$  calculons  $f^{(n+1)}(x)$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{-(n+1)u_n + v_n - (n+1)v_n \ln x}{x^{n+2}}$

$f^{(n+1)}(x)$  est de la forme  $\frac{u_{n+1} + v_{n+1} \ln x}{x^{n+2}}$

avec  $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$  et  $v_{n+1} = -(n+1)v_n$ .

b)  $v_n = (-1)^n n!$

c)  $u_1 = 1 = (-1)^2 \times 1! = 1$ . Donc la proposition est vraie pour  $n = 1$ .

Supposons que  $u_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

$u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$

soit  $u_{n+1} = (-1)^n n! - (-1)^{n+1} (n+1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

$u_{n+1} = (-1)^{n+2} (n+1)! \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right]$ .

Donc la proposition est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

3.  $f^{(7)}(x) = \frac{7! \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7}\right) - 7! \ln x}{x^8}$ .

**90** • 1.  $u_{n+1} = e^{1+\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} u_n$ . Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = e$  et de raison  $e^{\frac{1}{2}}$ .

2.  $u_n = e \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^n$  donc  $v_n = 1 - \frac{n}{2}$

$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2}$  donc  $(v_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $v_0 = 1$  et de raison  $-\frac{1}{2}$ .

3.  $S_n = \frac{e \left[1 - \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^{n+1}\right]}{1 - e^{\frac{1}{2}}}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{1 - e^{\frac{1}{2}}}$ .

$\ln T_n = v_0 + \dots + v_n = \left(\frac{n+1}{2}\right) \left[2 - \frac{n}{2}\right]$  donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln T_n = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$ .

**91** • 1.  $u_n = \frac{e^n}{e^{n \ln 3}} = e^{n(1 - \ln 3)}$ .

2.  $u_{n+1} = e^{n(1 - \ln 3)} e^{1 - \ln 3} = \frac{e}{3} u_n$ .

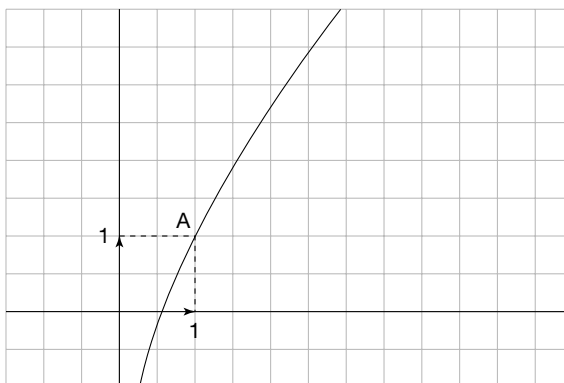
Donc  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison  $\frac{e}{3}$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{3 - e}$ .

**92** • 1.  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ .

<b>x</b>	0	1	$\alpha_n$	$+\infty$
<b>f'(x)</b>			+	
<b>f</b>	$-\infty$	1	$\frac{1}{n}$	$+\infty$

2. a) Pour tout entier  $n$ , il existe  $\alpha_n$  unique de  $]0 ; +\infty[$  tel que  $f(\alpha_n) = n$  ou  $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$ .



b)  $n < n + 1$  donc  $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ . La suite  $(\alpha_n)$  est donc strictement croissante.

3. a)  $f(1) = 1f'(1) = 2$  donc  $\Delta$  a pour équation  $y = 2x - 1$ .

b)  $f(x) - (2x - 1) = \ln x - x + 1 = \varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$x$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Il résulte que  $\varphi(x) \leq 0$  donc  $f(x) \leq 2x - 1$  et  $\mathcal{C}$  est au-dessous de  $\Delta$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ .

4. a)  $x + \ln x \leq 2x - 1$  donc  $\alpha_n + \ln \alpha_n < 2\alpha_n - 1$

$$\text{soit } \frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$$

b) Il résulte de la question précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$$

**93** 1. On pose pour tout  $x \geq 0$

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x \text{ et } \psi(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-x}{(x+1)} \text{ et } \psi'(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ donc,}$$

$x$	0	$+\infty$	$x$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	$\psi'(x)$		+
$\varphi(x)$	0	$-\infty$	$\psi(x)$	0	$+\infty$

Donc pour tout  $x \geq 0$   $\varphi(x) \leq 0$  et  $\psi(x) \geq 0$ .

$$\text{Il en résulte que } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x. \quad (1)$$

$$2. \text{ Pour } n=1 \quad 1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$$

La proposition est donc vraie pour  $n=1$

$$\text{supposons que } 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$\text{soit } \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$

Donc la proposition est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

$$3. \ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

En tenant compte de (1) il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \\ &\dots \\ \frac{n}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n^2}\right)^2 &\leq \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \frac{n}{n^2} \end{aligned} \right\}$$

Par addition :

$$\frac{1 + \dots + n}{n^2} - \frac{1^2 + \dots + n^2}{2n^4} \leq \ln u_n \leq \frac{1 + \dots + n}{n^2}$$

$$\text{soit } \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} < \ln u_n < \frac{n(n+1)}{2n^2} \quad (2)$$

Donc de (2) on déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln u_n) = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{e}$ .

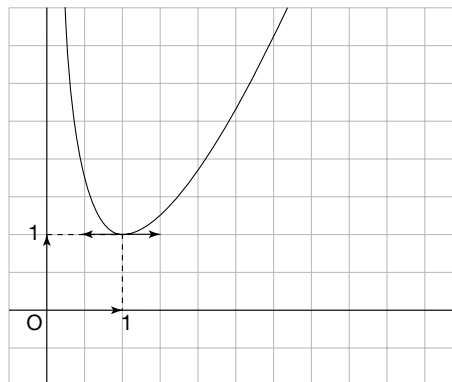
### Prendre toutes les initiatives

**94** •  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	-	0
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$



**95** • Pour  $x > a$ , l'équation équivaut à  $x - a = xb$  ou  $x(1-b) = a$  si  $b \neq 1$ ,  $x = \frac{a}{1-b}$ .

$$\text{Comparons } \frac{a}{1-b} \text{ et } a. \quad \frac{a}{1-b} - a = \frac{ab}{1-b};$$

si  $0 < b < 1$ ,  $\frac{ab}{1-b} > 0$  donc  $\frac{a}{1-b} > a$  et  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{a}{1-b} \right\}$ ;

si  $b > 1$ , l'équation n'a pas de solution.

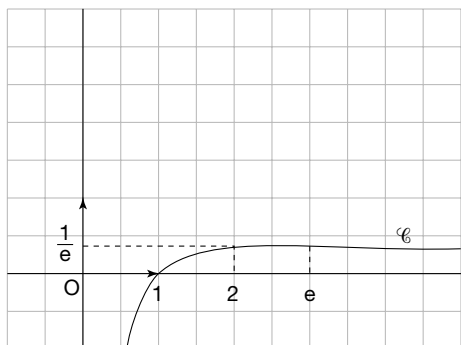
**96** •  $u_n = u_0 q^n$  donc  $v_n = \ln u_0 + n \ln q$  et  $v_{n+1} = v_n + \ln q$ . Donc  $(v_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $v_0 = \ln u_0$  et de raison  $\ln q$ .

**97** •  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 0$  et de raison  $-2$  donc  $u_n = -2n$ . Il en résulte que  $v_n = e^{-2n \ln 2}$  et  $v_{n+1} = e^{-2 \ln 2} v_n$ .

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = 1$  et de raison  $e^{-2 \ln 2} = e^{\frac{\ln 4}{4}} = \frac{1}{4}$ .

**98** • Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$   $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  d'où le tableau et la courbe

$x$	0	$e$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



$1 < 2 < e$  donc il existe un couple  $(n; p)$  avec  $n = 2$  et  $p = 4$  tel que  $n^p = p^n$ .

**99** •  $f^{(1)}(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$ .

$f''(x) = 2 \ln x + 3$  et  $f'''(x) = \frac{2}{x}$  donc  $f^{(3)}(x) = \frac{2(-1)^2 0!}{x}$  et la proposition est vraie pour  $n = 3$ .

Supposons que  $f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

alors  $f^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!(-1)(n-2)}{x^{n-1}}$

soit  $f^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$  donc la proposition est vraie pour tout  $n \geq 3$ .

**100** • A a pour coordonnées  $(a; \ln a)$  et B  $(b; \ln b)$  donc I a pour coordonnées  $(\frac{a+b}{2}; \frac{\ln ab}{2})$  et J a pour coordonnées  $(\frac{a+b}{2}; \ln(\frac{a+b}{2}))$ .

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 > 0 \text{ car } 0 < a < b.$$

$$\text{Donc } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab \text{ et } \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{2} \ln(ab).$$

Il en résulte que J est au-dessus de I donc que I est « en dessous » de  $\mathcal{C}$ .

**101** •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln x - \frac{3}{2}x\right) = 0$   
donc la tangente en O est l'axe des abscisses.

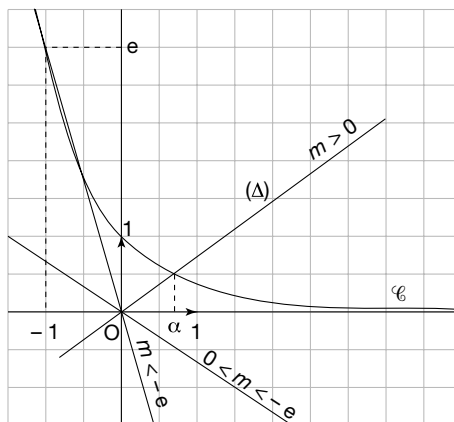
$$f'(x) = 2x(\ln x - 1).$$

$x$	0	$e$	$+\infty$		
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus  $f(x) = 0$  si et seulement si  $\ln x = \frac{3}{2}$  soit  $x = e^{\frac{3}{2}}$ .

Donc  $\mathcal{C}$  présente un minimum en  $A(e; -\frac{1}{2}e^2)$  et recoupe l'axe des abscisses en  $B(e^{\frac{3}{2}}; 0)$ .

**102** •



Pour avoir une idée de la solution on a tracé sur la figure ci-dessus la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = e^{-x}$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = mx$ . Il semble donc que si  $m > 0$  il existe une unique solution. Notons  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^{-x} - mx$ ,  $\varphi'(x) = -e^{-x} - m$ .

1. Si  $m > 0$   $\varphi'(x) < 0$  pour tout réel  $x$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$		
$\varphi'(x)$		-			
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$

Il existe donc  $\alpha$  unique tel que  $\varphi(\alpha) = 0$  et l'équation  $(E_m)$  a une unique solution.

2. Si  $m < 0$   $\varphi'(x) > 0$  si et seulement si  $-e^{-x} > m$  ou  $e^{-x} < -m$  soit  $x > -\ln(-m)$ .

D'où le tableau de variation

$x$	0	$-\ln(-m)$	$+\infty$		
$\varphi'(x)$	-	0	+		
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m[\ln(-m)-1]$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\ln(-m) = 1 \Leftrightarrow m = -e.$$

D'où

- si  $m = -e$ ,  $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  donc l'équation  $(E_m)$  a une unique solution  $x = -1$ ;
- si  $-e < m < 0$ ,  $m[\ln(-m)-1] > 0$  donc  $\varphi(x) > 0$  et l'équation  $(E_m)$  n'a pas de solution;
- si  $m < -e$ ,  $m[\ln(-m)-1] < 0$  donc  $\varphi(x) = 0$  pour deux réels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et l'équation  $(E_m)$  a deux solutions.

**103** •  $f'(x) = 6x^2 + 2x + \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x}$  avec pour tout  $x > 0$ ,  $g(x) = 6x^3 + 2x^2 + 1$ ,  $g'(x) = 18x^2 + 4x$ .

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	1	$+\infty$

Il en résulte que pour tout réel  $x > 0$ ,  $g(x) > 1$  donc  $f'(x) > 0$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Il existe donc  $\alpha > 0$  unique tel que  $f(\alpha) = 0$  avec  $54 \cdot 10^{-2} \leq \alpha < 55 \cdot 10^{-2}$ .

**104** •  $(P_1)$  équivaut à  $(e^a)^2 - 2be^a - 1 = 0$  soit en posant  $e^a = X$  et en résolvant  $X^2 - 2bX - 1 = 0$   
 $(e^a - b + \sqrt{1+b^2})(e^a - b - \sqrt{1+b^2}) = 0$ .

Or  $b - \sqrt{1+b^2} < 0$  donc la seule solution est  $e^a = b + \sqrt{1+b^2}$  soit  $a = \ln(b + \sqrt{1+b^2})$  d'où l'équivalence des deux propositions.

**105** • On pose pour tout  $x$  de  $[0; a[$   
 $g(x) = \ln(a-x) \ln(a+x) - (\ln a)^2$

$$g(x) = \left[ \ln a + \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] \left[ \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) \right] - (\ln a)^2$$

soit  $g(x) = \ln a \ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ .

Or  $0 < \frac{x}{a} < 1$  donc  $0 < \frac{x^2}{a^2} < 1$  soit  $0 < 1 - \frac{x}{a} \leq 1$  et  $0 < 1 - \frac{x^2}{a^2} < 1$  donc :  $\ln\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) < 0$ ,  $\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) < 0$  et  $\ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) > 0$  d'où  $g(x) \leq 0$  et  $\ln(a-x) \ln(a+x) \leq (\ln a)$ .

**106** • **1. a)** Pour  $x > 0$ ,  $M$  a pour coordonnées  $(x; 7 \ln x)$  donc  $OM^2 = x^2 + (\ln x)^2$ .

**b)** Pour tout réel  $x > 0$   $f'(x) = 2x + \frac{2}{x} \ln x$  soit  
 $f'(x) = \frac{2}{x}(x^2 + \ln x) = \frac{2}{x}g(x)$  avec pour tout réel  $x > 0$ ,  
 $g(x) = x^2 + \ln x$ .

**2. a)**  $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

**b)**  $g$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  donc il existe  $\alpha$  unique de  $]0; +\infty[$  tel que  $g(\alpha) = 0$  avec  $0,65 < \alpha < 0,66$ .

**3. a)**

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Or  $g(x) = 0$  donc  $\ln \alpha = -\alpha^2$  et  $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$ .

**b)** La distance  $OM$  est donc minimale pour  $x = \alpha$ .

**c)** La tangente en  $M_0$  de coordonnées  $(\alpha; \ln \alpha)$  a pour équation  $y = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \ln \alpha$ .  
 Le vecteur  $\vec{u}$  directeur de la tangente  $\alpha$  pour coordonnées  $(\alpha; \frac{1}{\alpha})$  et  $\overrightarrow{OM_0}(\alpha; \ln \alpha)$ .

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM_0} = \alpha + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \ln \alpha}{\alpha} = 0.$$

Donc la tangente en  $M_0$  à  $\mathcal{C}$  est perpendiculaire à la droite  $(OM_0)$ .

**107** • **1. a)**  $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$   
 $f''(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}$ .

**b)**

$x$	-2	$\alpha$	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$f'(-0,6) \approx -0,09$        $f'(-0,5) \approx 0,072$ .  
 Donc  $f'(-0,6) \times f'(-0,5) < 0$  et  $-0,6 < \alpha < -0,5$ .

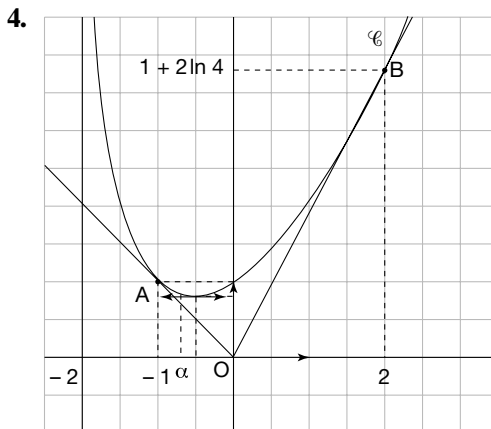
**2.**

$x$	-2	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$$f(\alpha) = 1 + \alpha \ln(\alpha + 2) = 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha + 2} = \frac{\alpha + 2 - \alpha^2}{\alpha + 2}.$$

**3. a)**  $T_{x_0}$  a pour équation  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .  
 Donc  $T_{x_0}$  passe par  $O$  si et seulement si  $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$ .

**b)**  $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$  si et seulement si  $1 + x_0 \ln(x_0 + 2) = x_0 \ln(x_0 + 2) + \frac{x_0^2}{x_0 + 2}$  soit  $x_0^2 - x_0 - 2 = 0$  donc  $a = -1$  et  $b = 2$ .



**108** • **A. 1.**  $f(1-x) = -(1-x)\ln(1-x) - x\ln x = f(x)$   
 donc la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$  est axe de symétrie pour  $\mathcal{C}$ .

**2. a)**  $f'(x) = \ln(1-x) - \ln x = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$  si  $x \in ]0; \frac{1}{2}[$   
 $\frac{1-x}{x} > 1$  et  $f'(x) > 0$ .

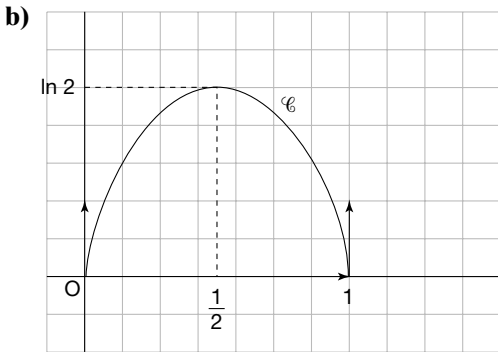
**b)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -\ln x - \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} \right]$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .

La tangente à  $\mathcal{C}$  en  $x = 0$  est verticale.

**3. a)**

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow \ln 2$	$\searrow 0$



**B. 1.**  $b = 1 - a$  donc

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} = -a \ln a - (1-a) \ln(1-a) = f(a).$$

Or  $f(a) \leq \ln 2$  donc

$$a \ln \frac{1}{a} + b \ln \frac{1}{b} \leq \ln 2.$$

**2.** Pour  $a = b = \frac{1}{2}$  on a l'égalité.

**109** • **1.**  $f'(x) = 1 - e^x$  et  $g'(x) = -xe^x$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\infty$	

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	0	$\nearrow 1$	$\searrow -\infty$	

**2.** La courbe  $\mathcal{C}_f$  est celle pour lequel le maximum est le point de coordonnées  $(0; -1)$ .

**3.**  $h(x) = x - e^x - (1-x)e^x = x + e^x(x-2)$

$$h'(x) = 1 + e^x(x-1) = 1 - g(x)$$

donc pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) \geq 0$ .

**b)**

$x$	$-\infty$	0	$\alpha$	$+\infty$
$h'(x)$		+	0	+
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow -2$	$\searrow 0$	$+\infty$

D'où l'existence de  $\alpha$  unique tel que  $h(\alpha) = 0$  et  $1,6 < \alpha < 1,7$ .

**B. 2. a)** Pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; 1[$   $g(x) \leq 1$  soit  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ .

**b)**  $k \geq 2$   $0 < \frac{1}{k} < 1$  soit  $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$

et  $\ln e^{\frac{1}{k}} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$  soit  $\frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$ .

**c)**  $S_n - S_{n-1}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + \ln(n-1)$$

$$\text{soit } S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \leq 0.$$

Donc la suite  $(S_n)$  est décroissante.

**3. a)** La suite  $(S_n)$  est décroissante donc  $u_n \geq 0$ .

**b)** Pour tout  $x$  de  $]0, 1[$   $x - e^x \leq -1$  d'où  $x + 1 \leq e^x$ .

**c)** Si  $k \geq 1$   $0 < \frac{1}{k} \leq 1$  et  $1 + \frac{1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$  soit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

**d)**  $u_n = \left(1 + \dots + \frac{1}{20}\right) - \ln 20 - \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right) + \ln n$  d'où

$$u_n = \ln \frac{n}{20} - \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Pour  $n = 21$   $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) = \ln \frac{22}{21} \leq \frac{1}{21}$ , donc la proposition est vraie pour  $n = 21$ .

Supposons  $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\ln\left(\frac{n+2}{21}\right) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{21}\right).$$

Or  $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$  donc

$\ln\left(\frac{n+2}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$  donc la proposition est vraie pour tout  $n > 20$ .

**e)**  $u_n \leq \ln \frac{n}{21} - \ln\left(\frac{n+1}{21}\right)$

$$\text{soit } u_n \leq \ln \frac{21}{20} - \ln \frac{n+1}{n} \leq 0,049$$

car  $\ln \frac{21}{20} \approx 0,0487 \dots$  et  $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$ .

**110** • Partie préliminaire

**A. 1.**  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

<b>x</b>	0	1	e	$+\infty$
<b>g'(x)</b>		+	0	-
<b>g(x)</b>	$-\infty$		$1 + \frac{1}{e}$	1

2. Il existe  $\alpha$  unique de  $]0; 1[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

**B. 1.**  $h'_n(x) = \frac{2x^2 + n}{x}$ .

<b>x</b>	0	$\beta_n$	$+\infty$
<b>h'_n(x)</b>		+	
<b>h_n(x)</b>	$-\infty$		0

**a)**  $h_n(x) = 0$  a une solution unique  $\beta_n$   
 $h_n(1) = 1 - n$  et  $h_n(3) = 9 + n(\ln 3 - 1)$ .  
 Si  $n = 1$ ,  $h_n(1) = 0$  et  $h_n(3) = 8 + \ln 3$  donc  $\beta_1 = 1$ .  
 Si  $n > 1$ ,  $h_n(1) < 0$  et  $h_n(3) > 0$  donc  $1 < \beta_n < 3$ .

**Étude d'une famille de fonctions :**

**A. 2. a)**  $f'_n(x) = 1 - n\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = \frac{h_n(x)}{x^2}$ .

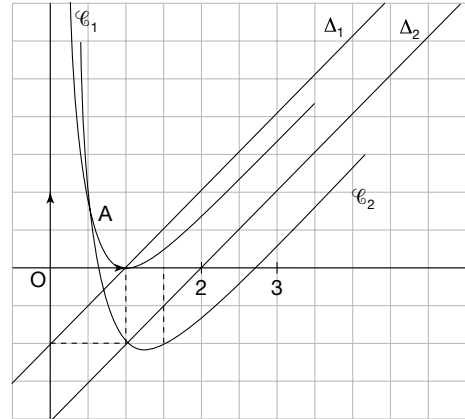
**b)**

<b>x</b>	0	$\beta_n$	$+\infty$
<b>f'_n(x)</b>		-	0
<b>f_n(x)</b>	$+\infty$		$f_n(\beta_n)$

**2. a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - n)] = 0$  donc la droite  $\Delta_n$  d'équation  $y = x - n$  est asymptote oblique.

**b)**  $f_n(x) - (x - n) = -n\frac{\ln x}{x}$  donc si  $0 < x < 1$ ,  $\ln x < 0$  et  $\mathcal{C}_n$  est au-dessus de  $\Delta_n$  et si  $n > 1$   $\mathcal{C}_n$  est en dessous de  $\Delta_n$ .

**3.**



**B. 1.**  $f_n(x) = x - ng(x)$ .  
 $f_n(\alpha) = \alpha$  car  $g(\alpha) = 0$  donc les courbes  $\mathcal{C}_n$  passent toutes par le point  $A(\alpha; \alpha)$ .

**2.**  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - (n + 1)g(x) - x + ng(x)$  soit  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -g(x)$ .  
 Donc pour  $0 < x < \alpha$ ,  $g(x) < 0$  donc  $f_{n+1}(x) > f_n(x)$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_n$  et si  $x > \alpha$ ,  $g(x) > 0$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$  est en dessous de  $\mathcal{C}_n$ .

C'est nouveau au bac (page 82)

**111 1. a)** Faux car  $u_n = \frac{2}{3^{n-1}}$ .

**b)** Vraie car  $v_n = \ln 2 - (n - 1) \ln 3$  donc  $v_{n+1} - v_n = -\ln 3$ . D'où le résultat.

**c)** Vraie car :

$$\frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n) = \frac{1}{n} \left[ \frac{n}{2} (2 \ln 2 - (n - 1) \ln 3) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\ln 4 + \ln 3 - n \ln 3]$$

soit  $\frac{1}{2} (\ln 12 - n \ln 3)$ .

**2. a)** Faux car  $g$  n'est pas défini en  $x = 1$  car  $f(1) = 0$ .

**b)** Faux :  $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  donc  $g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{0}{e} = 0$ .

**c)** Vraie car  $g(x) = 1$  équivaut à  $f(x) = e$  donc deux solutions  $x = 0$  et  $x = \alpha$  avec  $1 < \alpha < 2$ .

**d)** Vraie car

**e)**  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = 1$  et

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln f(x) = -\infty$ .

**112 1.** Vraie car si  $\varphi(x) = \ln x - ax - b$

$f'(x) = \frac{1}{x} - a > 0$ .

<b>x</b>	0	$\alpha$	$+\infty$
<b>φ'(x)</b>		+	
<b>φ(x)</b>	$-\infty$		0

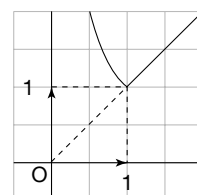
Il existe donc  $\alpha$  unique de  $]0; +\infty[$  tel que  $\varphi(\alpha) = 0$  donc l'équation  $\ln x = ax + b$  a une solution unique.

**2. Vraie** car  $x > 0, y > 0$   $\ln(x + y) = \ln x + \ln y$  équivaut à  $x + y = xy$  ou  $y(x - 1) = x$  pour  $x > 1, y = \frac{x}{x - 1}$  d'où l'infinité de couples.

**3. Faux**

si  $n > 1$   $\ln x > 0$  donc  $f(x) = x$  et si  $0 < x < 1, \ln x < 0$  et

$f(x) = \frac{1}{x}$ .



$f$  est donc non dérivable en  $x = 1$  (dérivée à gauche  $(-1)$  et dérivée à droite  $1$ ).

**4. Faux** car l'équation équivaut à  $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

ou  $(a+b)^2 = 9ab$

donc  $a^2 - 7ab + b^2 = 0$ .

En posant  $\frac{a}{b} = X$  il résulte  $X_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$  et

$X_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$  donc  $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$  convient également.

**113 1.** Voir le cours.

**2. a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**b)**  $f'(x) = e^{-x} \left[ -\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right] = e^{-x} g(x)$ .

**c)**  $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$  donc pour tout  $x > 1$ ,  $g(x) < 0$ .

<b>x</b>	0	1	$+\infty$
<b>g'(x)</b>		$-\frac{1}{2}$	
<b>g(x)</b>	$+\infty$	0	$-\infty$

**d)**

<b>x</b>	0	1	$+\infty$
<b>f'(x)</b>		+	0
<b>f(x)</b>	$-\infty$	$e^{-1}$	0

donc l'équation  $f(x) = e^{-1}$  a pour unique solution  $x = 1$ .