chapitre 2 Fonctions : limites et continuité

Activités (page 20)

ACTIVITÉ 1

2 Dans le cas ❶, f est continue sur $[-3\,;3]$ puisqu'elle est d'un seul morceau.

Dans le cas ❷, f est discontinue en 1, donc n'est pas continue sur $[-3\,;3]$.

Dans le cas ❸, f est discontinue en 1 ($f(1)=0$), donc f n'est pas continue sur $[-3\,;3]$.

ACTIVITÉ 2

1 **1.** • Si $x \in [0\,;1[$, $E(x)=0$;

• Si $x \in [1\,;2[$, $E(x)=1$.

2. a) $E(1)=1$.

b) E n'a pas pour limite E(1) en 1, car $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

3. $E(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0\,;1[\\ 1 \text{ si } x \in [1\,;2[\\ 2 \text{ si } x \in [2\,;3[\\ 3 \text{ si } x \in [3\,;4[\\ 4 \text{ si } x \in [4\,;5[\end{cases}$

a) La fonction E est discontinue en 1, 2, 3 et 4.

b) E n'est pas continue sur $]3\,;5[$, car 4 est un point de discontinuité.

2 **1.** $f([0\,;2]) = [0\,;4]$; $f([-2\,;2]) = [0\,;4]$; $f([-2\,;4]) = [0\,;16]$; $f(]-\infty\,;2]) = \mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. $E(I) = \{0\,;1\}$.

Travaux dirigés (page 39)

TD 1

1 **1. a)** $f(x) - (x+2) = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

b) $\dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, donc C_f est au-dessus de Δ pour $x > 0$ (on étudie le comportement de f en $+\infty$).

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc Δ' = Δ et C_f est en dessous de Δ' pour $x < 0$.

2. a) Pour tout $x > -3$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x+3}$.

b) $\Delta : y = 2x - 1$.

$\dfrac{3}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x > -3$, donc sur $]-3\,;+\infty[$, Δ est au-dessus de C_f.

2 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x^2] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.

b) À l'infini ($+\infty$ et $-\infty$), la courbe C_f et la parabole P d'équation $y = x^2$ sont de plus en plus « proches » l'une de l'autre.

c) $\dfrac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, donc C_f est au-dessus de $\mathcal{P}$ pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$.

TD 2

1 **1. a)** L'aire du secteur circulaire OAM est $\dfrac{h \times r^2}{2}$ avec $r = 1$.

b) $\text{Aire(OAM)} = \dfrac{\text{M}m \times \text{OA}}{2} = \dfrac{\sin h}{2}$.

c) Dans l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\cos h}$, [AT] est l'image de [Mm] donc $\text{AT} = \dfrac{\sin h}{\cos h}$ et l'aire du triangle OAT est $\dfrac{\text{OA} \times \text{AT}}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin h}{\cos h}$.

d) $\dfrac{\sin h}{2} \leqslant \dfrac{h}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin h}{\cos h}$ soit, pour tout h de $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\sin h \leqslant h \leqslant \frac{\sin h}{\cos h}.$$

e) $h > 0$ donc la première inégalité équivaut à $\frac{\sin h}{h} \leqslant 1$. $\cos h$ et h sont strictement positifs, donc la seconde inégalité équivaut à $\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h}$, et donc, pour tout h de $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h} \leqslant 1$.

2. Cela résulte de : pour tout h, $\cos(-h) = \cos h$ et $\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h}$.

3. Le théorème d'encadrement et le fait que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ permettent de conclure que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

2 **1. a)** $\frac{\cos h - 1}{h} = -2\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$.

b) $\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \sin \frac{h}{2}$, donc,

puisque $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, lorsque h est voisin de 0, $\frac{\cos h - 1}{h}$ est voisin de $-\sin \frac{h}{2}$.

c) Il résulte de la remarque précédente que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-\sin \frac{h}{2}\right) = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin 0 = 0$$

2. $x \to \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cosh - \cos 0}{h - 0} = \sin 0 = 0.$

TD 3

1 **1. a)** La fonction f (polynôme) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2$. Pour tout x de $[0 ; 1]$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ (et sur $\mathbb{R}$…).
De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$, donc il existe un unique réel $\alpha \in]0 ; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. a) $f\left(\frac{u_0 + v_0}{2}\right) = f(0{,}5) = 0{,}125$, donc $u_1 = 0$ et $v_1 = 0{,}5$.

$f\left(\frac{u_1 + v_1}{2}\right) = f(0{,}25) \approx -0{,}48$, donc $u_2 = 0{,}25$ et $v_2 = 0{,}5$.

b) $f\left(\frac{u_2 + v_2}{2}\right) = f(0{,}375) \approx -0{,}19$, donc :

$$u_3 = 0{,}375 \text{ et } v_3 = 0{,}5.$$

$f\left(\frac{u_3 + v_3}{2}\right) = f(0{,}4375) \approx -0{,}041$, donc :

$$u_4 = 0{,}4375 \text{ et } v_4 = 0{,}5.$$

$f\left(\frac{u_4 + v_4}{2}\right) = f(0{,}46875) \approx -0{,}040$, donc :

$$u_5 = 0{,}4375 \text{ et } v_5 = 0{,}46875.$$

c) Par récurrence : $v_0 - u_0 = 1$, donc P(0) est vraie.
Supposons P(n) vraie : $v_n - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• Soit $u_n + 1 = u_n$ et $v_n + 1 = \frac{u_n + v_n}{2}$, auquel cas :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

soit $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$, auquel cas :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

• De plus, pour tout n, $u_n \leqslant \alpha \leqslant v_n$ donc :

$$v_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour obtenir un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3}, il faut et il suffit de choisir n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3}$, soit $2^n \geqslant 1000$, donc $n \geqslant 10$ car $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1\,024$.
$u_{10} = 0{,}453\,125$; $v_{10} = 0{,}454\,101\,562\,5$.
(À 10^{-7} près par défaut, $\alpha = 0{,}453\,397\,6$.)

d) Pour tout n, $0 \leqslant v_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et

$0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Le théorème d'encadrement (vu en 1re) permet de conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite α. Ceci démontre le théorème 7 (dans le cas particulier).

2 **3. a)** $\alpha = 0{,}867$ à 10^{-3} près par défaut.
b) $\alpha = -2{,}094\,5$ à 10^{-4} près par défaut.

Corrigés des exercices

Maîtriser le cours (page 44)

1. 2. 3. Limite d'une fonction

1

limite	en $-\infty$	en $+\infty$
a)	$-\infty$	$+\infty$
b)	$-\infty$	$-\infty$
c)	$+\infty$	$-\infty$

2 *Corrigé dans le manuel.*

3 **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$;

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4 **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$.

5 **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$.

6 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

7 *Corrigé dans le manuel.*

8 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

$f(x) > 10^3 \Leftrightarrow 5x - 1 > 10^3(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 1\,000x^2 - 2\,005x + 1\,001 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{641} - 401}{400} < x < \dfrac{\sqrt{641} + 401}{400}$,

et on peut prendre $\alpha = 0{,}07$.

9 $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 4$.

$3{,}95 < f(x) < 4{,}05 \Leftrightarrow 2{,}95x < 14{,}85$ et $3{,}05x > 15{,}1$

$\Leftrightarrow 4{,}967\,21\ldots < x < 5{,}033\ldots$

et on peut prendre $I =]4{,}97 ; 5{,}03[$.

10 *Corrigé dans le manuel.*

11 • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$;

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

La droite d_1 : $y = -2$ est asymptote horizontale et la droite d_2 : $x = -1$ est asymptote verticale.

• $f(x) + 2 = \dfrac{2}{x+1}$. La courbe est au-dessus de d_1 si et seulement si $x > -1$.

12 *Corrigé dans le manuel.*

13 **a)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = 0$.

14 **a)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$;

pas de limite en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \pi + 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

15 *Corrigé dans le manuel.*

16 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

17 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4. Théorèmes de comparaison

18 *Corrigé dans le manuel.*

19 Pour tout réel $x > -1, x+1 > 0$ et $-1 < \cos x < 1$,

donc $\dfrac{-1}{x+1} < \dfrac{\cos x}{x+1} < \dfrac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x+1} = 0$.

20 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

21 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{4} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

22 Pour tout réel x, $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$

donc $1 \leqslant 2 - \cos x \leqslant 3$ et $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2 - \cos x} \leqslant 1$ et pour

$x > -1$, $\dfrac{x+1}{3} \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

23 Pour tout réel x, $\sin x \leqslant 1$, donc :

$$-5\sin x \geqslant -5 \text{ et } x^2 - 5\sin x \geqslant x^2 - 5.$$

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 5) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 5\sin x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty.$$

24 En $+\infty$ $(x > 0)$: $-x \leqslant x \sin x \leqslant x$

soit $x^2 - x \leqslant f(x) \leqslant x^2 + x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$ $(x < 0)$: $x \leqslant x \sin x \leqslant -x$

soit $x^2 + x \leqslant f(x) \leqslant x^2 - x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

25 **1.** $f(x) = \dfrac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$.

2. a) Pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{1+x} > \sqrt{x}$,

donc $0 < 2\sqrt{x} \leqslant \sqrt{1+x} + \sqrt{x} \leqslant 2\sqrt{1+x}$,

et $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant f(x)$ N $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0$, donc (*théorème d'encadrement*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Le résultat pouvait se déduire directement de la question **1**.

26 **1.** Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc, $x - 1$ étant strictement positif,

$$\frac{2x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x+1}{x-1}.$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$, donc (*thèorème d'encadrement*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

5. Limites d'une fonction composée

27 *Corrigé dans le manuel.*

28 **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+1}{x^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

b) Sur $]-1\,;1[$, $1 - x^2 > 0$; $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x^2) = 0$,

$\lim\limits_{x \to -1} (1 - x^2) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$.

29 **a)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

30 **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

31 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{\pi}{x}} \times \pi$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pi$.

32 Zoom sur le théorème 7

1. a) f est un polynôme donc dérivable sur I et $f'(x) = 3x^2 + 2$.

b) Pour tout x de I, $f'(x) > 0$: f est donc strictement croissante sur I.

f est dérivable donc continue et strictement croissante sur I : nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème 7.

Comme de plus $f(0) \times f(3) < 0$, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans I.

2. a) g n'est pas continue en I donc le théorème 1 ne s'applique pas.

b) Sur $[0\,;1[$, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ et sur $[1\,;2]$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ ce qui est impossible ; donc l'équation $g(x) = 0$ admet bien une unique solution dans J.

6. Asymptotes obliques

33 *Corrigé dans le manuel.*

34 **a)** $f(x) - x = \dfrac{\sin x}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$: Δ est bien asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour $x > 0$, $\dfrac{\sin x}{x}$ est du signe de $\sin x$, donc positif sur tout intervalle de la forme $[2k\pi\,;(2k+1)\pi]$ et négatif sur tout intervalle de la forme $[(2k-1)\pi\,;2k\pi]$: la courbe coupe une infinité de fois son asymptote (même chose en $-\infty$).

b) $f(x) - (3x+7) = -\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{\sqrt{|x|}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{\sqrt{|x|}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (3x+7)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (3x+7)] = 0$: Δ est bien asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, pour tout réel x non nul, $-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}} < 0$: la courbe est toujours en dessous de son asymptote Δ.

35 **a)** $f(x) - (2x+1) = \dfrac{1}{x-4}$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-4} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-4} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)] = 0$: Δ est bien asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, $\dfrac{1}{x-4} > 0 \Leftrightarrow x > 4$, la courbe est au-dessus de Δ pour $x > 4$ et en dessous pour $x < 4$.

b) $f(x) - (x-2) = -\dfrac{3}{(x+1)^2}$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x+1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x+1)^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$: Δ est bien asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

D'autre part, pour tout réel $x \neq -1$, $-\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0$, la courbe est toujours en dessous de son asymptote Δ.

7. et 8. Fonctions continues

36 *Corrigé dans le manuel.*

37 f, fonction polynôme, est continue sur $\mathbb{R}$. Sur $]-\infty\,;0]$, f est strictement croissante, $f(]-\infty\,;0]) =]-\infty\,;1]$ qui contient -1 : $f(x) = -1$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;0]$.

De la même manière, sur $\mathrm{I} =]0\,;2]$ et sur $\mathrm{J} =]2\,;+\infty]$, f est strictement monotone et -1 appartient à $f(\mathrm{I})$ et $f(\mathrm{J})$ donc $f(x) = -1$ admet une unique solution dans I et dans J : au total, l'équation admet donc trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ et trois seulement.

38 **1.** $f(-1) = -\dfrac{3}{2}$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$; $f(0) = -\dfrac{1}{2}$; $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

2. On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur $\left[-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]$, $\left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$ et $[0\,;1]$.

39 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1).$$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1\,;1]$.

b)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

3. f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]-2\,;-1[$, $]-1\,;1[$ et $]1\,;2[$ dont les images sont respectivement $]-1\,;3[$, $]-1\,;3[$ et $]-3\,;-1[$ qui contiennent tous 0.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans chacun des intervalles :

$$]-2\,;-1[\,,\ ]-1\,;1[\ \text{ et }\ ]1\,;2[\,.$$

Apprendre à chercher (page 47)

40 **Un changement de variable**

Les outils :

- Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en zéro.
- Dérivée de la fonction sinus.

Les objectifs :

- Savoir lever une indétermination.
- Savoir reconnaître le taux d'accroissement d'une fonction dérivable usuelle.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sin 3x = 0$, d'où la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

2. Si $\mathrm{X} = 3x$, alors $\dfrac{\sin 3x}{x} = 3\dfrac{\sin \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{X} = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$.

3. Autre solution :

Si $g(x) = \sin 3x$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = g'(0) = 3$.

41 **Courbes asymptotes**

Les outils :
- Limite à l'infini d'une fonction rationnelle.
- Tracé de courbes.

Les objectifs :
- Savoir trouver une fonction usuelle dont la courbe représentative est « proche » de celle de la fonction étudiée.
- Savoir montrer qu'une courbe asymptote n'est pas nécessairement une droite.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x} = +\infty$.

2. $[f(x) - x^2] = \dfrac{1}{x+2}$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$.

3. Pour x fixé dans $]-2\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x+2}$ représente la distance (dans un repère orthonormé) entre les deux points d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.
D'après **2.**, cette distance tend vers 0, les deux courbes sont « de plus en plus proches » lorsque x tend vers $+\infty$.

42 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) $f(x) - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$.

Pour $x \neq 0$, $g(x) - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - x] = \dfrac{1}{2}$.

Si $f(x)$ se comporte comme x pour les « grandes valeurs » de x, (la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f), il n'en est pas de même pour $g(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right] = 0$: $g(x)$ se comporte comme $x + \dfrac{1}{2}$ pour les « grandes valeurs » de x (la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de g).

43 **Polynôme de degré impair**

Les outils :
- Limite à l'infini d'une fonction polynôme.
- Théorème sur les fonctions continues strictement monotones.

Les objectifs :
- Savoir montrer que tout polynôme de degré impair a au moins une racine.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires.

2. a) • $a_n > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$.

• $a_n < 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$.

b) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3. Pour tout polynôme P de degré impair, l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ a une solution (au moins).

Remarque :
$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ a trois solutions et $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ a deux solutions.

Pour progresser (page 48)

Limites de fonctions

44 *Corrigé dans le manuel.*

45 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

$x^2 - 4$ s'annule en -2 et 2.
De plus, $x^2 - 4x - 12$ s'annule en -2 donc, pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x-6)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-6}{x-2}$$

et $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2$.

Puisque $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4x - 12) = -16$,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
1 étant racine du numérateur et du dénominateur, on est en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ » en 1 :

$f(x) = \dfrac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}$ et donc pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+2}.$$

Et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{4}{3}$.
$x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$, donc :

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty.$$

46 **a)** En $+\infty$ et en $-\infty$, $f(x)$ est la somme de deux termes de limites nulles :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

On évite les formes indéterminées liées à la somme en écrivant $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$.

$x^2 - 9 < 0$ signifie que $x \in]-3\,;3[$, et donc puisque $\lim\limits_{x\to -3}(x+1) = -2$, alors :

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty.$$

De même, puisque $\lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 4$, alors :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

1 étant racine du numérateur et du dénominateur, on est en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ » en 1 : pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{4}{3}$.

47 **a)** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $2x-1 \leqslant f(x) \leqslant 2x+1$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure :

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to -\infty}(2x+1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1, \text{ donc } 1 \leqslant (2+\cos x) \leqslant 3.$$

Pour $x > 0$, $x^3 \leqslant f(x) \leqslant 3x^3$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure :

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty, \text{ donc } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Pour $x < 0$, $3x^3 \leqslant f(x) \leqslant x^3$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conclure :

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty, \text{ donc } \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

48 **a)** La fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$. Pour tout x, $f(x) \geqslant 3x-2$ et le théorème 3 (de comparaison à l'infini) permet de conlure : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Sur son domaine de définition $]1\,;+\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

49 • Pour tout réel x, $1 \leqslant 3 + 2\sin x \leqslant 5$ donc

$$\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{3+2\sin x} \leqslant 1 \text{ et } \frac{x^2}{5} \leqslant \frac{x^2}{3+2\sin x} \leqslant x^2.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{5} = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = +\infty.$$

De même, pour tout réel x, $\dfrac{x-1}{5} \leqslant \dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{5} = +\infty$, alors

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} = +\infty.$$

50 • **1.** $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{8}{x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$.

En -1, $(x+1)$ tend vers 0 et le signe de $(x+1)$ est constant à gauche et à droite de -1, donc :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$$

En 2, $(x-2)$ tend vers 0 et le signe de $(x-2)$ est constant à gauche et à droite de 2, donc :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$$

51 • **1.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ et $(x-1)^2$ est toujours positif, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

2. $\dfrac{x}{(x-1)^2} > 10^6 \Leftrightarrow 10^6x^2 - (2\times 10^6+1)x + 10^6 < 0$.

Les racines du trinôme ont pour valeurs approchées 0,999 000 4 et 1,001 000 5.

Donc on peut choisir $I =]0{,}999\,1\,;1{,}000\,9[$.

52 • **a)** Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$,

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

b) Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Pour $x < 0$,

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \frac{2x}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2x} = \frac{-2}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+2},$$

donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

53 • *Corrigé dans le manuel.*

54 • **a)** En $+\infty$, nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ; $f(x) = \dfrac{-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$.

En 1, nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

$$f(x) = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ et } \lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

b) En $+\infty$, nous somme en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour $x>0, f(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ et $\lim f(x)=1$.

En -1, nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$.

55 • **a)** Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » ; $f(x)=5\times\dfrac{\sin 5x}{5x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} 5x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, le théorème 4 (limite d'une fonction composée) nous permet de conclure :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=5\times 1=5.$$

b) En 0, nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » ; $f(x)=\sqrt{x}\times\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\times 1=0$.

Pour tout réel x, $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$,

donc $\dfrac{-1}{\sqrt{x}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, donc, d'après le théorème d'encadrement (*théorème 1*), $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

56 • Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » ; $f(x)=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}$

et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

57 • Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x\neq 0, f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{x^2}{1-\cos x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$, alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\times 2=2.$$

58 • Nous sommes en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x\neq 2$,

$$f(x)=\frac{(4-3x+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2+\sqrt{3x-2})(2x+5-9)}$$
$$=\frac{3(2-x)(\sqrt{2x+5}+3)}{-2(2-x)(2+\sqrt{3x-2})}=-\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}},$$

et donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{9}{4}$.

59 • **a)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{1}{3}$, donc, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (*théorème 4*), $\lim\limits_{x\to +\infty} f(f(x))=-\dfrac{1}{3}$.

b) $f(f(x))=\dfrac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}=\dfrac{-2x-18}{6x+22}=-\dfrac{x+9}{3x+11}$.

On retrouve bien $\lim\limits_{x\to +\infty} f(f(x))=-\dfrac{1}{3}$.

60 • $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=3$. En remarquant que $f(x)=3+\dfrac{8}{x-3}$, pour tout x de $\mathrm{I}=]3\,;+\infty[$, $f(x)>3$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$ et, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (*théorème 4*), $\lim\limits_{x\to +\infty} f(f(x))=+\infty$.

Asymptotes

61 $f(x)=2x-5-\dfrac{10}{x-3}$.

62 • *Corrigé dans le manuel.*

63 • **a)** f est définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x}=0$: la droite d'équation $y=1+\dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-\infty$: la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{x^2+3}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{x^2+3}=0$, la droite d'équation $y=1$ est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et $+\infty$.

64 • f est définie sur $\mathbb{R}-\{-1\,;1\}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$: la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to -1}(x^2+6x+1)=-4$ et $x^2-1<0\Leftrightarrow x\in\,]-1\,;1[$.

Il en résulte $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$: la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+6x+1)=8$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$: la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

65 • f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

Pour $x \neq 1$, $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$: la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 1) = -1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

66 • f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x, $f(x) = x + \dfrac{-2x+1}{x^2+2}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2+2} = 0$: la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

67 • • Pour $x > -1$ $(x \neq 0)$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x}$;

• Pour $x < -1$, $f(x) = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = 0$, la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

68 • **1. a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Le calcul de la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$ nous conduit à la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

$$f(x) - (x+1) = \frac{x^2 + 2x + 4 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)} = \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4} + (x+1)},$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$.

b) La droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c) Pour tout x :

$$\sqrt{x^2+2x+4} > \sqrt{x^2+2x+1} = |x+1| \geqslant x + 1 ,$$

$\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{-x\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2}}$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

$$f(x) - (-x) = \sqrt{x^2+2x+4} + x = \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4} - x} = \frac{2 + \dfrac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2}} - 1}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x)] = -1$.

c) La droite Δ' d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

69 • **1.** $f(x) = \dfrac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

2. $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$;

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$ est toujours strictement positif : $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote oblique Δ.

70 • **1.** Pour $|x| \geqslant \dfrac{1}{2}$, $|4x^2 - 1| = 4x^2 - 1$, donc :

$$f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1} .$$

Pour $x > -\dfrac{1}{2}$, $f(x) = x + 2x\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x^2}}$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour $x < -\dfrac{1}{2}$, $f(x) = x - 2x\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x^2}} = x\left(1 - 2\sqrt{1 - \dfrac{1}{4x^2}}\right)$.

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{4x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Si $x > \dfrac{1}{2}$,

$$f(x) - 3x = \sqrt{4x^2-1} - 2x = \frac{-1}{\sqrt{4x^2-1} + 2x},$$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = 0$.

b) Si $x < -\dfrac{1}{2}$, $f(x) + x = \sqrt{4x^2-1} + 2x = \dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1} - 2x}$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = 0$.

3. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = 0$, donc la droite Δ_1 d'équation $y = 3x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = 0$, donc la droite Δ_2 d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b) Il résulte du **2. a)** que :

• si $x > \dfrac{1}{2}$, $f(x) - 3x = \dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1} + 2x} < 0$,

donc $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ_1 ;

• si $x < -\dfrac{1}{2}$, $f(x) + x = \dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1} - 2x} > 0$,

donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ_2 .

71 **1. a)** $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$

$$=\frac{-9}{\sqrt{x^2+9}\,(x+\sqrt{x^2+9})}\ ;$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$.

b) Pour tout x, $\dfrac{-9}{\sqrt{x^2+9}\,(x+\sqrt{x^2+9})}<0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est située sous l'asymptote oblique Δ.

2. $f(x)-(x-1)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1$

$$=\frac{-9}{\sqrt{x^2+9}\,(x-\sqrt{x^2+9})}\ ;$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)]=0$, donc la droite Δ' d'équation $y=x-1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

Courbes asymptotes

72 $f(x)-(-2x^2)=\dfrac{1}{x+1}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et la parabole $\mathscr{P}$ d'équation représentative de $x\mapsto-2x^2$ sont asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

Puisque $\dfrac{1}{x+1}$ est du signe de $x+1$, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{P}$ sur $]-\infty\,;-1[$ et au-dessus sur $]-1\,;+\infty[$.

73 f est définie sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout $x>0$,

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\ \text{ donc } f(x)-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et la courbe Γ représentative de $x\mapsto\sqrt{x}$ sont asymptotes en $+\infty$.

Puisque pour tout réel $x>0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est strictement positif, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Γ.

Continuité

74 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, f est continue sur $]-1\,;0[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\,]-1\,;0[$ tel que $f(c)=0$.
On peut prouver l'unicité de c car sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x)=3x^2+1>0$$

donc f est strictement croissante.

75 **1.** $f'(x)=\dfrac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+1)^2}$.

Si $x>-\dfrac{3}{2}$, $f'(x)>0$: f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$.

2.

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$	0	+	‖
f	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$ ‖

3. $f\left(\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[\right)=\left[\dfrac{27}{4}\,;+\infty\right[$, f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$, 10 appartient à $\left[\dfrac{27}{4}\,;+\infty\right[$, donc l'équation $f(x)=10$ a une solution unique dans l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right[$.

76 $f'(x)=2x-2$;

x	0		1		3
$f'(x)$		−	0	+	
f	-3	↘	-4	↗	0

$f(\mathrm{I})=[-4\,;0]$.

77 • f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ car $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

• $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
f	1	↘	0	↗	1

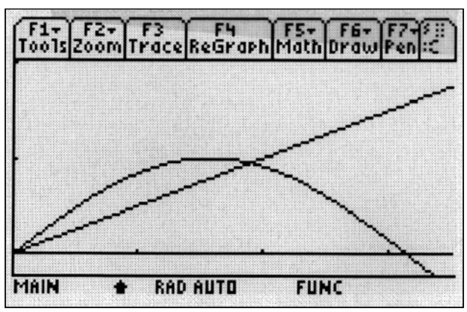
$f(\mathbb{R})=[0\,;1[$.

78 Pour chercher la limite lorsque x tend vers 0, on utilise l'expresssion conjuguée.

$f(x)=\dfrac{1-(x^2+1)}{x\,(1+\sqrt{x^2+1})}=\dfrac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ et $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

f est continue en 0 équivaut à dire que $f(0)=0$. D'autre part, f est continue car composée de fonctions continues (polynôme, racine carrée, somme et quotient). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ équivaut à $m=0$.

79 **1.**



On peut conjecturer que l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ admet une seule solution dans I.

2. a) Somme de deux fonctions dérivables sur I, f est dérivable sur I.

Pour tout x de I, $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc f' s'annule pour $x = \frac{\pi}{3}$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

3. a) Sur $\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, f est croissante et strictement positive et donc ne s'annule jamais (car $f(x) > 0$).

Sur $\left]\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$, f est continue strictement décroissante et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

L'équation (équivalente) $\sin x = \frac{x}{2}$ admet donc une unique solution a dans l'intervalle I.

b) $1{,}895\,4 < \alpha < 1{,}895\,5$.

Prendre toutes les initiatives

80 • **1.** Pour $x > 1$, $f(x) > x^4 > x$ donc il suffit de prendre $A = 10^6$.

2. $f(x) = x^2(2x^2 - x - 1)$.

La fonction $g : x \mapsto 2x^2 - x - 1$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}\,; +\infty\right[$. Comme $g(2) = 5$, pour $x > 2$, $f(x) > 5x^2$.

Il suffit donc de prendre A tel que $5A^2 \geqslant 10^6$ soit $A \geqslant 20\,000$. Le réel 142 convient.

81 • Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)(x-3)}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+3}}$ et $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$.

82 • $f(x) = x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - \sqrt{3}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

83 • **1.** $f(x) = x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x+1}} - 1\right) = x\dfrac{-\dfrac{1}{x+1}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x+1}} + 1}$

$$= \frac{-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x+1}} + 1}$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

84 • La fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x, $f'(x) = x^{n-1}[(n+1)x - 2n]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$, f est continue et strictement croissante. D'autre part, f est strictement décroissante sur $\left[1\,;\frac{2n}{n+1}\right]$ et $f(1) = 0$, donc $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

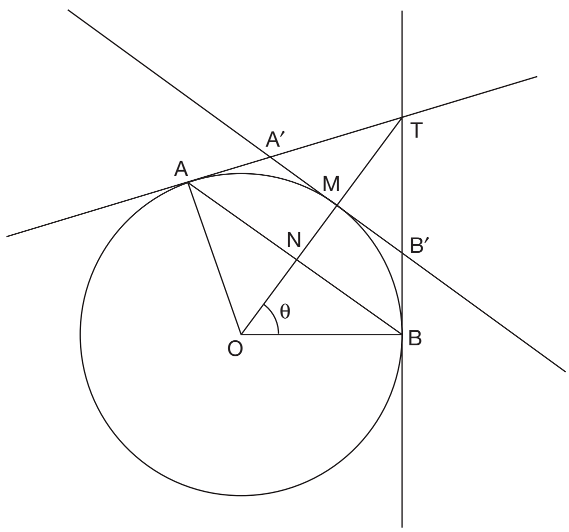
Comme $f(2) = 1$, le théorème 7 nous assure de l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$.

85 • La fonction g définie sur $I = [0\,;1]$ par $g(x) = f(x) - x$ est continue sur I.

$g(0) = f(0) \geqslant 0$; $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

Le théorème 6 nous permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel a de I tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(a) = a$.

86 •



Comme $OT = \dfrac{r}{\cos\theta}$ et $ON = r\cos\theta$, on en déduit :

$$TN = \frac{r}{\cos\theta} - r\cos\theta\ ;\ TM = \frac{r}{\cos\theta} - r.$$

$$\frac{\text{Aire A'TB'}}{\text{Aire ATB}} = \left(\frac{TM}{TN}\right)^2 = \left(\frac{\dfrac{1}{\cos\theta} - 1}{\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right) = \left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2.$$

Dire que A tend vers B, équivaut à dire que θ tend vers 0 et $\lim\limits_{\theta \to 0}\left(\dfrac{1}{1+\cos\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

La limite de $\dfrac{\text{Aire (A'TB')}}{\text{Aire (ATB)}}$ lorsque A tend vers B est donc $\dfrac{1}{4}$.

87 • **1.** f est paire (son domaine de définition $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = f(x)$) : la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe $(\mathrm{O}; \vec{j})$ comme axe de symétrie.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f(x) - x = \dfrac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$, donc la droite d d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Pour tout réel x, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} > 0$: $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote oblique d.

4. $\mathrm{M}(x ; y) \in \mathscr{H} \Leftrightarrow y = \sqrt{1+x^2}$ ou $y = -\sqrt{1+x^2}$
$\Leftrightarrow y^2 = 1 + x^2$.

5. $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{X}\vec{u} + \mathrm{Y}\vec{v}$

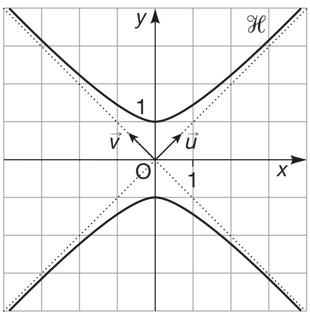
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{X} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{X} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y}\right)\vec{j},$$

et, compte-tenu de l'unicité de la décomposition :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{X} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{X} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y}.$$

$y^2 - x^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2 = \mathrm{XY} = 1$.

$\mathscr{H}$ est donc une hyperbole équilatère.



88 • **1. a)** • Si $x \in]-\infty ; -1[$, $f(x) = -x - 1 + \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

• si $x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

b) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• En -1 : si $x < -1$, alors $x^2 - 1 > 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

et si $1 > x > -1$, alors $x^2 - 1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

• En 1 : si $-1 < x < 1$, alors $x^2 - 1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

et si $x > 1$, alors $x^2 - 1 > 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

2. a) Si $x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) = -1 - \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$,

et si $x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$,

$f'(x) = 1 - \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$.

b) Si $x \in]-\infty ; -1[$, $f'(x) < 0$,
et si $x \in]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $(x^2 - 3)$, donc $f'(x)$ est négatif sur $]-1 ; 1[\cup]1 ; \sqrt{3}[$ et strictement positif sur $]\sqrt{3} ; +\infty[$.

c)

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1$	↗	$+\infty$

3. a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$: la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Sur $]1 ; +\infty[$, $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ est positif : $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$: la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

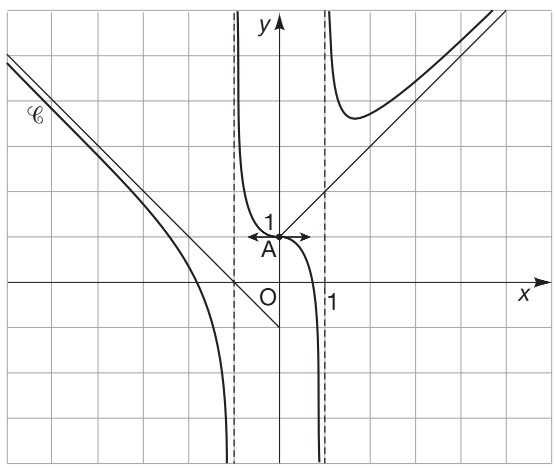
Sur $]-\infty ; -1[$, $\dfrac{x}{(x^2 - 1)}$ est négatif : $\mathscr{C}$ est en dessous de son asymptote.

b) $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$; la tangente en $\mathrm{A}(0 ; 1)$ à $\mathscr{C}$ a pour équation $y = 1$: elle est horizontale.

Sur $]-1 ; 1[$, $f(x) - 1 = x + \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ est du signe contraire de x. Donc si $0 < x < 1$, $\mathscr{C}$ est en dessous de T et si $-1 < x < 0$, alors $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

Remarque : A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

c)



4. Sur $]-1\,;1[$, f est continue (fonction rationnelle) et strictement décroissante car $f'(x)<0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

L'image par f de $]-1\,;1[$ est $]-\infty\,;+\infty[$, soit $\mathbb{R}$: d'après le théorème 7, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans $]-1\,;1[$.

$f(0,7)\times f(0,8)<0$, donc $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

89 ● **Partie A**

1. Si $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, et si $a<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. f étant continue, les limites trouvées en 1. permettent d'affirmer que quel que soit a non nul, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

3. 0 a au moins un antécédent par f : toute équation du troisième degré admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Pour tout réel x, f est dérivable et $f'(x)=6x^2-1$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{9}-1$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

2. Résoudre l'équation $2x^3=x+1$ revient à résoudre l'équation équivalente $f(x)=0$.

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}-1<0$ donc $f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)<0$.

Pour tout x de $\left[-\infty\,;\frac{\sqrt{6}}{6}\right[$, $f(x)<0$: l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

L'image par f de $\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\,;+\infty\right[$ contient 0. Sur cet intervalle $\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\,;+\infty\right[$, f est continue et strictement croissante : le théorème 7 nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution réelle.

3. 1 est solution « évidente » de l'équation $2x^3=x+1$.

Partie C

1. $f(0)=1$ et $f(1)=-3$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ donc (théorème 6) l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x)=3x^2+12x+1$.
f' s'annule pour $x_1=6-\sqrt{33}$ et $x_2=6+\sqrt{33}$.

x	$-\infty$		0	x_1	1	x_2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Sur $[0\,;x_1[$ f est strictement croissante et $f(0)=1$ donc f ne s'annule pas et de plus $f(x_1)>0$.

Sur $[x_1\,;1]$ f est continue, strictement décroissante et $f(x_1)\times f(1)<0$: l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I (théorème 7).

3. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ donc $\alpha\in\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.

4. $\alpha=0{,}528$ à 10^{-3} près par défaut.

C'est nouveau au bac (page 52)

90 **1.** Réponse **c)** : $f(x)=(x-1)^2(x-3)$.

2. Réponse **c)** car pour tout $x\neq 3$,
$$\frac{2x-1}{x-3}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2x+1}{x-3}.$$

3. Réponses **a)** car $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x-1}$ et

c) car $f(x)=x-1+\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$.

91 **1.** Faux.

Un contre-exemple : $f: x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $[1\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. Faux. Un contre-exemple : $f: x\mapsto -x$ et $g: x\mapsto 2x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\dfrac{1}{2}$.

3. Vrai.

92 **1.** Vrai.

2. Faux.

Un contre-exemple :

$f: x\mapsto\dfrac{1}{x}$ si $x<0$ et

$f: x\mapsto x-3+\dfrac{1}{x^2+1}$ si $x\geqslant 0$.

3. Vrai.

93 **1.** Le cours.

2. a) Sur $]1\,;+\infty[$, $|f(x)-3|=\dfrac{|\sin x+3|}{x-1}\leqslant\dfrac{4}{x-1}$.

b) $\dfrac{-4}{x-1}+3\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{4}{x-1}+3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.