

Activités (page 20)

ACTIVITÉ 1

1. a) Pour tout point M la tangente coupe l'axe des abscisses donc $f'(x_0) \neq 0$.

b) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

c) (T) coupe l'axe des abscisses pour $y = 0$

$$\text{et } x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

2. a) $\overrightarrow{TH} = \vec{i}$ équivaut à abscisse de \overrightarrow{TH} est 1

$$\text{donc } \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 \text{ d'où } f(x_0) = f'(x_0).$$

b) Il en résulte que f convient si et seulement si $f' = f$.

ACTIVITÉ 2

$$1. f\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) = f(t_0) + \frac{1}{n}f'(t_0) = f(t_0) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{et } f(t_0) = y_0 = 1 \text{ d'où } y = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$2. a) f\left(t_k + \frac{1}{n}\right) \approx f(t_k) + \frac{1}{n}f'(t_k) \text{ or } f'(t_k) = f(t_k)$$

$$\text{donc } f\left(t_k + \frac{1}{n}\right) = f(t_k) \left[1 + \frac{1}{n}\right].$$

$$\text{On choisit } y_{k+1} = y_k \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b) Par récurrence il est évident que $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.

Travaux dirigés (page 97)

TD 1

1. Pour tout réel x , $f(x_0 + x) = f(x_0) \times f(x) = 0$.
Donc pour tout réel X , $f(X) = 0$.

2. a) $f(x + 0) = f(0) \times f(x)$, donc $f(x)[1 - f(0)] = 0$ pour tout réel x . Il en résulte que $f(0) = 1$.

$$b) f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 = f(x),$$

donc pour tout réel X , $f(X) > 0$.

3. a) g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel y ,
 $g'(y) = f'(x + y) = f(x)f'(y)$.

b) Il en résulte que $f'(x) = f'(0)f(x) = af(x)$ avec $a = f'(0)$.

c) $f(x) = ke^{ax}$ et $f(0) = 1$ donc $k = 1$.

4. $e^{a(x+y)} = e^{ax} \times e^{ay}$ donc $f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

TD 2

1. a) $f'(x) = e^x - 1$.

D'après le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	↘ 0 ↗	$+\infty$

Pour tout réel x : $f(x) \geq 0$ donc $(1 + x) \leq e^x$ (1)

Pour tout réel $x < 1$, $1 - x < e^{-x}$, $1 - x > 0$ et $e^{-x} > 0$

$$\text{donc } e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad (2).$$

2. a) $x = \frac{1}{n}$ avec $0 < x < \frac{1}{2}$ d'après (1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq e^{\frac{1}{n}}$

$$\text{donc } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad (3).$$

$$b) x < 1 \text{ donc } e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \text{ soit}$$

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ donc } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

d'où le résultat.

2 1. a) $g'(x) = e^{-x} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \right]$

$$= e^{-x} \left(-\frac{x^n}{n!} \right) < 0.$$

x	0	1
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	→

Donc $g(1) < 1$.

On démontre de même que h est croissante sur $[0; 1]$ et que $h(1) > 1$.

2. Il résulte alors de l'étude précédente que

$$e^{-1} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) < 1 \text{ et}$$

$$e^{-1} \left[1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \right] > 1 \text{ donc}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \quad (4)$$

3 1. $n! + n! + \dots + 1! < n! e < (n! + n! + \dots + 1) + 1$.

En posant $a_n = n! + n! + \dots + 1$ il en résulte que $a_n < n! e < a_n + 1$.

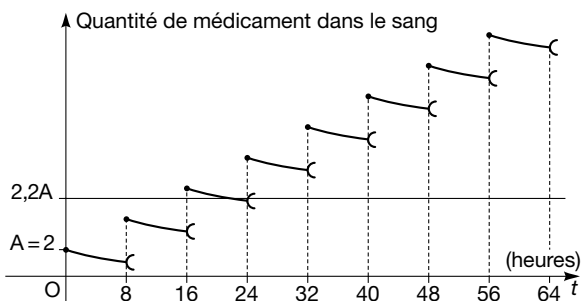
2. a) Si $q \leq n$ alors q divise $n!$ donc $\frac{n!p}{q}$ est un entier. Or $\frac{n!p}{q}$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs donc $q \leq n$ est impossible.

b) Il résulte que quel que soit $n > 1$, $q > n$. Ce qui est impossible donc e est irrationnel.

TD 3

1 1. Il reste $Ae^{-\frac{1}{3}}$.

2.



3. À partir de la troisième injection.

2 1. $b > 0$ donc $1 + be^{-kt} > 0$ pour tout réel t .

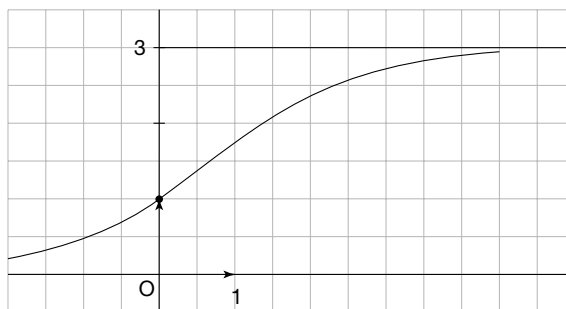
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$.

$$3. f'(t) = \frac{akbe^{-kt}}{(1 + be^{-kt})^2}$$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	$\frac{a}{1+b}$	a

Pour $a = 3$, $b = 2$ et $k = 1$.

On a la fonction $f: t \mapsto \frac{3}{1 + 2e^{-t}}$.



3 1. a) $x'(t) = -kx(t) + 1000k$ équation du type $y' = ay + b$ donc les solutions sont :

$$f: t \mapsto \lambda e^{-kt} + 1000.$$

b) $40 = \lambda + 1000$ donc $k = -960^\circ$. Il en résulte que $f(t) = -960e^{-kt} + 1000$.

$$f(1) = 160 \text{ donc } 160 = -960e^{-k} + 1000 \text{ soit } e^{-k} = \frac{7}{8}$$

$$f(5) = -960(e^{-k})^5 + 1000 = -\left(\frac{7}{8}\right)^5 \times 960 + 1000.$$

Soit $f(5) \approx 508^\circ$.

2. Mise en mouvement d'un canot :

$$mv' = -rv + F \text{ ou } v' = -\frac{r}{m}v + \frac{F}{m} \text{ donc}$$

$$v(t) = \lambda e^{-\frac{r}{m}t} + \frac{F}{r}.$$

$$v(1) = F \text{ donc } 1 = \lambda e^{-\frac{r}{m}} + \frac{F}{r} \text{ soit } \lambda = e^{\frac{r}{m}} \left(1 - \frac{F}{r} \right)$$

$$\text{donc } v(t) = e^{\frac{r}{m}} \left(1 - \frac{F}{r} \right) e^{-\frac{r}{m}t} + \frac{F}{r}.$$

La vitesse limite du canot est $\frac{F}{r}$.

TD 4

1 $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$.

1. $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$$\text{donc } h(x) - h'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}$$

donc h est solution de (E).

2. g solution de (E) si et seulement si $g - g' = \frac{e^x}{x^2}$

soit $g_1 - g'_1 + h - h' = \frac{e^x}{x^2}$.

Or $h - h' = \frac{e^x}{x^2}$ donc $g_1 - g'_1 = 0$.

3. $g_1(x) = \lambda e^x$.

4. $g(x) = \lambda e^x + \frac{e^x}{x}$.

2 1. $h(x) = ax^2 + bx + c$
 $h'(x) = 2ax + b$

$$h(x) + h'(x) = ax^2 + (b + 2a)x + c + b = x^2 + x$$

d'où $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$ soit $h(x) = x^2 - x + 1$
 donc les solutions sont données pour tout réel x
 par $f(x) = \lambda e^{-x} + x^2 - x + 1$.

2. $h'(x) = -a \sin x + b \cos x$

$$h(x) + h'(x) = (b - a) \sin x + (a + b) \cos x = 5 \cos x$$

d'où $a + b = 5$, $b - a = 0$, $b = \frac{5}{2} = a$

$$\text{et } h(x) = \frac{5}{2} (\cos x + \sin x)$$

$$\text{et } f(x) = \lambda e^{2x} + \frac{5}{2} (\cos x + \sin x).$$

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 101)

1. La fonction exponentielle

1 a) e^x b) e^{-3} c) $1 + e^{-2x}$
 d) e^{2-x} e) e^{4x} f) e^{2y}

2 1. $[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = [g(x) + h(x)][g(x) - h(x)]$
 soit $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$.

$$2. 2[g(x)]^2 - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - 1 = g(2x).$$

$$2g(x)h(x) = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) = h(2x).$$

3 Corrigé dans le manuel.

4 Corrigé dans le manuel.

5 a) $2e^{-x}(e^x + 2) = 1$ soit $2 + 4e^{-x} = 1$.
 $4e^{-x} = -1$ pas de solution.

b) $x = 2$.

6 a) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}}$ équivaut pour $x \neq 0$ à $x^2 + x - 2 = 0$
 soit $x = 1$ ou $x = -2$.

b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ d'où $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

7 a) L'équation équivaut à $x^2 + x - 6 = 0$
 soit $x = -3$ ou $x = 2$.

b) L'équation équivaut à $x^2 - x + 2 = 0$ donc pas de solution.

8 a) $e^{x^2} \leq e^{-2}$ d'où $x^2 \leq -2$ vrai pour tout réel x .
 b) L'équation équivaut à $x^3 - x - 6 \leq 0$
 ou $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) \leq 0$ donc $x \in]-\infty; 2]$
 car $x^2 + 2x + 3 > 0$ pour tout réel x .

9 a) L'inéquation équivaut à $e^{2x} \leq 1$.

Soit $2x \leq 0$ et $x \in]-\infty; 0]$.

b) $(e^x - 1)(e^x - 1) > 0$ donc $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

10 Corrigé dans le manuel.

2. Étude de la fonction exponentielle

11 Corrigé dans le manuel.

$$\mathbf{12} \quad f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\mathbf{13} \quad f'(x) = \frac{3e^x}{(2e^x + 1)^2}.$$

$$\mathbf{14} \quad f'(x) = e^x [2 \cos x].$$

$$\mathbf{15} \quad f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}.$$

$$\mathbf{16} \quad f'(x) = 2x - 2xe^x = 2x(1 - e^x).$$

$$\mathbf{17} \quad \mathbf{1.} \quad f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = g(x).$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = f(x).$$

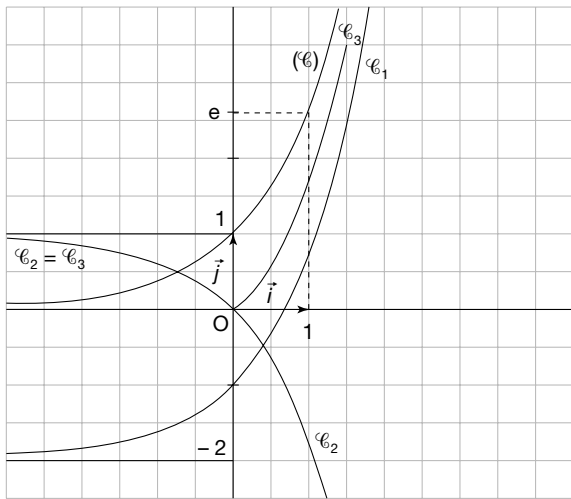
$$\mathbf{2.} \quad h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2} = \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{f^2}.$$

Or $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$ (voir corrigé exercice 2)

$$\text{et } h'(x) = \frac{1}{f^2(x)} \quad \text{ou } h'(x) = \frac{1}{f^2}.$$

- 18** 1. $f(0) = 2$ et $f(-2) = 0$ donc $2 = b$ et $0 = (-2a + b)e^2$ donc $2a = b = 2$; $a = 1$ et $b = 2$. Ainsi pour tout réel x , $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.
 2. $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$ et A a pour coordonnées $(-1; e)$.

19



- a)** $f_1 : x \mapsto e^x - 2$. La courbe \mathcal{C}_1 est déduite de \mathcal{C} par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.
b) $f_2 : x \mapsto 1 - e^x$. \mathcal{C}_2 se déduit de \mathcal{C} par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie de la translation de vecteur \vec{j} (c'est-à-dire la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$).
c) $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2$ si $x < 0$ et \mathcal{C}_3 est la symétrie de \mathcal{C}_2 par rapport à l'axe des abscisses $x > 0$.

20 Corrigé dans le manuel.

3. Des limites importantes

- 21** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
22 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
23 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.
24 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
25 Corrigé dans le manuel.
26 $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
27 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

- 28** 1. $f(x) - (x - 1) = e^{-2x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à \mathcal{C} .
 2. $e^{-2x} > 0$ pour tout réel x donc \mathcal{C} est au-dessus de la droite d .

- 29** $f(x) - x - 1 = 4e^{-x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-x} = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .

- 30** $f(x) - x - 2 = xe^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$
 donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .

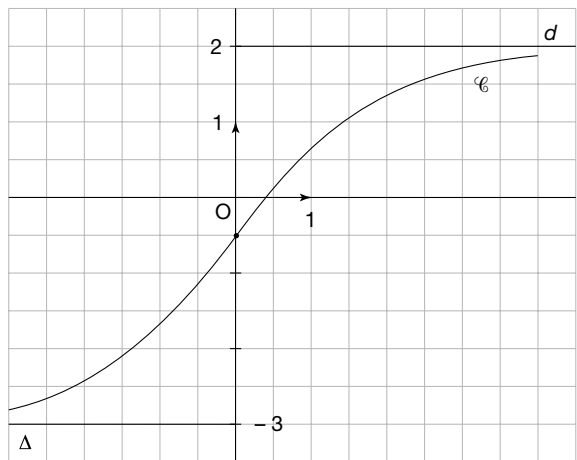
- 31** 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ d'où le résultat.

2. a) $f'(x) = \frac{2e^x(e^x + 1) - (2e^x - 3)e^x}{(e^x + 1)^2}$

donc $f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2}$.

b)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-3	2



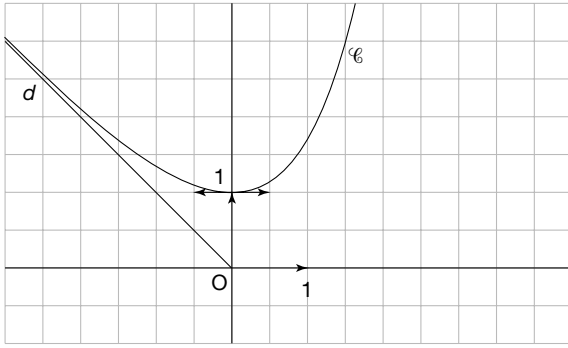
32 Corrigé dans le manuel.

- 33** 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- b) $f(x) + x = e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 donc la droite d est asymptote oblique à \mathcal{C} en $-\infty$.

2. $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$



34 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

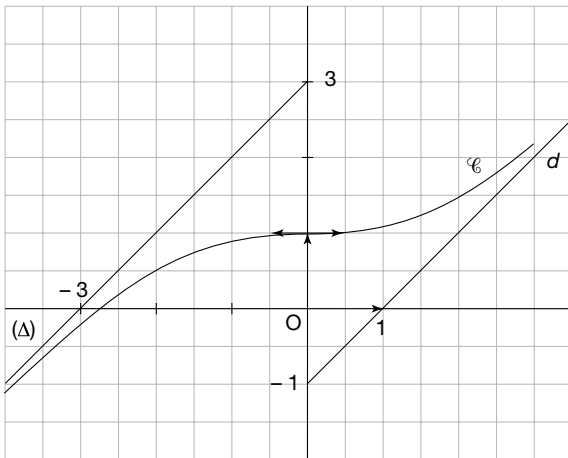
2. a) $f(x) - (x-1) = \frac{4}{e^x + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$
d'où le résultat.

b) $f(x) - (x+3) = \frac{-4e^x}{e^x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4e^x}{e^x - 1} = 0$
d'où le résultat.

3. $f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	→ $+\infty$	



35 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘ -1 ↗		$+\infty$	

3. a) f bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[-1; +\infty[$ donc il existe α unique de $]-\infty; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
De même pour β dans $[0; +\infty[$.

$$f(-1; 9) \approx e^{-1,9} - 0,1 \approx 0,14$$

$$f(-1,8) \approx e^{-1,8} - 0,2 \approx -0,03$$

donc $-1,9 < \alpha < -1,8$.

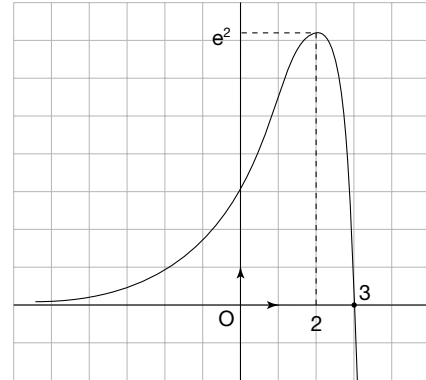
Même chose pour $1,1 < \beta < 1,2$.

b) Il résulte que $f(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; \beta[$.

36 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = (2-x)e^x$$

d'où le tableau avec $f(2) = e^2$.



2. Si $m > 0$ et $m < e^2$ on a deux solutions et $m > e^2$ zéro solution.

4. Des fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$

37 $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} + 1 \right]$.

38 $f'(x) = 2e^{x-1} [x]$.

39 $f'(x) = e^{\sin x} [\cos^2 x - \sin x]$.

40 Corrigé dans le manuel.

41 a) $x + e^{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$.

b) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1 \right) e^{\sqrt{x}}$.

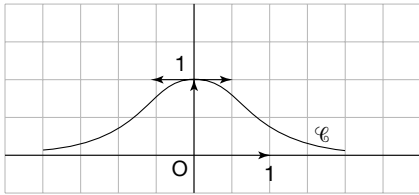
2. $f(0) = 0$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = e^{\sqrt{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1$ donc f est dérivable en $x = 0$.

42 a) $f(-x) = e^{-x^2} = f(x)$ donc f est paire et \mathcal{C} admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

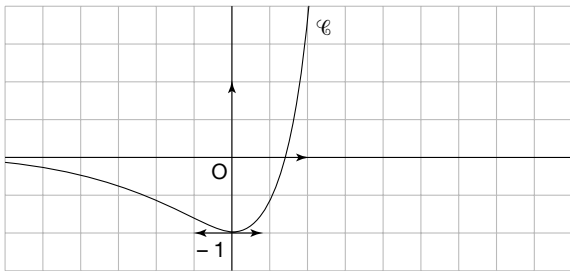
b) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	0



43 $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$



44 1. $f_1(x) - f_2(x) = e^{-x}[1 - \sin x]$.

$\sin x = 1$ sur $[0; \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

donc un seul point commun $A\left(\frac{\pi}{2}; e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

2. $f'(x) = -e^{-x}$ $f'_2(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$

$f'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ donc les deux courbes ont une tangente commune en A.

5. Équations différentielles

45 a) $f(x) = \lambda e^{3x}$. b) $f(x) = \lambda e^{-2x}$.

46 a) $f(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$. b) $f(x) = \lambda e^{\frac{5}{3}x}$.

47 1. $f(x) = \lambda e^{2x}$.

2. $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ donc $f(x) = e^{2x}$.

48 Corrigé dans le manuel.

49 $f'(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ $f'(-2) = \frac{1}{2}$

donc $f(-2) = -1$.

$f(x) = \lambda e^{-\frac{1}{2}x}$ et $-1 = \lambda e$

donc $\lambda = -e^{-1}$ et $f(x) = -e^{-\frac{1}{2}x-1}$.

50 $f(x) = \lambda e^{-2x}$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda e = 1$

d'où $\lambda = e^{-1}$ et $u : x \mapsto e^{-1-2x}$.

51 a) $f(x) = \lambda e^{2x} - \frac{1}{2}$. b) $f(x) = \lambda e^{-\frac{1}{3}x} + 2$.

c) $f(x) = \lambda e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$. d) $f(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x} + 1$.

52 $f(x) = \lambda e^{-3x}$.

1. $f(0) = 1$ d'où $k = 1$ et $f(x) = e^{-3x}$.

2. $f'(0) = 3$ donc $f(0) = -1$ et $\lambda = -1$ donc $f(x) = -e^{-3x}$.

53 Corrigé dans le manuel.

54 $f'(x) = -6e^{-3x}$ donc $f'(x) = -3f(x)$.

55 $f'(x) = -6e^{-2x}$ d'où $f'(x) = -2f(x) - 8$.

6. Applications

56 1. a) $f(x) - x + 2 = e^{-x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc la

droite d est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

b) $f(x) - (x - 2) = e^{-x} > 0$ donc \mathcal{C} est au-dessus de d .

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

$f'(x) \geq 0$ si et seulement si $e^{-x} \leq 1$ ou $-x \leq 0$

donc $x \geq 0$ $f(0) = -1$.

3. f est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[-1; +\infty[$

donc 0 a un antécédent unique α dans $]-\infty; 0]$,

de plus $f(-2) = e^2 - 4 > 0$ et $f(-1) = e - 3 < 0$

donc $-2 < \alpha < -1$.

De même f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$

donc 0 a un antécédent unique β dans $[0; +\infty[$.

$f(1) = -1 + e^{-1} < 0$ $f(2) = e^{-2} > 0$

donc $1 < \beta < 2$.

57 $I'(\lambda) = e^{-\frac{K}{\lambda}} \left[\frac{K}{\lambda^7} - \frac{5}{\lambda^6} \right] = e^{-\frac{K}{\lambda}} \left[\frac{K - 5\lambda}{\lambda^7} \right]$

$I'(\lambda) > 0$ si $\lambda < \frac{K}{5}$ et $I'(\lambda) < 0$ si $\lambda > \frac{K}{5}$

donc $I(\lambda)$ est maximale pour $\lambda_0 = \frac{K}{5}$

et $I(\lambda_0) = \frac{5^5}{K^5} e^{-5} = \left(\frac{5}{Ke} \right)^5$.

58 Corrigé dans le manuel.

59 $y' = -\frac{k}{m}y + g$.

Les solutions dans \mathbb{R} sont $f(\lambda) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}$.

Or $f(0) = 0$ donc $\lambda = -\frac{gm}{k}$ et $v(t) = \frac{gm}{k} \left[1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right]$.

60 1. a) $f(x) - (2x - 2) = (1 - x)e^{-x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^{-x} = 0$ donc la droite Δ est asymptote à \mathcal{C} .

b) $f(x) - (2x - 2) = (1 - x)e^{-x}$ si $x < 1$

$f(x) > 2x - 2$ donc \mathcal{C} est au-dessus de Δ .

2. a) $f'(x) = 2 + e^{-x}[x - 1 - 1] = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

b) Si $x \geq 0$ $e^{-x} < 1$ donc $f'(x) \geq 0$.

c) $f'(0) = 0$.

x	0	0	$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	-1	0	$+\infty$

3. La tangente à \mathcal{C} en A d'abscisse a est parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = 2$.

Soit $ae^{-a} + 2 - 2e^{-a} = 2$

soit $e^{-a}(a - 2) = 0$ donc $a = 2$

et A a pour coordonnées $(2; 2 - e^{-2})$.

Apprendre à chercher (page 105)

61 Tangentes à une courbe issues d'un point

Les outils :

- Étude d'une fonction.
- Équations de droites.

Les objectifs

- Savoir traduire un problème par un problème équivalent.
- Savoir utiliser un tableau de variations.

1. a) $f(x) - (x - 1) = -e^x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $-\infty$.

b) $f'(x) = 1 - e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	-
f(x)	$-\infty$	-2	$-\infty$

Du tableau il résulte que $f(x) \leq -2$.

2. a) $M_0(x_0; f(x_0))$ et $f'(x_0) = 1 - e^{x_0}$ d'où l'équation de T_{x_0} :

$$y - x_0 + 1 + e^{x_0} = (1 - e^{x_0})(x - x_0)$$

d'où $y = (1 - e^{x_0})x - 1 + e^{x_0}(x_0 - 1)$.

b) $O \in T_{x_0} \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} = 1$ (1).

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$.

b) $\varphi'(x) = xe^x$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+
$\varphi(x)$	-1		-2	$+\infty$

4. a) Pour tout $x \leq 0$, $\varphi(x) < 0$. De plus φ est une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-2; +\infty[$ donc 0 a un antécédent unique α .

b) $\varphi(1) = -1$

$\varphi(2) = e^2 - 1 > 0$

donc $\alpha \in]1; 2[$

$\alpha \approx 1,28$.

62 Famille de fonctions et lieu géométrique

Les outils :

- Étude d'une famille de fonctions.
- Définir analytiquement un lieu géométrique.

Les objectifs

- Savoir déterminer un lieu géométrique.

1. $(x + m_1)e^{-x} - (x + m_2)e^{-x} = (m_1 - m_2)e^{-x}$.

Donc si $m_1 \neq m_2$.

$(m_1 - m_2)e^{-x} \neq 0$ donc les courbes \mathcal{C}_{m_1} et \mathcal{C}_{m_2} n'ont pas de point commun.

2. a) $f'_m(x) = e^{-x}(-x - m + 1)$.

b) Pour tout réel m , I_m a pour coordonnées $(1 - m; e^{m-1})$.

3. a) $x = 1 - m$,
 $y = e^{m-1}$ d'où $y = e^{-x}$.

b) Ainsi I_m appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

4. $x = 1 - m$ donc lorsque m décrit \mathbb{R} , x décrit \mathbb{R} . On en déduit alors que I_m décrit toute la courbe (Γ) .

Pour progresser (page 106)

Études de fonctions

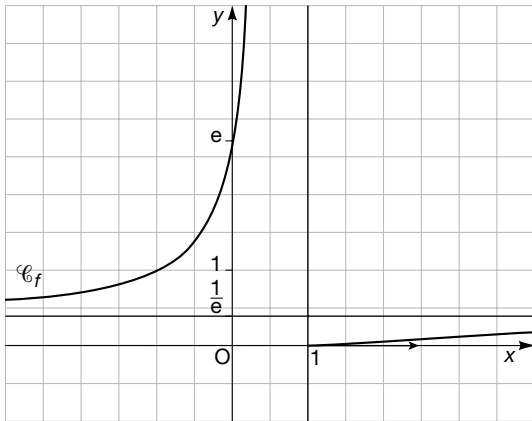
63 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{e}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{e}$;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

• $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} e^{\frac{1+x}{1-x}}$;

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)		+	+
f	$\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0.$

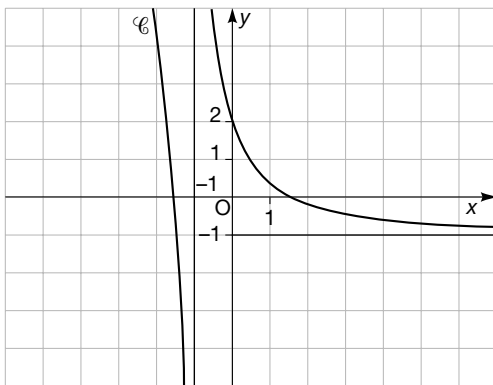


64 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$

2. $f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(1+x)^2} < 0$;

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	-		-
f	$+\infty$	$-\infty$	-1



65 1. $f(0) = -1$ $g(0) = 1.$

La courbe associée à g est celle qui présente un maximum au point de coordonnées (0; 1).

2. a) $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 1 - e^x + xe^x = 1 - (1-x)e^x = 1 - g(x).$

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'(x)	+	0	+
h(x)	$-\infty$	-2	$+\infty$

3. a) $f(x) = g(x)$ si et seulement si $h(x) = 0.$

Or $h(x) = 0$ s'annule pour une seule valeur α de l'intervalle $]0; +\infty[.$ Or $h(1) = 1 - e < 0$ et $h(2) = 2 > 0$ donc $\alpha \in]1; 2[.$

b) $1,5 < \alpha < 1,6.$

66 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ d'où les courbes.

2. $f_0(-x) + f_0(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = 1$ donc $A(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_0.$ On démontre de même que A est centre de symétrie pour $\mathcal{C}_1.$

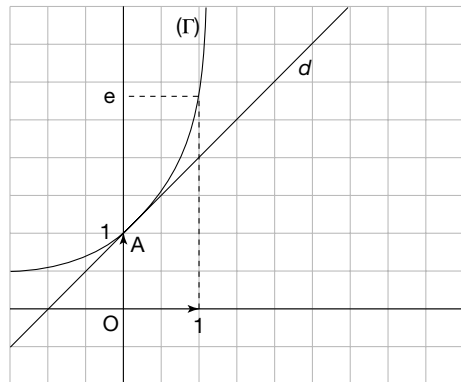
3. $f_0(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} = f_1(x)$

donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie.

4. a) $f_0(x) + f_1(x) = 1.$

b) \mathcal{C}_1 est donc l'image de \mathcal{C}_0 par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}.$

67 1. La tangente en A a pour équation $y = x + 1$ et (Γ) est au-dessus de cette tangente donc pour tout réel $u, e^u \geq u + 1$ (1).



2. a) En posant $u = -x$ d'après (1)

$e^{-x} \geq -x + 1$ soit $e^{-x} + x - 1 \geq 0.$

$e^{-x} > 0$ donc

$1 \geq e^x(1-x)$

soit $1 + (x-1)e^x \geq 0$ (2).

3. $f'(x) = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2}.$ En tenant compte de (2),

$f'(x) \geq 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[.$

68 1. a) $f(x) - (x-1) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - x + 1 = \frac{2}{e^x + 1};$

$f(x) - (x+1) = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 = \frac{-2e^x}{e^x + 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = 0.$

Donc les droites Δ_1 et Δ_2 sont asymptotes à \mathcal{C} respectivement en $-\infty$ et $+\infty.$

d) Au voisinage de $+\infty, \mathcal{C}$ est au-dessus de Δ_2 et au voisinage de $-\infty, \mathcal{C}$ est en dessous de $\Delta_1.$

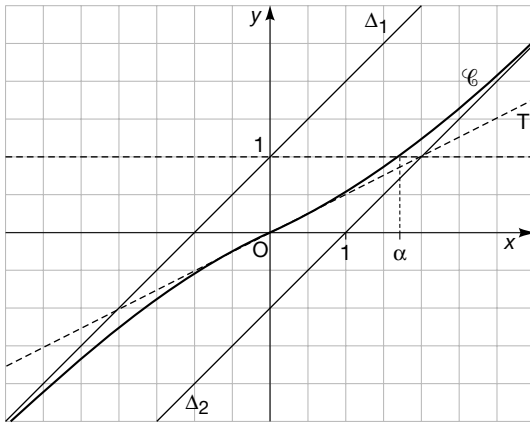
2. a) $f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$
 $= -f(x)$,
 donc f est impaire.

b) $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	+	
f	0	1	$+\infty$

La tangente en $x=0$ a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

3.



4. • f est strictement croissante
 et $f(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$.
 • $1,6 < \alpha < 1,7$.

69 • 1. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. a) $t(x) = \frac{x^2+x+1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$;

$\frac{1}{x} = X$ et $t(X) = (X + X^2 + X^3) \frac{1}{e^X}$;

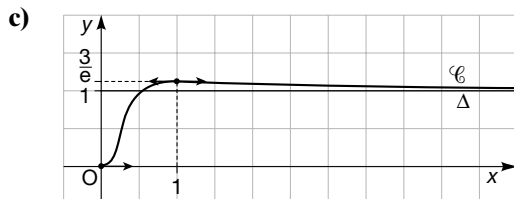
$\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} t(X) = 0$.

b) Donc f est dérivable en 0 et le nombre dérivé en ce point est 0.

3. a) $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right] = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

b)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0
f	0	$\frac{3}{e}$	1

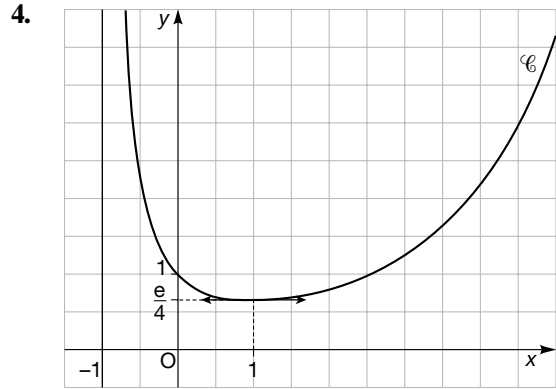


70 • 1. a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - 2e^x(1+x)}{(x+1)^4} = \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3}$.

3.

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$	$\frac{e}{4}$	$+\infty$



71 • 1. a) $g'(x) = e^x - 1$.

Pour tout réel x , $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

b) $e^x - x \neq 0$ donc f est définie sur \mathbb{R} .

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

b) $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

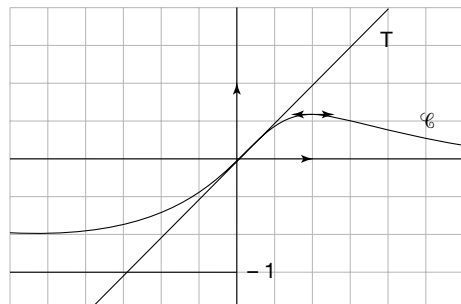
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	-1	$\frac{1}{e-1}$	0

c) T a pour équation $y = x$

$f(x) - x = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$ } Or $g(x) \geq 0$,
 } donc $e^x - x > 0$.

Pour $x \leq 0$, \mathcal{C} est au-dessus de T et pour $x > 0$, \mathcal{C} est en dessous de T.

d) Tracé de T et \mathcal{C} .



72 • A. 1. • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, car si $\frac{1}{x} = X$,

$$f(x) = \frac{e^X}{X} \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty.$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = xe^{\frac{1}{x}} - x - 1 = f(x) - x - 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = 0$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1.$

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right);$

x	0	1	$+\infty$	
f'(x)		-	0	+
f	$+\infty$	e	$+\infty$	

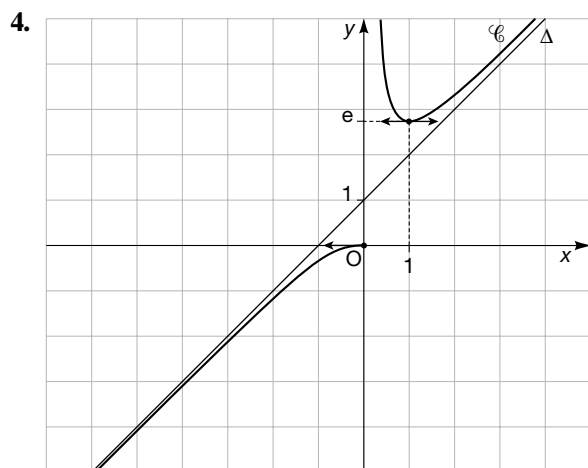
B. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$

3. a) $\frac{g(x) - g(0)}{x} = e^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$

b) Donc g est dérivable en zéro et le nombre dérivé en ce point est zéro.

c)

x	$-\infty$	0
g'(x)		+
g	$-\infty$	0



73 • 1. a) M_0 a pour coordonnées $(x_0; e^{x_0} - x_0)$

et $f'(x_0) = e^{x_0} - 1$. Donc T_{x_0} a pour équation

$$y = (e^{x_0} - 1)x + e^{x_0}(1 - x_0).$$

b) $A \in T_{x_0} \Leftrightarrow 0 = e^{x_0} - 1 + e^{x_0}(1 - x_0)$
soit $e^{x_0}(2 - x_0) = 1$ (1)

2. a) $\varphi'(x) = e^x(1 - x).$

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$\varphi'(x)$		+	0	-
$\varphi(x)$	0	e	$-\infty$	

b) $\varphi(x) = 1$ pour deux valeurs α et β de x avec $-1,2 < \alpha < -1,1$ et $1,8 < \beta < 1,9$.

3. On peut donc mener à \mathcal{C} deux tangentes passant par A.

74 • 1. a) M a pour coordonnées $(m; e^m)$ et N a pour coordonnées $(m; e^{-m})$ donc I a pour coordonnées $\left(m; \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right).$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

c) I est un point de la courbe \mathcal{C} d'équation $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$
Or lorsqu'on décrit \mathbb{R} , $x = m$ décrit \mathbb{R} donc $(\Gamma) = (\mathcal{C}).$

2. a) $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
f'(x)		-	0	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$	

b) Les tangentes T_1 en M à \mathcal{C}_1 et T_2 en N à \mathcal{C}_2 ont respectivement pour équations :

$$y = e^m x + e^m(1 - m) \text{ et } y = -e^{-m} x + e^{-m}(1 + m).$$

Leur point d'intersection P a pour coordonnées

$$\left(m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right).$$

Il en résulte que \vec{IP} a pour coordonnées

$$\left(-\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}; -\frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})}\right).$$

Ce vecteur est colinéaire au vecteur \vec{u} de coordonnées $\left(1; \frac{e^m - e^{-m}}{2}\right).$

Or $f'(m) = \frac{1}{2}(e^m - e^{-m})$ donc (IP) est la tangente en I à $(\Gamma).$

75 • 1. a) M_m a pour coordonnées $(m; e^m)$ et P_m a pour coordonnées $(m; m)$. La tangente en M_m à \mathcal{C} a pour équation $y = e^m(x - m) + e^m$ donc N_m a pour coordonnées $(0; e^m(1 - m)).$

Donc G_m a pour coordonnées

$$\left(\frac{m}{2}; \frac{1}{4}[m + e^m + e^m(1 - m)]\right)$$

soit $\left(\frac{m}{2}; \frac{1}{4}[m + e^m(2 - m)]\right).$ (1)

b) De (1) on tire $m = 2x$

donc $y = \frac{1}{2} [x + e^{2x}(1-x)]$.

2. a) $f'(x) = \frac{1}{2} [1 + e^{2x}(1-2x)]$

$f''(x) = -2xe^{2x}$.

b)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$-\infty$

c) $f'(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$

$f'(1) = \frac{1-e^2}{2} < 0$ donc $\alpha \in]0; 1[$.

À la calculatrice on trouve $\alpha \approx 0,65$.

3.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

76 1. a) $f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$.

b) $f_n(0) = -2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

x	$-\infty$	0
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	-2	1

2. a) $f_n(n) = -e^{-n} < 0$.

b) Si $n = 1$, $e^{n+1} = e^2 > 3$ donc vraie.

Si $e^{n+1} > 2n + 1$, $e^{n+2} > e(2n + 1) > 2n + 3$.

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$.

c) $f_n(n+1) = 1 - \frac{2n}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}$.

Or $e^{n+1} > 2n + 1$ donc $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{e^{n+1}}$ et $f_n(n+1) < 0$.

3. $f_n(n) \times f_n(n+1) < 0$ d'où l'existence d'une solution unique un telle que $n < u_n < n + 1$.

77 1. a) $f(1)(x) = e^x(x^2 + 3x + 2)$.

b) Pour $n = 1$, $f^{(1)}(x)$ est de la forme $e^x(x^2 + a_n x + b_n)$ avec $a_1 = 3$ et $b_1 = 2$.

Si $f^{(n)}(x) = e^x(x^2 + a_n x + b_n)$

alors $f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n)$

d'où $f^{(n+1)}(x) = e^x(x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1})$

avec $a_{n+1} = a_n + 2$ (1) et $b_{n+1} = a_n + b_n$ (2)

avec $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ ainsi que b_{n+1} .

2. a) (a_n) est une suite arithmétique de premier terme $a_1 = 3$ et de raison 2.

Donc $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.

$$b) \begin{cases} b_n - b_{n-1} = a_{n-1} \\ b_{n-1} - b_{n-2} = a_{n-2} \\ \vdots \\ b_2 - b_1 = a_1 \end{cases}$$

d'où $b_n = 2 + \sum_1^{n-1} a_i$.

Or $a_1 + \dots + a_{n-1} = \frac{n-1}{2} [3 + 2n - 1] = n^2 - 1$

donc $b_n = n^2 + 1$.

3. a) Si d divise a_n et b_n , d divise $\alpha(2n + 1) + \beta(n^2 + 1)$.

En prenant $\alpha = n$ et $\beta = -2$, d divise $(n - 2)$. Il divise ainsi : $(2n + 1) - 2(n - 2) = 5$.

$d = 5$ si et seulement si $2n + 1 \equiv [5]$

soit $2n \equiv 4 [5]$ soit $u \equiv 2 [5]$.

b) Pour les autres valeurs de n , a_n et b_n sont premiers entre eux.

78 1. a) $f_1^{(1)}(x) = 2x(x + 1) = f_1 + f_0$.

Si $f_1^{(n)}(x) = n f_0(x) + f_1(x)$

alors $f_1^{(n+1)}(x) = n f_0'(x) + f_1'(x)$

$= n f_0(x) + f_0(x) + f_1(x)$

$= (n + 1) f_0(x) + f_1(x)$

d'où $f_1^{(n+1)} = (n + 1) f_0 + f_1$.

Donc la proposition est vraie pour tout $n \geq 1$.

b) La démonstration est analogue à la précédente.

2. $f = 2f_2 - 3f_1$

donc $f^{(n)} = 2[n(n-1)f_0 + 2n f_1 + f_2] - 3[n f_0 + f_1]$

soit $f^{(n)} = n(2n-5)f_0 + (4n-3)f_1 + 2f_2$.

D'où $f_{(n)}^{(x)} = e^x[2x^2 + (4n-3)x + 4(2n-5)]$.

Équations différentielles

79 1. $f(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. a) $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$; si f est solution de (E'), alors, pour tout réel x ,

$4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = x^2 + 1$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + x(4a + 3b) + 2b + 3c = x^2 + 1$;

$a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{4}{9}$; $c = \frac{17}{27}$.

b) g est solution de (E') ainsi que f , donc :

$2g' + 3g = x^2 + 1 = 2f' + 3f$,

d'où $2(g' - f') + 3(g - f) = 0 \Leftrightarrow 2(g - f)' + 3(g - f) = 0$.

Ainsi $(g - f)$ est solution de (E).

Réciproquement, si $(g - f)$ est solution de (E) :

$2g' + 3g = 2f' + 3f = x^2 + 1$,

donc g est solution de (E').

c) Les solutions (E') sont les fonctions :

$x \mapsto k e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. On cherche pour (E'') une solution de la forme $a \cos x + b \sin x$. Donc, pour tout réel x :

$-2a \sin x + 2b \cos x + 3a \cos x + 3b \sin x = \cos x$,

d'où $2b + 3a = 1$ et $3b - 2a = 0$.

Il résulte que $b = \frac{2}{13}$ et $a = \frac{3}{13}$ et les solutions de (E'')

sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{3}{13}x} + \frac{3}{13} \cos x + \frac{2}{13} \sin x$, $k \in \mathbb{R}$.

80 • 1. $g'(x) = -ae^{-x}$, d'où $(-a + 3a)e^{-x} = 2e^{-x}$ et $a = 1$; $g(x) = e^{-x}$.

Pour les questions 2. et 3., le raisonnement est le même que pour l'exercice 79. Les solutions de (E) sont données par $x \mapsto ke^{-3x} + e^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

81 • Comme pour l'exercice 80, on trouve :

$$g(x) = -4 \cos 2x + \sin 2x,$$

et les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x} - 4 \cos 2x + \sin 2x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

82 • 1. a) $y = z + x$, $y' = z' + 1$, d'où :

$$y + y' = z + z' + x + 1, \text{ donc } z + z' = 0.$$

b) $z = ke^{-x}$ et $y = ke^{-x} + x$, $k \in \mathbb{R}$.

2. $f_\alpha(0) = \alpha$, d'où $k = \alpha$ et $f_\alpha(x) = \alpha e^{-x} + x$.

a) $f'_\alpha(x) = -\alpha e^{-x} + 1$;

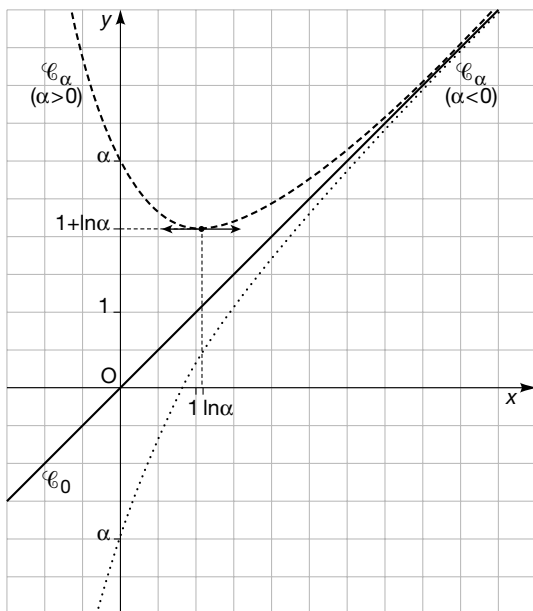
• $f_0 : x \mapsto x$;

• $\alpha < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+	
f_α	$-\infty$	α	$+\infty$

• $\alpha > 0$:

x	$-\infty$	$\ln \alpha$	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		-	+
f_α	$+\infty$	$1 + \ln \alpha$	$+\infty$



b) Le point d'abscisse -1 a pour ordonnée αe^{-1} et $f'(-1) = -\alpha e^{-1} + 1$, donc la tangente au point d'abscisse -1 a pour équation :

$y - \alpha e^{-1} = (-\alpha e^{-1} + 1)(x + 1)$ ou $y = (1 - \alpha e^{-1})x$, donc elle passe par l'origine.

c) Au point $(x_0; \alpha e^{-x_0} + x_0)$, $f'_\alpha(x_0) = -\alpha e^{-x_0} + 1$. La tangente en ce point a pour équation :

$$y - \alpha e^{-x_0} - x_0 = (-\alpha e^{-x_0} + 1)(x - x_0),$$

ou encore $y = (1 - \alpha e^{-x_0})x + \alpha e^{-x_0}(1 + x_0)$ [1].

L'intersection de cette tangente et de \mathcal{C}_0 , d'équation

$y = x$, est donnée par $\alpha e^{-x_0}(1 + x_0 - x) = 0$ et $x = 1 + x_0$.

Donc, pour x_0 donné, les tangentes en x_0 à \mathcal{C}_α passent par le point de coordonnées $(1 + x_0; 1 + x_0)$.

83 • 1. a) S'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors

$$f(x_0) f'(x_0) = 0.$$

Ce qui est impossible donc pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) \neq 0$.

b) $g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x) = 0$.

c) $g(x) = k$ avec $g(0) = [f(0)]^2 = 16$, donc $g(x) = 16$ pour tout réel x .

d) D'après la question précédente :

$$f(-x) = \frac{16}{f(x)} \text{ d'où } f'(x) = \frac{f(x)}{16}$$

et f est solution de (E) avec $f(0) = -4$.

2. $\varphi(x) = \lambda e^{\frac{1}{16}x}$, $\varphi(0) = \lambda = -4$ donc $\varphi(x) = -4e^{\frac{1}{16}x}$.

Cette fonction est la seule fonction vérifiant les conditions (\mathcal{C}).

84 • 1. $g'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$; or, $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} + \frac{2}{f(x)} = 1$, donc :

$$2g - g' = 1 \text{ [1].}$$

2. On détermine g suivant le principe des exercices 79 et 80 :

$$g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}, \text{ d'où } f(x) = \frac{2}{2ke^{2x} + 1}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

L'exponentielle dans les autres sciences

85 1. a) $I(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

b) $I(0) = 0$ donc $K = -\frac{E}{R}$ et $I(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$.

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{E}{R}$.

86 1. a) $g(t) = Ke^{\frac{1}{4}t}$.

b) $g(0) = K = 1$ d'où $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c) $g(t) \geq 3$ équivaut à $e^{\frac{1}{4}t} > 3$ soit $t = 5$ années.

2. a) $h' = \frac{-u'}{u}$ et $u = \frac{1}{h}$ donc $u' = \frac{-h'}{h^2}$.

u satisfait aux conditions (E₂) si et seulement si :

$$h(0) = 1 \text{ et } \frac{-h'(t)}{h^2(t)} = \frac{1}{4h(t)} - \frac{1}{12h^2(t)}$$

soit $h(0) = 0, h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$.

b) $h(t) = Ke^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$.

$h(0) = 1$ d'où $K = \frac{2}{3}$ et $h(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$

donc $u(t) = \frac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t} + 1}$.

c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$.

87 1. a) f est paire, donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie de sa courbe représentative.

b) $f'(x) = \frac{1}{41} \left(e^{\frac{x}{41}} - e^{-\frac{x}{41}} \right) > 0$ pour $x > 0$.

x	0	180
f	2	≈ 80,67

2. AB a pour hauteur approximativement 80,67 m.

88 A. 1. a) $f'(x) = 10 \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}$.

En posant $g(x) = e^x + 1 - xe^x$

$$f'(x) = 10 \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

b) $g'(x) = -xe^x$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			2	$-\infty$

Il existe a unique de $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ avec $1,2 < \alpha < 1,3$.

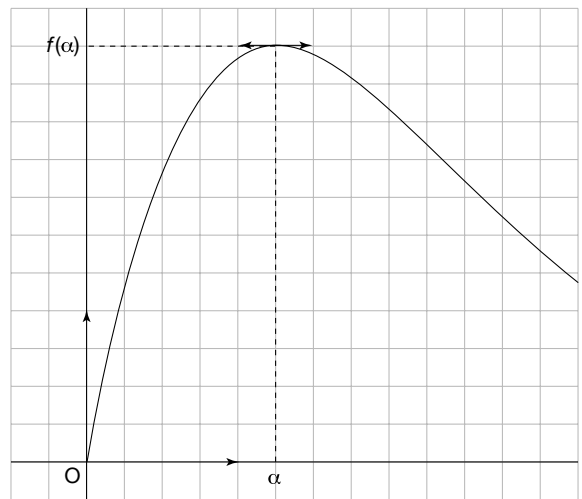
c)

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0		$f(\alpha)$	0

$g(\alpha) = 0$ donc $e^\alpha(1 - \alpha) = -1$

donc $f(\alpha) = \frac{10\alpha}{1 - \frac{1}{1-\alpha}} = \frac{10\alpha(1-\alpha)}{-\alpha} = 10(\alpha-1)$.

2.



Prendre toutes les initiatives

89 $n \in \mathcal{D} \Leftrightarrow e^x \equiv x - 2 \neq 0$.

Notons φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = e^x - x - 2$. $\varphi'(x) = e^x - 1$ et

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	
$\varphi(x)$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$

Il existe deux réels α et β et deux seulement tels que $\varphi(x) = 0$ avec $-1,9 < \alpha < -1,8$ et $1,1 < \beta < 1,2$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\alpha; \beta\}$ et $f(x) < 0$ pour tout x de $]\alpha; \beta[$.

90 $f'(x) = e^x(2 - x)$.

Existe-t-il x tel que $e^x(2 - x) = 2$.

Notons φ la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$\varphi(x) = e^x(2 - x)$ $\varphi'(x) = e^x(1 - x)$.

x	$-\infty$	0	1	β	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	
$\varphi(x)$	0		2	e	$-\infty$

Il existe donc deux valeurs de x pour lesquelles $\varphi(x) = 2$ soit $\alpha = 0$ et $\beta \in]1,6; 1,7[$. Ainsi il existe deux tangentes à la courbe \mathcal{C} de coefficient directeur 2.

91 $f'(x) = (2x + 3)e^{2x}$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0		$-\frac{1}{2e^3}$	$+\infty$

Or $-\frac{1}{2e^3} > -\frac{1}{16}$ donc l'équation $f(x) = -\frac{1}{16}$ n'a pas de solution.

92 • La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1 donc

$$u_n = 1 + n \text{ donc } v_n = e^{-1}e^{-n} \text{ avec } v_0 = e^{-1}.$$

$$v_0 + \dots + v_n = \frac{e^{-1}(1 - e^{-n-1})}{1 - e^{-1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^{n+1} = 0 \text{ donc } \lim (v_0 + \dots + v_n) = \frac{1}{e-1}.$$

93 • 1. $v'_1(x) = u'(x) e^{u(x)}$.

Or pour tout $x \in]-\infty; a[$, $u'(x) < 0$

donc v_1 est décroissante sur cet intervalle.

2. $v'_2(x) = (u'(x) + u(x))e^x$.

Pour $x > b$, $u'(x) > 0$ et $u(x) > 0$.

Donc v_2 est croissante sur $]b; +\infty[$.

94 • $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}$ si $x < 0$.

Il en résulte que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ et

pour tout $x < 0$, $f'(x) = \frac{-2 - e^{-x}}{(e^x + 1)^2}$ donc $f'(0)$ à droite

vaut $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$ à gauche donc f n'est pas dérivable en $x = 0$.

95 • On doit avoir $f(1) = e = a + b$.

D'autre part :

si $x \leq 1$, $f'(x) = (x + 1)e^x$

et si $x > 1$, $f'(x) = a$.

Il faut donc que $f'(1) = 2e = a$

soit $a = 2e$ et $b = -e$

donc si $x \leq 1$, $f(x) = e(2x + 1)$.

Dans ce cas f est dérivable sur \mathbb{R} .

96 • La tangente en M a pour équation

$$y = ae^{ax_0}(x - x_0) + e^{ax_0}.$$

Donc T a pour coordonnée $(x_0 - \frac{1}{a}; 0)$ et M a pour coordonnées $(x_0; 0)$ donc \overline{TH} a pour coordonnées

$(\frac{1}{a}; 0)$. Ainsi $TH = \frac{1}{|a|}$ ne dépend pas de la position de M sur \mathcal{C} .

Problèmes

(page 112)

97 A. 1. a) d a pour équation $y = x + 1$

donc $m = p = 1$ et $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$.

b) Le point A(0; 1) est centre de symétrie donc

$$f(x) + f(-x) = 2. \quad (1)$$

c) De (1) il vient :

$$x + 1 + \varphi(x) + 1 - x + \varphi(-x) = 2$$

donc $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ et la fonction φ est impaire.

2. $\varphi(-x) = (-ax + b)e^{-x^2}$.

Pour tout réel x on a :

$$(ax + b + ax + b)e^{-x^2} = 0 \text{ donc } b = 0.$$

De plus $f'(x) = 1 + \varphi'(x)$ or $f'(0) = (1 - e)$.

Donc $\varphi'(0) = -e$.

De plus $\varphi'(x) = a(1 - 2x^2)e^{-x^2}$ soit $a = -e$.

B. 1. a) $f'(x) = 1 - (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$

$f'(0) = 1 - e$ et $f(0) = 1$

donc la tangente en $x = 0$ a pour équation

$$y = (1 - 2)x + 1.$$

b) $f(x) - (1 - 2)x - 1 = 1 + x - xe^{1-x^2} - x + ex - 1$

$f(x) - (1 - 2)x - 1 = ex[1 - e^{-x^2}]$.

$1 - e^{-x^2} > 0$ pour tout réel x donc si $x < 0$, \mathcal{C} est en dessous de T et si $x > 0$, \mathcal{C} est au-dessus de T.

2. a) $f''(x) = 2x(3 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

Sur \mathbb{R} , $f''(x)$ est donc du signe de $2x(3 - 2x^2)$.

Le tableau de variation sur $[0; 1]$ est :

x	0	α	0
$f''(x)$		+	2
$f'(x)$	$1 - e$	0	2

b) Sur $[0; 1]$, $f'(0)f'(1) < 0$, il existe donc α unique tel que $f'(\alpha) = 0$ (car f' est strictement croissante sur $[0; 1]$. $f'(0,51) \approx -0,005$, $f'(0,52) > 0$ d'où $0,51 < \alpha < 0,52$).

c) $1 - (1 - 2\alpha^2)e^{1-\alpha^2} = 0$.

Donc $f(\alpha) = 1 + \alpha - \alpha e^{1-\alpha^2} = 1 + \alpha - \frac{\alpha}{1 - 2\alpha^2}$

soit $f(\alpha) = 1 - \frac{2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2}$.

D'où ce minimum relatif a pour coordonnées

$$\left(\alpha; \frac{1 - 2\alpha^2 - 2\alpha^3}{1 - 2\alpha^2} \right).$$

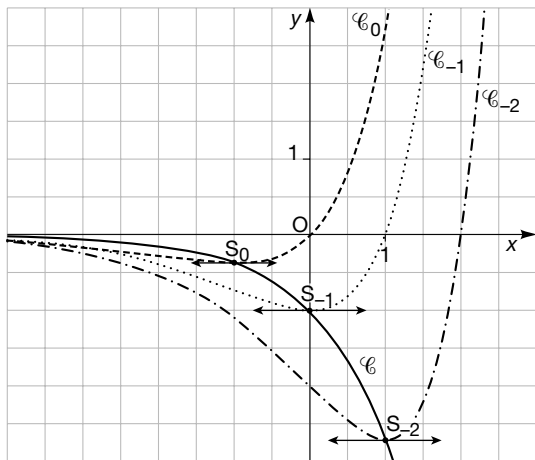
98 • Partie A. 1. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$; $f'_m(x) = (x + m + 1)e^x$;

x	$-\infty$	$-(m+1)$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
f_m	0	$-e^{-(m+1)}$	$+\infty$

2. a) S_m a pour coordonnées $(-m-1; -e^{-(m+1)})$.
 b) S_m appartient à la courbe d'équation $y = -e^x$. De plus m décrit \mathbb{R} , donc x décrit \mathbb{R} . Il en résulte que le lieu \mathcal{C} de S_m est la courbe d'équation $y = -e^x$.

3.



4. $M(a; b)$ appartient à \mathcal{C}_m équivaut à $be^{-a} = a + m$, donc $m = be^{-a} - a$. Par M , il passe une courbe \mathcal{C}_m et une seule.

Partie B. 1. M_m a pour coordonnées $(x_0; (x_0 + m)e^{x_0})$ et $f'_m(x_0) = (x_0 + m + 1)e^{x_0}$. Donc T_m a pour équation : $y = (x_0 + m + 1)e^{x_0}(x - x_0) + (x_0 + m)e^{x_0}$, ou encore $y = e^{x_0}[(x_0 + 1)x - x_0^2 + m(x - x_0 + 1)]$.

2. D'après l'équation précédente, T_m passe par A de coordonnées $(x_0 - 1; -e^{x_0})$.

Partie C. 1. $M_\alpha(x; (x + \alpha)e^x)$, $M_\beta(x; (x + \beta)e^x)$, $M_\gamma(x; (x + \gamma)e^x)$.

Donc $\overrightarrow{M_\beta M_\alpha}$ a pour coordonnées $(0; (\alpha - \beta)e^x)$ et $\overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}$ $(0; (\alpha - \gamma)e^x)$. Donc $\overrightarrow{M_\beta M_\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} \overrightarrow{M_\gamma M_\alpha}$.

2. a) N est le barycentre de $(M_\beta, 1)$ et $(M_\gamma, -k)$; donc N a pour coordonnées $(x; (x + \frac{\beta - k\gamma}{1 - k})e^x)$.

Ainsi N décrit une courbe \mathcal{C}_α avec $\alpha = \frac{\beta - k\gamma}{1 - k}$.

b) Pour $k = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -2$; il vient $\alpha = \frac{2}{2} = 1$. Donc E_{-1} est \mathcal{C}_1 .

99 • **A. 1. a)** $M(x_0; y_0)$ appartient à \mathcal{C}_m équivaut à :

$$y_0 + 4x_0^2 = me^{2x_0},$$

donc $m = e^{-2x_0}(y_0 + 4x_0^2)$. Ainsi par $M(x_0; y_0)$ donné passe une courbe \mathcal{C}_m et une seule.

b) $y = me^{2a} - 4a^2$, donc $m \mapsto me^{2a} - 4a^2$ est une fonction croissante de m .

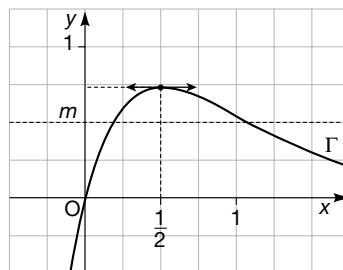
2. a) $f'_m(x) = 2me^{2x} - 8x = 2e^{2x}(m - 4xe^{-2x})$.

b) Il résulte de l'écriture précédente que $f'_m(x)$ a le même signe que $m - 4xe^{-2x}$.

3. a) • $\gamma'(x) = -8xe^{-2x} + 4e^{-2x} = 4e^{-2x}(1 - 2x)$;

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = -\infty$;

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\gamma'(x)$		$+$	0	$-$
γ	$-\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0



b) $f'_m(x)$ a le même signe que $m - \gamma(x)$, donc :

• si $m > \frac{2}{e}$: pour tout réel x , $f'_m(x) > 0$;

• si $m = \frac{2}{e}$: $f'_m(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$,

et $f'_m\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

• si $0 < m < \frac{2}{e}$: $f'_m(x)$ s'annule pour deux valeurs α

et β et $f'_m(x) > 0$ pour $x < \alpha$ ou $x > \beta$;

• si $m = 0$: $f'_m(x) > 0$ pour $x < 0$, et $f'_m(0) = 0$;

• si $m < 0$: $f'_m(x)$ s'annule pour une valeur $\alpha < 0$ et $f'_m(x) > 0$ pour $x < \alpha$.

4. • $m < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$	
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$
f_m	$-\infty$	$f_m(\alpha)$	$-\infty$	

• $m = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$
f_m	$-\infty$	0	$-\infty$	

• $0 < m < \frac{2}{e}$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$		
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f_m	$-\infty$	$f_m(\alpha)$	$f_m(\beta)$	$+\infty$		

• $m = \frac{2}{e}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'_m(x)$		$+$	0	$+$
f_m	$-\infty$	1	$+\infty$	

• $m > \frac{2}{e}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		+	
f_m	$-\infty$	→	
			$+\infty$

B. 1. a) $f'_m(X) = 0$ donc $4Xe^{-2X} = m$
 et $Y = me^{2X} - 4X^2$.

b) Il en résulte que S_m appartient à la courbe d'équation : $Y = 4Xe^{-2X} e^{2X} - 4X^2$ ou $Y = 4X - 4X^2$ (équation d'une parabole \mathcal{P}).

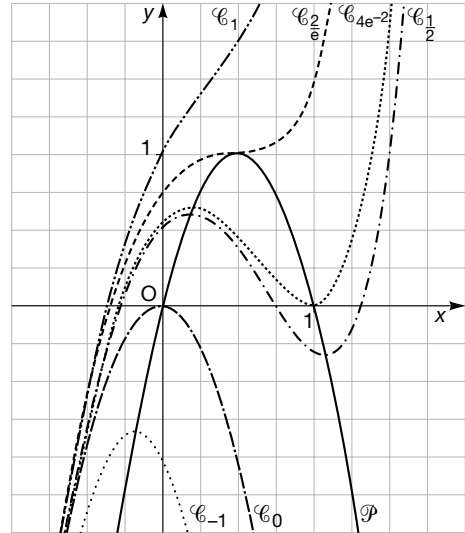
2. Pour tout réel X , $m \leq \frac{2}{e}$, donc $(\frac{1}{2}; 1)$ n'est pas un point S_m .

3. a) $K_m(0; m)$ et $f'_m(0) = 2m$, donc la tangente T_m en K_m a pour équation $y - m = 2mx$ ou encore $y = m(2x + 1)$.

Donc pour tout réel m , T_m passe par le point $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

b) • Voir figure ci-contre.

• $A(1; 0)$ appartient à \mathcal{C}_m équivaut à $4 = me^2$, donc $m = 4e^{-2}$ et $f_{4e^{-2}}(x) = 4e^{2(x-1)} - 4x^2$.



C'est nouveau au bac (page 114)

100 1. a) Vrai, en effet $f_1(x) - f_2(x) = xe^{-x}(1-x)$ et pour tout réel $x \in [0; 1]$ $1-x \geq 0$.

Donc $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$.

b) Faux. En effet $f_1(x) = f_2(x)$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$. Donc il n'y a pas de troisième point commun.

2. a) Vrai car $f'_1(x) = (1-x)e^{-x}$ et $f'_1(x) + f_1(x) = e^{-x}$.

b) Vrai.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

Pour tout réel x , $f_1(x) \leq \frac{1}{e}$ donc $f_1(x) \leq \frac{1}{2}$.

c) Vrai car $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{e}$ d'où deux solutions distinctes.

3. a) Vrai. La tangente en M à \mathcal{C}_1 a pour équation $y = (1-m)e^{-m}(x-m) + me^{-m}$.

Elle coupe l'axe des ordonnées en N de coordonnées $(0; m^2e^{-m})$. Or P a pour coordonnées $(m; m^2e^{-m})$ donc N et P ont la même ordonnée.

b) Vrai. En effet : La tangente en un point quelconque passe par $H(0; h)$ si et seulement si $m^2e^{-m} = h$ donc si l'équation $f_2(m) = h$ a des solutions.

Le tableau de variation de f_2 est :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'_2(x)$		-	0	+
$f_2(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e^2}$	0

Donc si $h \in]0; \frac{4}{e^2}[$, il existe trois réels pour lesquels

$f_2(x) = h$ d'où trois tangentes à \mathcal{C}_1 .

101 1. Vrai. En effet en posant $\varphi(x) = e^x - ax - b$ $\varphi'(x) = e^x - a > 0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Il existe donc α unique tel que $\varphi(\alpha) = 0$ donc $e^\alpha = a\alpha + b$ a une solution unique.

2. Vrai. En effet $f'(x) = [u(x) + u'(x)]e^x$. Or $u(x) \geq 0$ et $u'(x) \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ et f est strictement croissante.

3. Faux. En effet, $\frac{\sqrt{x}e^{1-x}}{x} = \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

4. Faux. En effet $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

5. Faux. En effet l'équation $y' + y = 0$ a pour solution $\varphi(x) = ke^{-x}$ si $\varphi(0) = 2$ alors $k = 2$ et $\varphi(x) = 2e^{-x}$.

102 2. $f(x) = ce^{ax} + 20$.

$f(0) = 70$ et $f(5) = 60$ donc $70 = c + 20$
 $60 = ce^{5a} + 20$.

Il résulte que $c = 50$ et $e^{5a} = \frac{4}{5}$.

3. $f(30) = 50e^{30a} + 20 = 50(e^{5a})^6 + 20$

soit $f(30) = 50\left(\frac{4}{5}\right)^6 + 20 \approx 33^011$.