chapitre 3

Dérivation

Travaux dirigés (page 65)

TD 1

2 $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = f(x_0) + \dfrac{h}{1 + x_0^{\,2}}$

donc $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{1 + x_n^{\,2}}$ car $y_{n+1} = f(x_n + h)$.

TD 2

2 **1.** $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3+1)^2}$; donc $f'(x)$ a le même signe que $2x^3 - 3x^2 - 1$.

2. a) $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

D'où le tableau de variations :

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

b) On a besoin de la limite en $+\infty$ de $g(x)$; elle vaut $+\infty$.

• Sur $]-1\,;1]$, $g(x)$ est inférieur à -1 , donc $g(x)$ ne s'annule pas.

• Sur $[1\,;+\infty[$, $g(x)$ prend des valeurs sur $[-2\,;+\infty[$, elle est strictement monotone. Donc, puisque 0 est dans $[-2\,;+\infty[$, il existe un réel unique α de $[1\,;+\infty[$ tel que $g(x) = 0$. $g(1{,}6) < 0$ et $g(1{,}7) > 0$ donc $\alpha \in [1{,}6\,;1{,}7]$.

c) Si $x \in\,]-1\,;\alpha[$, alors $g(x) < 0$;
si $x \in\,]\alpha\,;+\infty[$, alors $g(x) > 0$.

3. • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} 1 - x = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} 1 + x^3 = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

4. Une équation de la tangente Δ en A d'abscisse 0 :
$y - f(0) = f'(0)(x)$ soit $y = -x + 1$.

Il s'agit d'étudier le signe de :

$$f(x) - y = \frac{1-x}{x^3+1} - (-x+1) = \frac{(1-x)(-x^3)}{x^3+1} .$$

D'où le tableau de signes :

x	-1		0		1	
$1 - x$	‖	$+$		$+$	0	$-$
$-x^3$	‖	$+$	0	$-$		$-$
$f(x) - y$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

• Si $x \in\,]-1\,;0] \cup [1\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ ;
• Si $x \in [0\,;1]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ .

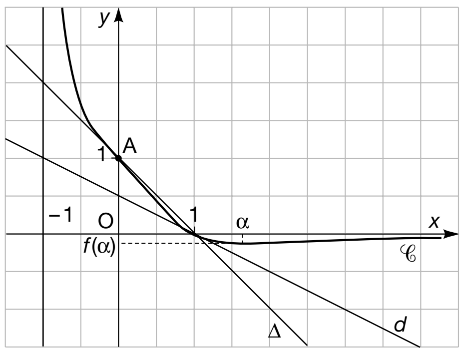
5. Équation de la tangente d au point d'abscisse 1 :

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} ;$$

$$f(x) - y = \frac{1-x}{x^3+1} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{(1-x)(2-x^3-1)}{2(x^3+1)}$$

$$= \frac{(1-x)(1-x^3)}{2(x^3+1)} = \frac{(1-x)^2(1+x+x^2)}{2(x^3+1)} ;$$

donc $f(x) - y \geqslant 0$ et $\mathscr{C}$ est au-dessus de d .



TD 3

2 **1. a)** $m = \dfrac{y_M}{x_M} = \tan x$.

b) $T(1\,;\tan x)$.

2. • $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

• $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.

3. a) sin et cos sont dérivables sur $\mathscr{D}$ et cos ne s'annule pas, donc $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ aussi. De plus, pour tout x de $\mathscr{D}$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \sin x = 1^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$.

c) Sin $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2}$ donc $\tan' > 0$ ainsi **tan est strictement croissante sur** $\left[\mathbf{0} ; \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[$.

4. • D'après le **3. a)** $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ pour tout x de $\mathscr{D}$, et $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

• D'après le **2.** $\tan(-x) = -\tan x$ pour tout x de $\mathscr{D}$ donc **tan est impaire**, et $\tan(x + \pi) = \tan x$ pour tout x de $\mathscr{D}$ donc **tan est π-périodique**.

• D'après le **3. b)** $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$

donc par π-périodique et imparité, les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \pi$ sont asymptotes verticales à la courbe.

TD 4

2 **1. a)** Les solutions de $x(2 - x) \geqslant 0$ sont dans l'intervalle $[0 ; 2]$.

b) La fonction $x \mapsto x(2 - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x(2 - x)$ est strictement positif sur $]0 ; 2[$, donc $x \mapsto \sqrt{x(2-x)}$ est dérivable sur $]0 ; 2[$.

$x \mapsto x$ est aussi dérivable sur $]0 ; 2[$, donc f est dérivable sur $]0 ; 2[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0 ; 2[$. Et alors :

$$f'(x) = \sqrt{x(2-x)} + x \times \frac{2 - 2x}{2\sqrt{x(2-x)}} = \frac{3x - 2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

2. a) $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{x(2-x)}$; $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x(2-x)} = 0$.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a pour limite 0 en 0 donc f est dérivable en 0. La tangente à la courbe est horizontale.

3. a) $\dfrac{f(x)}{x-2} = \dfrac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2} = \dfrac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{2-x}}$ (car $x \in \,]0 ; 2[$)

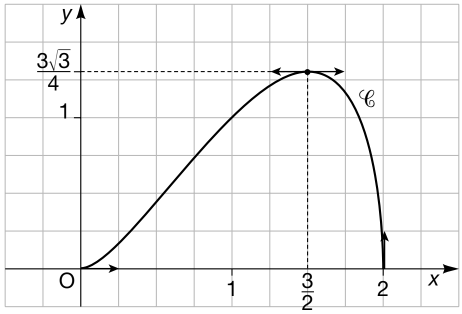
; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = -\infty$. La tangente est donc verticale.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ a pour limite $-\infty$ en 2, donc f n'est pas dérivable en 2.

4. a)

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	+	0	−	‖
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

b) En 0 : $y = 0$; en 2 : $x = 2$.



TD 5

2 **1.** $f(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ et g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 10$ car $g'(x) = 10(1 + x)^9$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = g'(0) = 10$

2. a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \cos'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Or $\cos' = -\sin$ et $-\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$.

3. a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \tan'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\dfrac{\pi}{4} = 2$.

b) $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \cos'(\pi) = -\sin\pi = 0$.

TD 6

2 **1.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x+1} = -1 ;$$

$y = -x + 2$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x+2}{-x+1}-2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{-x+1}=3$;

$y=3x+2$.

TD 7

1 **1.** $\tan\alpha(x)=\dfrac{295}{x}$; $\tan\beta(x)=\dfrac{145}{x}$.

$\tan\theta(x)=\dfrac{\tan\alpha(x)-\tan\beta(x)}{1+\tan\alpha(x)\tan\beta(x)}$.

2.

x	0		$\sqrt{295\times 145}$		$+\infty$
θ'		+	0	−	
θ	0	↗	M	↘	0

$M=\theta(\sqrt{295\times 145})$,

$M\approx 0{,}35$ radian $\left(\tan M=\dfrac{3\sqrt{295\times 145}}{29\times 59}\approx 0{,}36\right)$.

2 **2.** $t'(x)=\dfrac{5x-3\sqrt{x^2+4}}{15\sqrt{x^2+4}}$.

La fonction t présente un minimum au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$. Le rameur parcourt $6-\dfrac{3}{2}=4{,}5$ km à pied.

TD 8

2. a) D'après Thalès, $\dfrac{h(t)}{4}=\dfrac{r}{2}$ donc $r=\dfrac{h(t)}{2}$.

Ainsi $V(t)=\dfrac{1}{3}\pi r^2\times h(t)=\dfrac{1}{12}\pi h^3(t)$ **[1]**

b) En dérivant **[1]** par rapport à t, on obtient :

$V'(t)=\dfrac{1}{12}\pi\times 3h'(t)\times h^2(t)$ donc $h'(t)=\dfrac{4V'(t)}{\pi h^2(t)}$.

c) $h'(t_0)=\dfrac{4V'(t_0)}{\pi h^2(t_0)}=\dfrac{4\times 40}{\pi\times 1}=\dfrac{160}{\pi}$

donc $h'(t_0)=50{,}9$ m/min.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 72)

1. et 2. Calculs de dérivées, tangentes (révisions)

1 **a)** $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{(1+h)^2+3}-2}{h}$

$=\dfrac{(\sqrt{h^2+2h+4}-2)(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$

$=\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$.

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\dfrac{1}{2}$.

2 $y=f'(2)\,(x-2)+f(2)$ donc $y=x+1$ car $f'(2)=1$ et $f(2)=3$.

3 **1.** $f(0)=2$; $f'(0)=-1$.
2. Coefficient directeur de la sécante (AM) où $M(x\,;f(x))$.
3. Puisque f est dérivable en $x=0$ et $f'(0)=-1$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=-1$.

4 $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y=-x+2$.

5 *Corrigé dans le manuel.*

6 $f(x)=\sqrt{x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

7 • $f(0)=0$; $f(-1)=1$; $f(2)=-1$

• $f'(0)=0$; $f'(-1)=2$; $f'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

8 **a)** $f'(x)=3x^2-3x-5$; x réel.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-6x+1}{6}$, x réel.

9 **a)** $f'(x)=4\theta x+\theta^3$, x réel.
b) $f'(\theta)=2x^2+3\theta^2x+1$, θ réel.

10 **a)** $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$; sur $\mathbb{R}$.

b) $x^2 + x + 1 \neq 0$ pour tout x de ℝ alors f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$.

11 **a)** $f'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$; sur $]0\,;+\infty[$.

b) $f'(x) = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$; sur $]0\,;+\infty[$.

12 *Corrigé dans le manuel.*

13 **a)** $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

14 **a)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x - 1}$.

b) $f'(x) = \dfrac{1 + 2\cos x + \sin x}{(2+\cos x)^2}$.

15 **a)** $f(0) = 0$; $f'(0) = -3$. Une équation est $y = -3x$.

b) $f(1) = 1$; $f'(1) = \dfrac{3}{2}$. Une équation est $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

16 **a)** $f(0) = 1$; $f'(x) = -\dfrac{2}{(2x+1)^2}$; $f'(0) = -2$.
Une équation est $y = -2x + 1$.

b) $f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$.
Une équation est $y = x$.

17 **a)** $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$. Une équation est $y = 1$.

b) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$; $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi}{8}\sqrt{2}$. Une équation est

$$y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)x + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}.$$

18 *Corrigé dans le manuel.*

19 **a)** On applique l'approximation affine locale de f en 1 pour $f(x) = x^3$.
Alors $f(1 + x) \approx f'(1)x + f(1)$. Pour tout x de ℝ, $f'(x) = 3x^2$ donc $f(1 + x) \approx 3x + 1$.
b) On procède comme au **a)** avec $f(x) = \sqrt{x}$.

c) On procède comme au **a)** avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

d) On applique l'approximation affine locale de f en 0 pour $f(x) = \sin x$.
Alors $f(x) \approx f'(0)x + f(0)$. Pour tout x de ℝ, $f'(x) = \cos x$ donc $f(x) \approx x$.

3. Applications de la dérivation (révisions)

20 **a)** $f'(x) = 8x^3 - 27$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{187}{8}$	↗	$+\infty$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}(2x-1)$ pour $x > 0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

c) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$.

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{13}}{8}$		$\frac{4+\sqrt{13}}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$

$y_1 = \dfrac{997 - 199\sqrt{13}}{81}$ $\qquad y_2 = \dfrac{997 + 199\sqrt{13}}{81}$

d) $f'(x) = 1 - \sin x$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

e) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}$ pour $\neq -1$.

x	0		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^5}}(x - 2\sqrt{x})$ pour $x > 0$.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

21 Courbe ❸.

22 a) $f'(x) = 6x(x+4)$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	65	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après le tableau de variations : 65 est un maximum local, 1 est un minimum local.

c) Elle n'est pas bornée car $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$).

23 On doit avoir $f'(-1) = 0$ et $f(1) = 0$.

D'où le système $\begin{cases} 3a - b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$ soit $a = 1$ et $b = 2$.

Vérification ensuite : $f'(x)$ change de signe en -1.

24 **1.** On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Une première solution sur $]-\infty\,; -1[$, puis sur $]-1\,; 1[$ et enfin sur $]1\,; +\infty[$.

4. $\alpha \approx -1{,}9$, $\beta \approx 0{,}3$, $\gamma \approx 1{,}5$.

25 *Corrigé dans le manuel.*

26 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

1er cas : n est pair donc $n - 1$ est impair.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2e cas : n est impair donc n est pair.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. 1er cas : n est pair (on utilise le tableau de variations, la continuité de f).

- Si $a < 0$ pas de solution.
- Si $a = 0$ une solution $x = 0$.
- Si $a > 0$ deux solutions, l'une dans $]-\infty\,; 0[$, l'autre dans $]0\,; +\infty[$. Ces solutions sont opposées.

2e cas : n est impair.

Quel que soit a de $\mathbb{R}$, une unique solution.

4. Dérivée d'une fonction composée

27 a) $f'(x) = 3(2x+2)\,(x^2 + 2x - 3)^2$.

b) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2 \times \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

c) $f'(u) = 2 \times 2\,(2u+3) = 4(2u+3)$.

d) $f'(u) = 9(3u-1)^2$.

28 a) $f'(x) = -2 \sin 2x$.

b) $f'(x) = 3 \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

c) $f'(t) = \dfrac{1}{2} \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

29 a) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

c) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x+2}}{2(x+2)^2}$.

d) $x'(t) = \dfrac{3\sqrt{2-t}}{2\sqrt{t+1}\,(2-t)^2}$.

30 *Corrigé dans le manuel.*

31 a) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(-6x-5)}{(3x+1)^4}$.

b) $f'(x) = 3(3x-1)(1-2x)^2(-10x+4)$.

32 a) $f'(t) = 2 \cos t\,(-\sin t)$.

b) $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$.

33 *Corrigé dans le manuel.*

34 a) $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$.

b) $v'(t) = \dfrac{1}{\cos t}\,(2 \tan t + 3 \tan^3 t)$.

35 **1.** Il semble que la tangente soit commune.

2. a) • $f = \sqrt{u}$ où $u(x) = x^2 - x + 1$.

u est dérivable (car polynôme) sur $\mathbb{R}$ et strictement positive donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$.

• g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g'(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$.

b) $f(1) = 1$; $g(1) = 1$.

$f'(1) = \dfrac{1}{2}$; $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

c) D'après le **b)** les tangentes au point d'abscisse 1 sont confondues.

36 **1.** $f = \sqrt{u}$ où $u(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

u est une fonction rationnelle et définie sur $[0\,; 1[$ donc dérivable sur $[0\,; 1[$.

De plus, u est strictement positive sur $]0\ ;\ 1[$ donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0\ ;\ 1[$.

2. a) Il ne donne que des conditions suffisantes.

Il ne dit pas que $\sqrt{u}$ n'est pas dérivable en a tel que $u(a) = 0$.

b) $t(x) = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}{x} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}{\sqrt{x^2}}$ car $x > 0$,

donc $t(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2(1-x)}} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} t(x) = 0$ ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

5. Complément : dérivées successives

37 **a)** $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1\ ;\ x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1\ ;\ f''(x) = 6x - 4\ ;\ f^{(3)}(x) = 6$.

b) $f(x) = x\sqrt{x}\ ;\ x \in \ ]0\ ,+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\ ;$

$f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}\ ;\ f^{(3)}(x) = -\dfrac{3}{8x\sqrt{x}}$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}\ ;\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}\ ;\ f''(x) = 2(x+1)^{-3}\ ;$

$f^{(3)}(x) = -6(x+1)^{-4}$.

38 *Corrigé dans le manuel.*

39 **1.** $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où $\sqrt{x^2+1}\, f'(x) = f(x)$.

2. On « dérive l'égalité » précédente, ce qui est possible car toutes les fonctions sont dérivables. On obtient

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} f'(x) + \sqrt{x^2+1}\, f''(x) = f'(x)$

c'est-à-dire $(x^2+1)\, f''(x) + xf'(x) - \sqrt{x^2+1}\, f'(x) = 0$

ou encore $(x^2+1)\, f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$.

40 *Corrigé dans le manuel.*

Apprendre à chercher (page 75)

41 **Lieu géométrique**

Les outils :
- Géométrie analytique.
- Étude de fonctions.

Les objectifs :
- Savoir utiliser une fonction pour contruire un lieu géométrique.

1. a) On a $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}$,

soit $\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OM} = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$,

et $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{ON}$.

b) Le triangle OMN est rectangle en O :

$$m^2 + n^2 = 9\text{, soit } n = \sqrt{9 - m^2}\ .$$

c) Les coordonnées de J sont $x = \dfrac{1}{3}m$ et $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{9-m^2}$.

2. On a $m = 3x$; reportons dans l'expression de y :

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - 9x^2} = 2\sqrt{1-x^2}\ .$$

3. a) On a montré que J appartient à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

Or $0 \leqslant m \leqslant 3$, alors $x \in [0\ ;1]$.

b) J décrit la partie de $\mathscr{C}$ correspondant à $0 \leqslant x \leqslant 1$.

c) $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$; f est définie sur $[-1\ ;\ 1]$, dérivable sur $]-1\ ;1[\ ;\ f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

x	-1		0		1
$f'(x)$	||	+		−	||
$f(x)$	0	↗	2	↘	0

42 **Fonctions et ensembles de points**

Les outils :
- Utilisation de l'équivalence.
- Étude de fonctions.
- Dérivabilité en un point.
- Symétrie d'une courbe.

Les objectifs :
- Savoir construire un ensemble de points donné par une équation cartésienne.

1. a) $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ équivaut à $y^2 = \dfrac{1}{4}(-x^2 + 2x + 3)$.

b) $-x^2 + 2x + 3 = (x+1)(3-x)$;

$-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1\ ;3]$.

On est ramené à étudier :

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3} \text{ ou } y = -\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}\ .$$

2. a) On note $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc f_1 est dérivable sur $]-1\,;3[$.

b) $f'_1(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{-x+1}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

c) • Étude de la dérivabilité de f_1 en $x=-1$.
f_1 est dérivable au point -1 si et seulement si la limite

$\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f_1(-1+h)-f_1(1)}{h}$ existe.

$t(h) = \frac{f_1(-1+h)-f_1(-1)}{h} = \frac{\sqrt{4-h}}{2\sqrt{h}}$.

On a $\lim\limits_{h \to 0^+} \sqrt{4-h} = 2$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} 2\sqrt{h} = 0^+$, donc $\lim\limits_{h \to 0^+} t(h) = +\infty$ et f_1 n'est pas dérivable en $x=-1$.

• De même, en $x=3$ avec $h<0$:

$t(h) = \frac{f_1(3+h)-f_1(3)}{h} = \frac{\sqrt{4+h}}{-2\sqrt{-h}}$.

On a $\lim\limits_{h \to 0^-} \sqrt{4+h} = 2$ et $\lim\limits_{h \to 0^-} \sqrt{-h} = 0^-$, donc $\lim\limits_{h \to 0^-} t(h) = -\infty$ et f_1 n'est pas dérivable en $x=3$.

d) D'où le tableau de variations de f_1 :

x	-1		1		3
$f'_1(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. Pour $x \in [-1\,;3]$, $f_2(x) = -f_1(x)$. Donc $\mathscr{C}_2$ est l'image de $\mathscr{C}_1$ par la symétrie d'axe (Ox).
La courbe Γ est la réunion des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

43 L'inégalité de Huygers

Les outils :
- Trigonométrie.
- Étude de fonctions trigonométriques et polynomiales (changement de variable).

Les objectifs :
- Savoir utiliser la trigonométrie et des changements de variable pour démontrer des inégalités non classiques.

1. Résoudre, pour $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$ revient à résoudre, pour $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,
$2\sin x + \tan x - 3x \geqslant 0$.
Posons $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ et étudions les variations de f.

$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.
2. Posons $\cos x = \mathrm{X}$ avec $0 < \mathrm{X} \leqslant 1$.
Étudions le signe de $\mathrm{P(X)} = 2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 1$ sur $]0\,;1]$:
$\mathrm{P'(X)} = 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} = 6\mathrm{X}(\mathrm{X}-1) > 0$ pour $\mathrm{X} \in \,]0\,;1[$.
Donc P est strictement croissant sur $]0\,;1]$ et $\mathrm{P}(0) = 1$, donc pour tout $\mathrm{X} \in \,]0\,;1]$, $\mathrm{P(X)} > 0$.
D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, alors $f(x) \geqslant 0$,

donc si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $2\sin x + \tan x \geqslant 3x$.

Pour progresser

(page 76)

Dérivabilité en un point

44 **1. a)** Oui car il y a une tangente non verticale.
b) Non car il y a deux demi-tangentes non confondues.
c) Comme le **b)**.
d) Non car f n'est pas continue en 2.
2. Il suffit de lire, si possible et si existence, les coefficients directeurs des tangentes ou demi-tangentes.
a) $f'(2) = -1{,}5$.
b) f n'est pas dérivable à gauche car la demi-tangente est verticale. $f'_d(2) = 0{,}5$.
c) $f'_g(2) = -4$

$f'_d(2) = \frac{4}{3}$.

d) Pas de dérivée à gauche ni à droite car f n'est pas continue en **2. a)**.

45 **a)** $t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sqrt{x}$, et $\lim\limits_{x \to 0} x\sqrt{x} = 0$
donc f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$.
b) $t(x) = |x|$ et $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ donc f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$.

46 **1.** Si $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cos\frac{1}{x}$; or $\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$,

d'où $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$.

Dérivées de fonctions composées

47 **1.** $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

2. a) Posons $u(x) = \sqrt{x}$. u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g = f \circ u$. Donc $g' = (f' \circ u) \times u'$, soit :

$$g'(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pour $x \in \,]0\,;1[\, \cup \,]1\,;+\infty[$.

b) Posons $u(x) = x^2$, alors $h = f \circ u$.

Donc $h'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 1}{(x^2-1)^2} \times 2x$ pour $x \in \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$.

c) Posons $u(x) = \sqrt{x}$, alors $k = u \circ f$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc k est dérivable sur $]1\,;+\infty[$, et $k' = (u' \circ f) \times f'$:

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}} \times \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} .$$

d) Posons $u(x) = \sin x$, alors $m = f \circ u$.

$$m'(x) = f'(u(x)) \times u'(\mathrm{x}) = \frac{\sin^2 x - 2\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} \times \cos x .$$

48 **a)** $f'(x) = -6 \sin 2x \cos^2 2x$; sur $\mathbb{R}$.
b) $f'(x) = 6 \sin 3x \cos 3x = 3 \sin 6x$; sur $\mathbb{R}$.

49 **a)** $f'(x) = \dfrac{-4\cos 2x}{\sin^3 2x}$; pour $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $f'(x) = \dfrac{-6\sin 2x}{\cos^4 2x}$; pour $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

50 $f'(x) = p \sin^{p-1} x \cos^q x - q \sin^p x \cos^{q-1} x$
donc $f'(x) = \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x [p \cos x - q \sin x]$.

51 • **1.** f est paire et dérivable sur I, donc pour x de I, $-x$ est élément de I et $f(-x) = f(x)$. En dérivant, on obtient $-f'(-x) = -f'(x)$, soit $f'(-x) = -f'(x)$. Donc f' est impaire.
2. De la même façon, de $f(-x) = -f(x)$, on obtient $-f'(-x) = -f'(x)$, soit $f'(-x) = f'(x)$. Donc f' est paire.

Trouver la fonction

52 • $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$ donc :

$$f'(x) = \frac{3x^4 + (9-a)x^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2} .$$

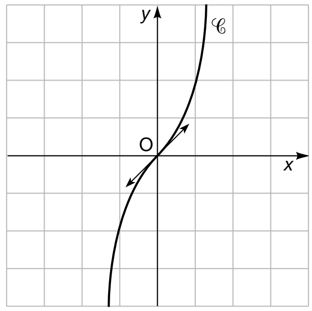
On est ramené à résoudre $f'(0) = 4$ et $f(0) = 3$.
On trouve $b = 3$ et $a = 4$.

53 • $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ donc $f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$.
f admet un extremum local pour $x = 1$ si et seulement si $f'(1) = 0$ et f' change de signe en 1.
$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -3$.
Pour $a = -3$, $f'(x)$ change de signe en 1, d'où le résultat.

54 • On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		↘	1	↗	
$f(x)$		↗	0	↗	

D'où une courbe possible :



Résolution d'équations

55 • Étudions les variations de $f : x \mapsto x^5 - x^3 + x - 5$.
$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$.
Posons $\mathrm{X} = x^2$; $5\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1 > 0$ pour tout X ($\Delta < 0$).
D'où les variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Le tableau de variations montre l'existence d'une solution unique α . On trouve $-1{,}67 < \alpha < -1{,}66$.

56 • $x(2x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 + x - 5 = 0$.
$f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 5$; $f'(x) = 12x^2 + 8x + 1$;
or $\Delta < 0$ donc $f' > 0$. f est dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, donc il existe une solution unique $\alpha \in \,]0\,;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On trouve $0{,}77 < \alpha < 0{,}78$.

57 • **1.** $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$.

2. a) f est décroissante, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ et $f(2) < 0$, donc f s'annule une fois entre 1 et 2.
b) On trouve $\alpha \approx 1{,}7$.

Dérivées successives

58 • **1.** $f'(x) = \cos x - x \sin x = \cos x + x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f''(x) = -\sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + x\cos(x + \pi).$$

$$f^{(3)}(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) - x\sin(x + \pi).$$

$$= 3\cos(x + \pi) + x\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$$

On utilise $\cos' x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Posons l'hypothèse de récurrence :

$$f^{(n)}(x) = n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Alors $f^{(n+1)}(x) = n\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$+ \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

soit $f^{(n+1)}(x) = (n+1)\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$+ x\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

59 **1.** $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1}$.

Ce qui conduit à résoudre le système :

$$a + b = 2 \text{ et } a - b = 0,$$

d'où $a = 1$ et $b = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

2. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$;

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Par récurrence : $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!\,(-1)^n}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{n!\,(-1)^n}{(x+1)^{n+1}}$.

Optimisation

60 **1. a)** AM est positif et la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc, par composition, « AM est minimale » équivaut à « AM^2 est minimale ».

b) $d(x) = (x-1)^2 + \left(\dfrac{1}{x} - (-1)\right)^2$ car $M\left(x\,;\dfrac{1}{x}\right)$

$$= (x-1)^2 + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^2$$

$$= x^2 - 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

2. $d'(x) = 2x - 2 - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$, pour tout $x > 0$,

donc $d'(x) = \dfrac{2(x^4 - x^3 - x - 1)}{x^3}$

et $f(x) = x^4 - x^3 - x - 1$.

3. a) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$
et $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$ pour tout $x > 0$.
Il en résulte le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$			
$f'(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$
$f(x)$	-2	↘		↘	-3	↗	$+\infty$

b) f est continue donc d'après ce tableau, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I et $1{,}72 < \alpha < 1{,}73$.

c) $f(x) < 0$ lorsque $x \in\ ]0\,;\alpha[$.
$f(x) = 0$ lorsque $x = \alpha$.
$f(x) > 0$ lorsque $x \in\ ]\alpha\,;+\infty[$.

4. Puisque $x > 0$, d' est du signe de f d'où le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$d'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$d(x)$	‖	↘		↗	

Ainsi AM est minimale lorsque $x = \alpha$.

5. • (AM) a pour coefficient directeur $m = \dfrac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha - 1}$.

• La tangente en M à l'hyperbole a pour coefficient directeur $m' = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Donc $mm' = \dfrac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha - 1} \times \left(-\dfrac{1}{\alpha^2}\right) = -\dfrac{\frac{1}{\alpha} + 1}{\alpha^3 - \alpha^2} = -\dfrac{\alpha + 1}{\alpha^4 - \alpha^3}$.

Mais α est tel que $f(x) = 0$ ie $\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$
donc $\alpha^4 - \alpha^3 = \alpha + 1$

et ainsi $mm' = -\dfrac{\alpha + 1}{\alpha + 1} = -1$.

Comme le repère est orthonormal, (AM) et la tangente sont perpendiculaires.

61 **A. 1.** $f'(x) = -3x^2 + \dfrac{9}{4} = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + x\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - x\right)$.

D'où le tableau de variations :

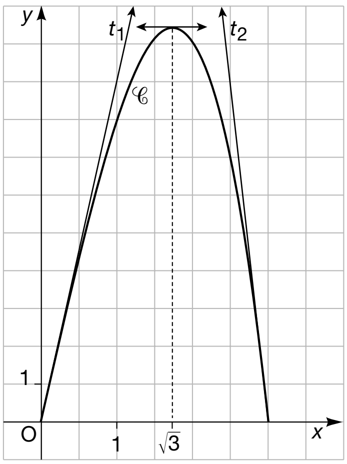
x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

2. $t_1 : y = \dfrac{9}{4}x$;

$t_2 : y = -\dfrac{9}{2}x + \dfrac{27}{4}$.

L'étude des signes de $f(x) - y$ pour les deux tangentes montre que t_1 et t_2 sont au-dessus de la courbe.

3.



B. 1. $D^2 = x^2 + h^2$ (triangle rectangle).

2. $xh^2 = x(D^2 - x^2)$;

or, $D = \dfrac{3}{2}$ et $xh^2 = x\left(\dfrac{9}{4} - x^2\right) = f(x)$.

3. L'étude **A.** donne $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

62 **1.** L'aire du triangle MNI est égale à :

$\dfrac{1}{2}\text{MN} \times \text{HI} = \text{HM} \times \text{HI} = \sqrt{1-x^2}\,(1-x)$.

2. a) $f(-1) = f(1) = 0$.

b) • $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-x)}{x+1}$

$$= \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}.$$

$\lim\limits_{x \to -1} (1-x)\sqrt{1-x} = 2\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{1+x} = 0^+$, donc :

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty.$$

f n'est pas dérivable au point -1. Mais $\mathscr{C}_f$ a une tangente d'équation $x = -1$.

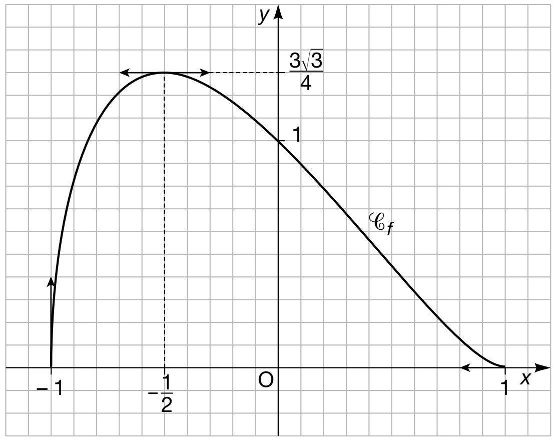
• $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}(1-x)}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 0$ et f est dérivable en 1.

c) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x) - \sqrt{1-x^2} = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

d)



3. L'aire est maximale pour $x = -\dfrac{1}{2}$, elle est égale à $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. $\sqrt{1-x^2}\,(1-x) = 1$.

$x \in [-1\,;1]$, donc, comparons les carrés :

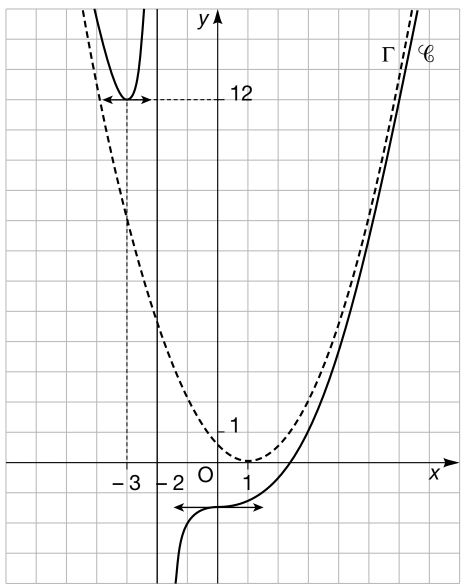
$$(1-x^2)(1-x) = 1 \iff x^3 - x^2 - x = 0,$$

soit $x(x^2 - x - 1) = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

x_3 est à rejeter ; $x_2 \approx -0{,}618$.

Études de fonctions

63 $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$.



1. Transformons l'écriture de $A(x) = a(x-1)^2 + \dfrac{b}{x+2}$:

$$A(x) = \frac{2a(x-1)^2(x+2)+2b}{2(x+2)}$$

$$= \frac{2ax^3 - 6ax + 4a + 2b}{2(x+2)}.$$

$A(x) = f(x) \Leftrightarrow 2a = 1$ et $6a = 3$ et $4a + 2b = -6$.

Donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -4$; $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{4}{(x+2)}$.

2. a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{x+2} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x+2} = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{2}(x-1)^2 = \dfrac{9}{2}$;

$\lim\limits_{x \to -2^-} -\dfrac{4}{x+2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -2^+} -\dfrac{4}{x+2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$;

b) $f'(x) = (x-1) + \dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$;

x	$-\infty$		-3		-2 ‖		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	12	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3. $\overrightarrow{PM}\left(0\,;-\dfrac{4}{x+2}\right)$; $PM = \dfrac{4}{|x+2|}$ et $\lim\limits_{x \to \infty} PM = 0$.

Γ est une courbe asymptote à $\mathscr{C}$.

4. *Voir la figure au début de l'exercice.*

64 • **1.** $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$.

$f'(x)$ est donc du signe du trinôme $2x^2 - 4x - 2$.

Or ce trinôme a deux racines $x_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	x_1	1	2 ‖		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	0 ↗	$f(x_1)$	-2 ↘	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

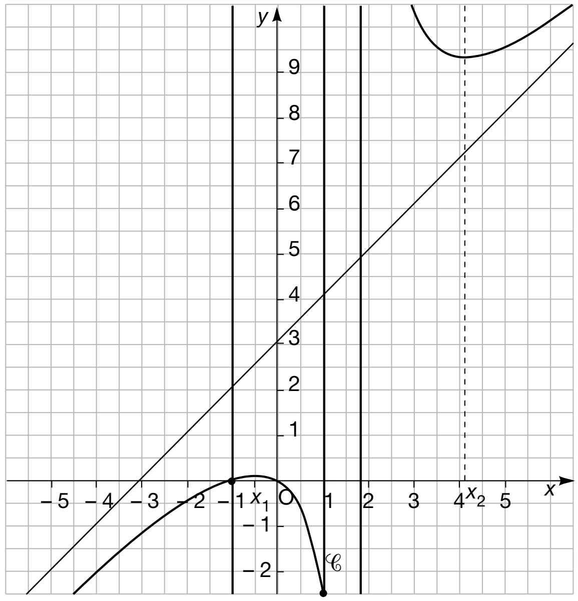
et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 2} x(x+1) = 6$.

2. a) Pour tout x, $x \neq 2$, $f(x) - (x+3) = \dfrac{6}{x-2}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+3) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+3) = 0$.

Ainsi $d : y = x + 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

b)



3. a) $x^2 + (1-m)x + 2x = 0$ équivaut à $f(x) = m$.

Alors d'après le tableau de variations et puisque $f(x_1) < f(x_2)$:

- lorsque $m < f(x_1)$, cette équation a 2 solutions ;
- lorsque $m = f(x_1)$, cette équation a 1 solution ;
- lorsque $f(x_1) < m < f(x_2)$, cette équation n'a pas de solution ;
- lorsque $m = f(x_2)$, cette équation a 1 solution ;
- lorsque $m > f(x_2)$, cette équation a 2 solutions.

b) $\cos(2u) + 2(1-m)\cos u + 4m + 1 = 0$ [1]

avec $u \in [0\,;2\pi[$ équivaut à

$f(\cos u) = m$ avec $u \in [0\,;2\pi[$.

Or cela équivaut

à $f(X) = m$ avec $X = \cos u$, $u \in [0\,;2\pi[$.

Comme $-1 \leqslant \cos u \leqslant 1$ pour tout u de $[0\,;2\pi[$ il convient de résoudre $f(X) = m$ avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$ pour commencer.

Pour cela, faisons intervenir $(-1\,;f(-1))$ et $(1\,;f(1))$ dans le tableau de variations de f, on obtient alors :

- lorsque $m < -2$ ou $m > f(x_1)$, l'équation $f(X) = m$ avec $X \in [-1\,;1]$ n'a pas de solutions ;
- lorsque $m = f(x_1)$ l'équation a une solution $X = x_1$;
- lorsque $m = -2$ l'équation a une solution $X = 1$;
- lorsque $m \in [0\,;f(x_1)[$ l'équation a deux solutions : a et b ;
- lorsque $m \in\,]-2\,;0[$ l'équation a une seule solution : c.

Il en résulte que :

- lorsque $m = f(x_1)$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = f(x_1)$ ce qui donne deux solutions ;
- lorsque $m = -2$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = 1$ ie $u = 0$;
- lorsque $m \in [0\,;f(x_1)[$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = a$ ou $\cos u = b$ ce qui fournit quatre solutions ;

• lorsque $m \in]-2\,;0[$, [1] a pour solution les réels u tels que $\cos u = c$ ce qui fournit deux solutions.

Conclusion :

• lorsque $m \in]-\infty\,;-2[\cup$ [1] n'a pas de solutions ;

• lorsque $m = -2$, [1] a 1 seule solution ;

• lorsque $m \in]-2\,;0[\cup \{f(x_1)\}$, [1] a deux solutions ;

• lorsque $m \in [0\,;f(x_1)[$, [1] a quatre solutions.

65 **1.** • $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$;

• $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$.

2. $f'_n(x) = n(x^2 - 2x)^{n-1}(2x - 2)$
$= 2nx^{n-1}(x-2)^{n-1}(x-1)$.

• Si ***n* est pair**, $n - 1$ est impair :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		↘	0	↗	1	↘	0	↗	

• Si ***n* est impair**, $n - 1$ est pair : $f'_n(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		↘	-1	↗	

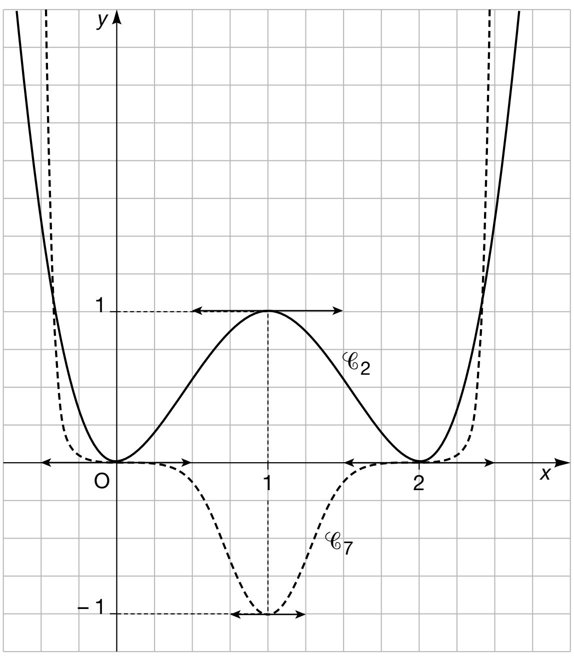
3. • $f_n(1+h) = [1 + 2h + h^2 - 2(1+h)]^n$
$= (h^2 - 1)^n = f_n(1-h)$.

Donc f_n est paire.

• $f_n(x) = x^n(x-2)^n$; les valeurs de x solutions sont les racines des équations $x(x-2) = 0$ ou $x(x-2) = 1$.

$A(2\,;0)$, $A'(1 - \sqrt{5}\,;1)$, $O(0\,;0)$, $A''(1 + \sqrt{5}\,;1)$.

4.



66 **1. a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_\lambda(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_\lambda$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\lambda}{x} + \dfrac{\lambda^2}{x^3} = 0$

donc $d : y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_\lambda$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) Pour tout x de I, $f'_\lambda(x) = 1 - \dfrac{2\lambda}{x^2} - \dfrac{3\lambda^2}{x^4}$

$$= \frac{x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2}{x^4}$$

$$= \frac{(x^2 - 3\lambda)(x^2 + \lambda)}{x^4}$$

d'où le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{3\lambda}$		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	‖	$-$	0	$+$	0
f_λ	‖ $+\infty$	↘	$\frac{16}{9}\sqrt{3\lambda}$	↗	$+\infty$

b) D'après le **a)** $x_\lambda = \dfrac{16}{9}\sqrt{3\lambda}$.

3. a) $P_\lambda\left(\sqrt{3\lambda}\,;\dfrac{16}{9}\sqrt{3\lambda}\right)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = \dfrac{16}{9}x$.

Donc l'ensemble des points P_λ est inclus dans la droite d'équation $y = \dfrac{16}{9}x$.

b) Réciproquement, si $M\left(x\,;\dfrac{16}{9}x\right)$ avec $x > 0$

alors $M = P_\lambda$ où $\lambda = \dfrac{x^2}{3}$.

En effet x étant fixé cela revient à choisir $\lambda > 0$ tel que

$\sqrt{3\lambda} = x$ ie $\lambda = \dfrac{x^2}{3}$.

Conclusion : L'ensemble des points P_λ lorsque λ décrit I est la demi-droite d'équation $y = \dfrac{16}{9}x\,;x > 0$.

67 **1.** • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• En $-\infty$, transformons l'écriture :

$$f(x) = \frac{[(x+1) - \sqrt{x^2+4x}][(x+1) + \sqrt{x^2+4x}]}{(x+1) - \sqrt{x^2+4x}}$$

$$= \frac{-2x+1}{(x+1) - \sqrt{x^2+4x}} = \frac{-2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}},$$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

2. Étudions $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+3)]$.

$$f(x)-(2x+3)=\sqrt{x^2+4x}-x-2=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)},$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]=0^-$.

La droite d'équation $y=2x+3$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

3. • Étude de la dérivabilité de f en 0 :

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{x}=1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\ ;$$

$\lim\limits_{x\to0} t(x)=+\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0.

• Étude de la dérivabilité f en -4 : $f(-4)=-3$ et :

$$t(x)=\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\frac{x+4+\sqrt{x(x+4)}}{x+4}=1-\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x-4}}\ ;$$

$\lim\limits_{x\to-4} t(x)=-\infty$, donc f n'est pas dérivable en -4.

4. $f'(x)=1+\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$;

• si $x\geqslant 0$, $x+2>0$, donc $f'(x)>0$;

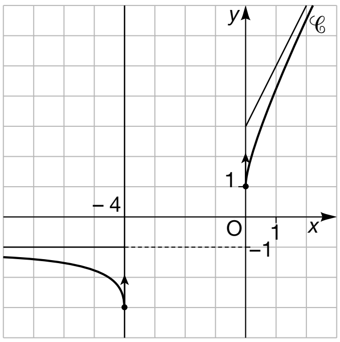
• si $x\leqslant-4$, $x+2<0$, donc $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}<0$.

Comparons 1^2 à $\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2$,

soit 1 à $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x}$: $1-\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2=-\dfrac{4}{x^2+4x}<0$.

Donc, si $x\leqslant-4$, $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
f′(x)		$-$		▨		$+$	
f(x)	-1	↘	-3	▨	1	↗	$+\infty$



68 • **1. a)** F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$G'(x)=F'(x)-F'(-x)=0$ (F′ est paire).

b) $G(0)=2F(0)=0$ et $G'(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

G est une fonction constante et $G(x)=G(0)=0$.

D'où $F(x)+F(-x)=0$, donc $F(-x)=-F(x)$. F est une fonction impaire.

2. a) $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur I, et F est dérivable, donc :

$$H'(x)=F'(x)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)F'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$$

b) $H(x)=\text{cte}=F(1)+F\left(\dfrac{1}{1}\right)=2F(1)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to0}F(u)=F(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}H(x)=2F(1)$.

d) La courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $y=2F(1)$ pour asymptote.

3. a) $T'(x)=F'(\tan x)\times\tan' x-1$

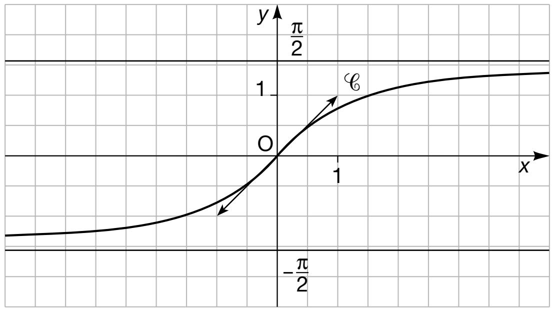
$$=\frac{1}{1+\tan^2 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}-1=0.$$

T est constante.

b) $T\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=T(0)=0$, donc $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

4.

x	0		$+\infty$
F	0	↗	$\dfrac{\pi}{2}$



69 • **1.** Pour tout réel x,

• $f(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)-3\sin(x+2\pi)=f(x)$ donc f est 2π-périodique ; il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi\ ;\pi]$ par exemple.

• $f(-x)=\sin(-3x)-3\sin(-x)=f(x)$ donc f est paire ; il suffit d'étudier f sur $[0\ ;\pi]$.

• $f(\pi-x)=\sin(3\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$
$=\sin(\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$
$=f(x)$

ainsi la courbe de f est symétrique par rapport au point I $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;-4\right)$.

Il suffit donc d'étudier f sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ensuite avec une symétrie de centre I on obtient la courbe sur $[0\ ;\pi]$.

Avec une symétrie de centre 0 (origine du repère) on obtient la courbe sur $[-\pi\ ;\pi]$ et enfin avec des translations de vecteurs $k2\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$ on obtient la courbe sur $\mathbb{R}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car sin l'est et $x\mapsto 3x$ aussi, et

$f'(x)=3\cos 3x-3\cos x$
$=3(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x-\cos x)$
$=3(\cos x(\cos 2x-1)-\sin 2x\sin x)$
$=3(\cos x(-2\sin^2 x)-\sin 2x\sin x)$
$=3(-\sin x(2\cos x\sin x+\sin 2x))$
$=3(-\sin x\,(2\sin 2x))$
$=-6\sin x\sin 2x.$

3. Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

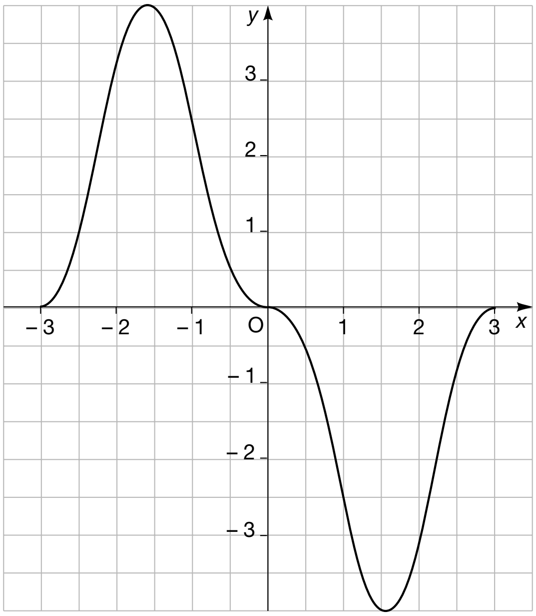
• $\sin x > 0$ lorsque $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin 0 = 0$.

• $\sin 2x > 0$ lorsque $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin 0 = \sin \pi = 0$.

Il en résulte le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	-4

4.



70 • **Partie A**

1. a) b) Pour tout x de I, $u'(x) = \tan^2 x$ et ainsi $u' \geqslant 0$ sur I.
La fonction est donc croissante sur I et comme $u(x) = 0$, pour tout x de I, $\tan x - x \geqslant 0$ ie $\tan x \geqslant x$.
2. a) La fonction tan est strictement croissante et continue sur I, et l'image de I est $[0\,;\sqrt{3}]$.
Ainsi la fonction $\tan^2$ est strictement croissante et continue sur I et l'image de I est $[0\,;3]$.
Puisque $\sqrt{2} - 1 \in [0\,;3]$, il existe un unique α dans I tel que $\tan^2 \alpha = \sqrt{2} - 1$.
b) De ce qui précède,
• lorsque $x \in [0\,;\alpha]$, $\tan^2 x \leqslant \tan^2 \alpha$
donc $\tan^2 x + 1 - \sqrt{2} \leqslant 0$;
• lorsque $x \in \left[\alpha\,;\frac{\pi}{3}\right]$, $\tan^2 x \geqslant \tan^2 \alpha$
donc $\tan^2 x + 1 - \sqrt{2} \geqslant 0$.
c) Pour tout x de I, $v'(x) = \tan^2 x + 1 - \sqrt{2}$, d'après le **b)** on en déduit le tableau suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{3}$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	
$v(x)$	0	$\searrow$	$v(\alpha)$	$\nearrow$	$1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

Il en résulte que, pour tout x de I, $\tan x - x\sqrt{2} \leqslant 0$.

Partie B

1. Pour tout x de I, $\left(x \mapsto \tan x - x - \frac{x^2}{3}\right)' = \tan^2 x - x^2$.
Or $\tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$
et pour tout x de I,
• $\tan x + x \geqslant 0$, puisque $\tan x \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$;
• $\tan x - x \geqslant 0$ d'après le **1. b) Partie A**.

On en déduit les variations de $h : x \mapsto \tan x - x - \frac{x^3}{3}$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$h\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Ainsi pour tout x de I, $\tan x - x - \frac{x^3}{3} \geqslant 0$

et donc $\tan x \geqslant x + \frac{x^3}{3}$.

2. Posons, pour tout x de I, $\gamma(x) = \tan x - x - \frac{2x^3}{3}$
et $\gamma'(x) = \tan^2 x - 2x^2$
$= (\tan x - \sqrt{2})(\tan x + \sqrt{2}\,x)$.
En raisonnant comme dans le **1.** avec le signe de v sur I, on obtient pour tout x de I,

$$\tan x - x - \frac{2x^3}{3} \leqslant 0$$

et donc $\tan x \leqslant x + \frac{2x^3}{3}$.

3. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{3}\,;0\right]$, $-x \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ donc d'après le **1.** et le **2.**

$$-x + \frac{(-x)^3}{3} \leqslant \tan(-x) \leqslant -x + \frac{2(-x)^3}{3}$$

ainsi $-\left(x + \frac{x^3}{3}\right) \leqslant -\tan x \leqslant -\left(x + \frac{2x^3}{3}\right)$

et donc $x + \frac{2x^3}{3} \leqslant \tan x \leqslant x + \frac{x^3}{3}$.

71 • **1. a)** $t(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x}$;

or $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$, alors $\lim\limits_{x \to 0} \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = 0$.
g est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé 0.
b) Tangente au point O : $y = 0$.
2. a) $g\left(\dfrac{1}{k\pi}\right) = \dfrac{1}{k^2\pi^2} \sin k\pi = 0$.

b) $\alpha > 0$. On veut $\dfrac{1}{k\pi} < \alpha$, soit $\dfrac{1}{\alpha\pi} < k$.
Il existe une solution $k_1 \in \mathbb{N}$. Alors, tout réel $k_1 + n$ est également solution, $n \in \mathbb{N}$.
3. La courbe $\mathscr{C}$ coupe la tangente en O en une infinité de points.

72 **1. a)** Pour tout x de $[0\,;\pi]$:

$$g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x$$
$$= -x\sin x.$$

Sur $[0\,;\pi]$, $\sin x > 0$ si $x \neq 0$ et $\sin 0 = 0$ d'où le tableau suivant :

x	0		π
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$

b) D'après ce tableau, $g(x) \leqslant 0$ pour tout x de $[0\,;\pi]$.

2. Pour tout x de $]0\,;\pi]$, $f'(x) = \dfrac{\cos x - x\sin x}{x^2}$ donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\pi]$ d'après le **1**.

Ainsi f est strictement décroissante sur $]0\,;\pi]$ et f continue sur $[0\,;\pi]$ donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$.

3. a) $\varphi'(x) = \cos - 1 + \dfrac{x^2}{2}$

$\varphi''(x) = -\sin x + x$

$\varphi'''(x) = -\cos x + 1.$

Il s'ensuit le tableau :

x	0		$+\infty$
φ'''		$+$	
φ''	0	$\nearrow$ $+$	
φ'	0	$\nearrow$ $+$	
φ	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout x de $[0\,;+\infty[$,

$$\varphi(x) \geqslant 0 \text{ \underline{ie} } \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geqslant 0$$

donc $x - \sin x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.

De plus, pour tout x de $[0\,;+\infty[$,

$$\varphi''(x) \geqslant 0 \text{ donc } x - \sin x \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$$

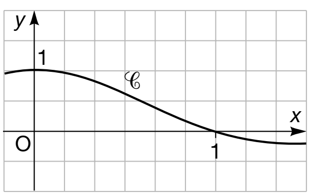
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Or d'après le **3. a)**, pour tout $x > 0$,

$$0 \geqslant \frac{\sin x - x}{x^2} \geqslant \frac{-x}{6}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$ par encadrement et ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4.



Prendre toutes les initiatives

73 Notons $f : x \mapsto x^3$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

$f'(x) = 3x^2$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi les courbes ont des tangentes parallèles au point d'abscisse a équivaut à $3a^2 = \dfrac{1}{a^2}$. Cette équation n'a pas de solution donc il n'y a pas de telles tangentes.

74 Notons $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;+1\}$.

Pour tout x de D,

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - (2x^3+3)\times 2x}{(x^2-1)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2-1)^2}$.

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $2x^4 - 6x^2 - 6x$.

Notons $g : x \mapsto 2x^4 - 6x^2 - 6x$ pour tout x de $\mathbb{R}$,

alors $g'(x) = 8x^3 - 12x - 6$

et $g''(x) = 24x^2 - 12$.

Il en résulte le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		α		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	y_2	$\nearrow$			$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$			$\searrow$			$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$y_1 = g'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \qquad y_2 = g'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0.$

D'après ces variations, g' est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g'(x) = 0$.

• $g(\alpha) = 2\alpha^4 - 6\alpha^2 - 6\alpha$
$= \alpha(2\alpha^3 - 6\alpha - 6).$

Or $g'(\alpha) = 0$ donc $8\alpha^3 - 12\alpha - 6 = 0$

donc $\alpha^3 = \dfrac{12\alpha + 6}{8} = \dfrac{3}{2}\alpha + \dfrac{3}{4}$.

Ainsi $g(\alpha) = \alpha(3\alpha + 3 - 6\alpha - 6)$
$= \alpha(-3\alpha - 3)$
$= -3\alpha(\alpha + 1).$

Comme $1 < \alpha < 2$ (car $g'(1) < 0$ et $g'(2) > 0$) alors $g(\alpha) < 0$.

• On en déduit d'après les variations et la continuité de g, qu'il existe x_1 et x_2, $x_1 < x_2$ tels que $g(x_1) = 0$ et $g(x_2) = 0$ et il s'ensuit le tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

75 • On pose, pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x$ et $g(x) = \sin x - x$.

En étudiant les variations de f et g, on démontre que $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ d'où l'encadrement.

76 • Notons $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$.

f est 2π-périodique et paire, de plus,

• **pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$**, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc

$\cos(\sin x) > 0$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 0$ donc $-\sin(\cos x) \geqslant 0$.

Ainsi $f(x) > 0$ donc **$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$**.

• **pour tout x de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$**, d'après l'exercice 75,

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$$

donc $\cos(\sin x) > \cos x$ (cos est strictement décroissante en $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$)

et $\sin(\cos x) < \cos x$ (car $\cos x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$).

Ainsi **$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$**.

Par parité et 2π-périodicité de f sur $\mathbb{R}$, on en déduit que **$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ pout tout x de $\mathbb{R}$**.

77 • Posons a ($a > 2$) l'abscisse de A, une équation de (AP) est $y = \frac{1}{2-a}x + 1 + \frac{2}{a-2}$.

Ainsi l'ordonnée de B est $1 + \frac{2}{a-2}$.

Il s'ensuit que l'aire de OAB est

$\mathrm{A}(a) = \frac{1}{2}a \times \left(1 + \frac{2}{a-2}\right)$

$\mathrm{A}(a) = \frac{a}{2} + \frac{a}{a-2}$.

Étudions sur $]2\,;+\infty[$ les variations de $\mathrm{A} : a \mapsto \mathrm{A}(a)$.

$\mathrm{A}'(a) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(a-2)^2} = \frac{(a-(2+\sqrt{2}))(a-(2-\sqrt{2}))}{2(a-2)^2}$

d'où le tableau :

x	0		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$A'(a)$	‖	$-$	0	$+$	
$A(a)$	‖	↘		↗	

D'après ce tableau, l'aire de OAB est minimale lorsque $a = 2 + \sqrt{2}$ ie $\mathrm{A}(2+\sqrt{2}\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;1+\sqrt{2})$.

78 • Posons $f(x) = \sin 3x$ et $g(x) = \tan x$ alors

$\frac{\sin 3x}{\tan x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \times \frac{x-0}{g(x)-g(0)}$.

f et g sont dérivables en O et $f'(0) = 3$ et $g'(0) = 1$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan x} = 3 \times 1 = 3$.

79 • **1.** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ donc

$(1+x^2)\,f'(x) = (1+x^2)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2}$

donc $(1+x^2)\,f'(x) = xf(x)$ [1]

2. On raisonne par récurrence sur n avec x fixé réel arbitrairement choisi.

• L'égalité est vraie pour $n = 0$; il suffit pour cela de dériver [1]

• On suppose l'égalité vraie pour n quelconque puis on la dérive, l'hérédité est alors démontrée :

$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^n(x) = 0$

donc

$2xf^{(n+2)}(x) + (1+x^2)f^{(n+3)}(x) + (2n+1)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)xf^{(n+2)}(x) + (n^2-1)f^{(n+1)}(x) = 0$

c'est-à-dire $(1+x^2)f^{(n+3)}(x) + (2n+3)xf^{(n+2)}(x) + (n^2+2n)f^{(n+1)}(x) = 0$.

Or $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$

donc $(1+x^2)f^{(n+3)}(x) + (2n+3)xf^{(n+2)}(x) + ((n+1)^2-1)f^{(n+1)}(x) = 0$.

80 • $g(x) = \sqrt{|(x-1)(x-5)|}$;

si $x \in]-\infty\,;1] \cup [5\,;+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$;

si $x \in]1\,;5[$, $g(x) = \sqrt{-x^2+6x-5}$.

• $g(3+h) = g(3-h)$, donc la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie.

• $x \in]1\,;5[$,

$$\begin{cases} y^2 = -x^2+6x-5 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ y > 0 \end{cases}$$

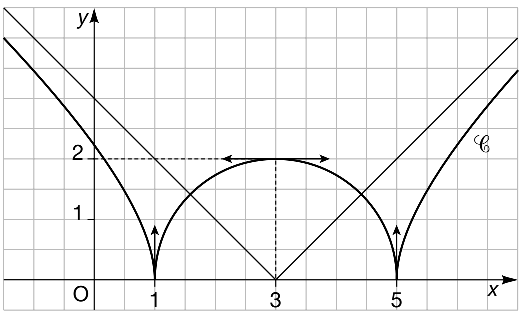
La courbe est le demi-cercle de centre $\Omega(3\,;0)$, de rayon 2 correspondant à $y > 0$.

• $x \in]-\infty\,;1] \cup [5\,;+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$;

$g'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		▨		$+$	
$g(x)$		↘	0	▨	0	↗	

• Les droites $d : y = x - 3$ et $d' : y' = -x + 3$ sont asymptotes à $\mathscr{C}$.



Problèmes (page 88)

81 **A. 1.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}} = 0$,

donc $f'(0) = 0$.

2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{(1-x)^2}}} \times \dfrac{x^2(3 - 2x)}{(1 - x)^2}$;

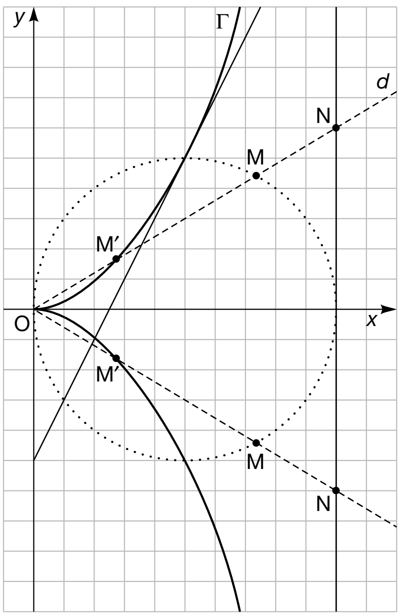
$f'(x)$ est du signe de $3 - 2x$.

x	0	1
$f'(x)$	+	‖
$f(x)$	0 ↗	‖

3. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$;

Γ a pour équation $y = 2x - \dfrac{1}{2}$.

4.



5. $M(x\,;y) \in \Gamma \Leftrightarrow x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2(x - 1) + x^3 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^3}{1 - x}.$$

• Si $x \in [0\,;1[$, alors $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ ou $y = -\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

6. a) $M \in \mathscr{C} \cap d : \begin{cases} y = tx \\ y^2 = \dfrac{x^3}{1-x} \end{cases}$ $\quad M\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\,;\dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$;

$M' \in \Gamma \cap d : \begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} \\ y = tx \end{cases}$

$M'\left(\dfrac{1}{1+t^2}\,;\dfrac{t}{1+t^2}\right)$ et $N(1\,;t)$.

b) $\overrightarrow{MN}\left(1 - \dfrac{t^2}{1+t^2}\,;t - \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$,

soit $\overrightarrow{MN}\left(\dfrac{1}{1+t^2}\,;\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM}$.

c) Construire d puis M et N.

On obtient M′ par $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MN}$.

B. On peut choisir une solution analytique. On peut aussi utiliser les propriétés du produit scalaire.

1. a) $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NO} = (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IM}) \cdot \overrightarrow{NO}$

$= \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{NO}$

$= \overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{NO} \qquad (\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{NO} = 0)$

$= \overrightarrow{NI} \cdot (\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IO}) = \overrightarrow{NI}^2$;

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI}^2$.

b) $\overrightarrow{NI}^2 = \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{M'O} \cdot \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{ON}$

($\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{ON}$: vecteurs colinéaires de même sens) ;

soit $\overrightarrow{NI}^2 = OM' \times ON$.

De même, $\overrightarrow{OI}^2 = OM \times ON$.

c) En utilisant le théorème de Thalès et $OM = M'N$, on obtient le résultat.

d) On peut écrire $OP = NI \times \dfrac{OM'}{OM}$, et alors :

$$OP \times OI^2 = NI \times \frac{OM'}{OM} \times OM \times ON = NI^3.$$

2. Il s'agit de résoudre $x = a\sqrt[3]{2}$ et donc de connaître $\sqrt[3]{2}$, ce que permet la cissoïde.

82 **1.** L'altitude des trois points est nulle donc c'est une figure dans le plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ qui montre ABC.

2. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 12$.

De même $AC^2 = 12$ et $BC^2 = 12$.

Ainsi $AB = AC = BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ donc ABC est équilatéral.

De plus $OA = OB = OC = 2$ donc O est son centre (de gravité en particulier).

3. a) $\mathscr{C}'$ est le plan ⊥ à (AB) passant par O et C (car O et C sont équidistants de A et B).

Si on note $K(0\,;0\,;1)$, $\mathscr{C}'$ est le plan (OCK).

b) De même c'est le plan (OAK).

c) L'ensemble des points équidistants de A, B, C est l'intersection des deux plans précédents : c'est-à-dire $(OK) = (O\vec{k})$.

4. Pour que ABCD soit un tétraèdre régulier, il faut que D soit équidistant de A, B, C donc $D \in (O\vec{k})$.

Ainsi, nécessairement ses coordonnées sont du type $(0, 0, d)$.
De plus, on doit avoir AD = AB ie $4^2 + d^2 = 12$.
Ce qui fournit $d = \sqrt{8}$. Nécessairement, si D existe : $D(0, 0, \sqrt{8})$.
Réciproquement, le point $D(0, 0, \sqrt{8})$ est toujours AB = AC = BC = DA = DB = DC donc ABCD est régulier.
Conclusion : il existe un unique point D répondant au problème, c'est le point $D(0 ; 0 ; \sqrt{8})$.

5. a) D'après Al-Kashi dans AMB,

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cos \widehat{AMB}.$$

Or AM = BM (car $M \in$ (OCD) = plan médiateur de [AB]) et $AB^2 = 12$ donc $12 - 2AM^2 (1 - \cos \widehat{AMB})$.
D'après Al-Kashi dans AMC,

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2AC.\ AM \cos \widehat{ACM}$$

or $\widehat{ACM} = \frac{\pi}{3}$ car ACD équilatéral et $M \in [CD]$

$AC = \sqrt{12}$

$MC = \sqrt{12}\,\lambda$ car $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CD}$ donc $CM = |\lambda| CD = \lambda CD$ car $\lambda \in [0 ; 1]$.
Ainsi $AM^2 = 12 + 12\lambda^2 - 2 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12}\,\lambda \times \cos \frac{\pi}{3}$
ie $AM^2 = 12 + 12\lambda^2 - 12\lambda = 12(\lambda^2 - \lambda + 1)$.
On en tire que $12 = 2 \times 12\,(\lambda^2 - \lambda + 1)\,(1 - \cos \widehat{AMB})$.

D'où $\cos(\widehat{AMB}) = 1 - \dfrac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$

b) f est rationnelle déf sur $\mathbb{R}$ donc dér sur $\mathbb{R}$ et

• $\boldsymbol{f'(\lambda)} = \dfrac{4\lambda - 2}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}$

• $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{2\lambda^2}{2\lambda^2} = 1$

$\lim\limits_{\lambda \to -\infty} f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \dfrac{2\lambda^2}{2\lambda^2} = -1$.

c) et **d)** À l'aide du tableau, $\cos(\widehat{AMB})$ est minimal lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$ ie M milieu de [CD].

λ	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\frac{1}{2}$ ↘	$\frac{1}{3}$	↗ $\frac{1}{2}$	1

Comme $\widehat{AMB} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ où cos est décroissante alors $\widehat{AMB}$ est maximal quand son cosinus est minimal ie lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$.

C'est nouveau au bac (page 82)

83 **1. a) Faux** ; contre-exemple $f(x) = 2x + 3$ sur $[0 ; 3]$ en $a = 3$.
b) Faux ; contre-exemple $f(x) = x^3$ en $a = 0$.
c) Vrai (voir le cours).
d) Faux ; $f(x) = x^3 + x - 10$ sur $\mathbb{R}$.
3. D'après l'énoncé : $f'(1) = a$; $f'(-1) = c$; $f(1) = a + b$ et $f(-1) = c + d$.
a) Vrai. Si f est paire alors $f'(1) = -f'(-1)$ donc $a = -c$.
b) Faux, contre-exemple $f(x) = x^3 + x - 10$.
c) Faux, contre-exemple $f(x) = x$.
d) Vrai. Si $ac < 0$ alors $f'(1) \times f'(-1) < 0$ et f' est continue (car f'' existe) sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in (-1 ; +1]$ tel que $f'(x) = 0$.

84 **1.** Vrai, par définition.
2. Faux, $g'(x) = (1 + \tan^2 x) f'(\tan x)$.
3. Vrai, il suffit d'étudier $\varphi : x \mapsto \tan x - x$.
4. Vrai, $f' - g' = 0$ sur I donc $f - g$ est constante sur I. L'hypothèse intervalle est essentielle.

85 **2.** • Pas de difficulté en 0 et en 1,

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2(1 - x)}} \ ;$$

• en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^2(1 - x)}}{x} = \sqrt{1 - x} \text{ car } x > 0 \text{ et } \sqrt{x^2} = x$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$
et f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

• en 1 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x^2(1 - x)}}{x - 1} = \frac{-\sqrt{x^2(1 - x)}}{1 - x} = -\sqrt{\frac{x^2}{1 - x}}$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

donc f n'est pas dérivable en 1.

• **Variations**

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$