

### Corrigés des exercices

Pour progresser

(page 14)

#### Généralités sur les suites

**1**  $v_1 = 2$  et  $v_2 = 5$ .

$$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 1 = 3(3v_n - 1) = 9v_n - 4.$$

**2**  $u_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+5}$  ;  $u_{n-3} = \frac{n-3}{n^2-6n+13}$  ;

$$u_{2n} = \frac{n}{2n^2+2}.$$

**Note** : Dans les exercices 3 à 5, on applique l'une des trois méthodes décrites page 15.

**3 a)** Pour  $n > 0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$  :  $(u_n)$  est décroissante.

**b)**  $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1} > 0$  :  $(u_n)$  est croissante.

**c)**  $u_n = f(n)$  avec  $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$  ;  $f'(x) = \frac{9}{(x+4)^2} > 0$ .

$f$  est croissante, donc  $(u_n)$  est croissante.

**4** Corrigé dans le manuel.

**5 a)**  $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$  :  $(u_n)$  est décroissante.

**b)**  $(u_n)$  change de signe à chaque indice, donc pas de monotonie.

**c)** Tous les termes de la suite sont positifs,

et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$  :  $(u_n)$  est croissante.

**6 a)**  $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$  :  $(u_n)$  est décroissante.

**b)**  $u_n = f(n)$  avec  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  ;  $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ .

$f$  est croissante, donc  $(u_n)$  est croissante.

**7 a)**  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$  :  $(u_n)$  est croissante.

**b)**  $u_n$  change de signe à chaque indice, donc pas de monotonie.

**8 a)**  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 > 1$  :  $(u_n)$  est croissante.

**b)**  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} < 0$  :  $(u_n)$  est décroissante.

**9 a)**  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2} = \frac{(n+1)}{n^2}$  ;

si  $g(x) = x^2 - x - 1$  ;  $g'(x) = 2x - 1$ , donc  $n^2 > n + 1$  dès que  $n \geq 1$  et  $(u_n)$  est croissante.

**b)**  $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ , donc pas de monotonie.

**10** Corrigé dans le manuel.

**11**  $v_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ , d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0; \end{aligned}$$

$(v_n)$  est croissante.

**12 a)**  $u_0 = 8$  ;  $u_1 = 8$  et  $u_n = 8$  pour tout  $n$ , donc  $(u_n)$  est constante.

**b)**  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = \frac{7}{2}$ , d'où  $u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$  ;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(u_n - u_{n-1});$$

$(u_{n+1} - u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $\frac{3}{2}$  et de raison  $\frac{3}{4}$ . Donc  $u_{n+1} - u_n > 0$  et  $(u_n)$  est croissante.

**13** Oui, car pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) &= (u_{n+1} - u_n) \\ &\quad + (v_{n+1} - v_n) \geq 0. \end{aligned}$$

**14** •  $(u_n)$  est décroissante,  $(v_n)$  est croissante.

•  $u_n + v_n = \frac{n-1}{n^2}$  ;  $(u_n + v_n)$  est décroissante pour  $n \geq 2$ .

•  $u_n v_n = -\frac{1}{n^3}$  ;  $(u_n v_n)$  est croissante.

**15** • Pour tout  $n$ ,  $v_{n+1} - v_n = 3(u_{n+1} - u_n) = 3r$  et  $w_{n+1} - w_n = u_{2n+2} - u_{2n} = 2r$ .

### Suites arithmétiques Suites géométriques

**16** Puisque le triangle est un rectangle, la mesure la plus grande est 90 en degrés. Si on note  $r$  la raison de la suite arithmétique, les autres mesures sont  $90 - r$  et  $90 - 2r$ .

Comme  $(90 - r) + (90 - 2r) = 90$ , il vient  $3r = 90$ , soit  $r = 30$  et les mesures sont 30, 60 et 90.

**17** •

• Par récurrence,  $v_n > 0$ .

•  $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1+v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = u_n + 1$  ;  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 1.

**18** Comme  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$ ,  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ . On peut aussi écrire  $u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

**19** • Comme  $u_5 = (5-2)r + u_2$ , on trouve  $r = -18$ .

• Puis  $u_{20} = u_5 + (20-5)(-18) = -283$ .

**20** • De  $u_{10} = u_7 q^3$ , on déduit  $q^3 = \frac{25 \times 1\,080}{2\,197}$ , puis :

$$q = \frac{30}{13}.$$

•  $u_{30} = u_{10} q^{20} = \frac{25}{2\,197} \left(\frac{30}{13}\right)^{20}$ .

**21** Corrigé dans le manuel.

**22**  $u_{25} = u_0 + 25r = -3 - 50 = -53$  ;

$u_{125} = u_0 + 125r = -3 - 250 = -253$  ;

$$S = \frac{(-53 - 253) \times 101}{2} = -15\,453.$$

**23** • 1.  $u_n = -2 \times 3^{n-1}$ .

2.  $S = -28 \times 3^{29}$ .

3. De  $v_n = u_{2n}$ , on déduit que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 9 et de premier terme  $v_1 = u_2 = -6$ .

$$\text{Et } S = \frac{3}{4} (1 - 9^n).$$

**24**  $S = u_3 \left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = 1 \times 2^3 \left(\frac{-255}{-1}\right) = 2\,040$ .

**25** En regroupant :

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{9}{2}\right) + (1 + 2 + \dots + 10)$$

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\right) \times 5}{2} + \frac{(1+10) \times 10}{2} = \frac{25}{2} + 55 = \frac{135}{2}.$$

**26** • On reconnaît une suite géométrique de premier terme 0,02 et de raison  $-5$ .

Le dernier terme  $u_n = 312,5 = u_0(-5)^n$  permet de trouver  $(-5)^n = 15\,625$  ou  $n = 6$ .

$$\text{Alors } S = 0,02 \left(\frac{1 - (-5)^7}{1 - (-5)}\right) = 260,42.$$

**27** • 1.  $a = 2 + \sqrt{3}$  et  $b = 2 - \sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} 2. v_{n+1} &= u_{n+2} - (2 + \sqrt{3})u_{n+1} \\ &= (4u_{n+1} - u_n) - (2 + \sqrt{3})u_{n+1} \\ &= (2 - \sqrt{3})u_{n+1} - u_n \\ &= (2 - \sqrt{3})[u_{n+1} - (2 + \sqrt{3})u_n] \\ &= (2 - \sqrt{3})v_n. \end{aligned}$$

$(v_n)$  est géométrique de raison  $2 - \sqrt{3}$  et de premier terme  $v_0 = -2\sqrt{3}$ .

3. De même,  $(w_n)$  est géométrique de raison  $2 + \sqrt{3}$  et de premier terme  $w_0 = 2\sqrt{3}$ .

4.  $v_n = -2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^n$  et  $w_n = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})^n$ .

De  $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - au_n \\ w_n = u_{n+1} - bu_n \end{cases}$ , on déduit  $v_n - w_n = (b-a)u_n$ ,

et, en définitive :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{b-a} (v_n - w_n) \\ &= \frac{1}{-2\sqrt{3}} [-2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})^n - 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})^n] \\ &= (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

**28** • Si on note  $q$  la raison, alors  $a = \frac{b}{q}$  et  $c = bq$  et les hypothèses donnent :

$$\begin{cases} b^3 = 343 \\ \frac{b}{q} + b + bq = 36,75 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 7 \\ q^2 - 4,25q + 1 = 0 \end{cases}$$

Soit  $q = 4$  ou  $q = 0,25$ . Les triplets solutions sont :  $(1,75 ; 7 ; 28)$  et  $(28 ; 7 ; 1,75)$ .

**29** • On a  $b = aq$  et  $c = aq^2$ .

La seconde hypothèse permet d'écrire, en notant  $r$  la raison de la suite arithmétique,  $2b = 3a + r$  et  $c = 3a + 2r$ .

D'où la relation  $c = 3a + 2(2b - 3a) = 4b - 3a$ , soit :

$$aq^2 = 4aq - 3a \text{ ou } q^2 - 4q + 3 = 0,$$

c'est-à-dire  $q = 1$  ou  $q = 3$ .

**Vérifions :**

- si  $q = 1$ ,  $(a, a, a)$  et  $(3a, 2a, a)$  vérifient les hypothèses ;
- si  $q = 3$ ,  $(a, 3a, 9a)$  et  $(3a, 2a, a)$  vérifient les hypothèses.

**30** Corrigé dans le manuel.

**31** La suite définie pour tout  $n$  par :  $v_n = 9A_n + 1$  est géométrique et  $v_n = 10^n$ .

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 9S_n + n = \frac{10^{n+1} - 10}{9} \text{ d'où,}$$

$$S_n = \frac{1}{9} \left[ \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right].$$

**32** 3.  $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{7}{4}(n+1) - \frac{7}{16}$

$$= 5u_n - 7n - \frac{7}{4}(n+1) - \frac{7}{16}$$

$$= 5 \left( u_n - \frac{7}{4}n - \frac{7}{16} \right) = 5v_n ;$$

$(v_n)$  est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme  $v_0 = 5 - 0 - \frac{7}{16} = \frac{73}{16}$ .

4.  $v_n = \frac{73}{16}(5)^n$ , puis  $u_n = \frac{73}{16}(5n) + \frac{7}{4}n + \frac{7}{16}$ .

5.  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= \frac{73}{16}(1+5+\dots+5^n) + \frac{7}{4}(1+\dots+n) + \frac{7}{16}(1+\dots+1)$$

$$= \frac{73}{16} \left( \frac{1-5^{n+1}}{1-5} \right) + \frac{7}{4} \left( \frac{(n+1)n}{2} \right) + \frac{7}{16}(n+1)$$

$$= \frac{73}{64}5^{n+1} + \frac{7}{8}n^2 + \frac{21}{16}n - \frac{45}{64}.$$

**Démontrer des égalités, des inégalités**

**33** 1. a) 1 ; 5 ; 14 ; 30.

b)  $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$ .

2. On note  $P_n$  la proposition «  $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  ».

•  $P_1$  est vraie car  $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 = S_1$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie. Alors :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

On vérifie que  $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$ , et :

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Donc la proposition est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

**34** On note  $P_n$  la proposition :

$$\ll 1 + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1 \gg.$$

•  $P_1$  est vraie car  $1 = 1$  et  $(1+1)! - 1 = 1$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie. Alors :

$$1 + 2 \times 2! + \dots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! [1 + (n+1)] - 1 = (n+1)! (n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1.$$

Donc  $P_{n+1}$  est également vraie.

• La proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n$  non nul.

**35** On note  $P_n$  la proposition «  $S_n = T_n$  ».

•  $P_1$  est vraie car  $S_1 = 1 \times 2 = 2$  et  $T_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie et on calcule  $S_{n+1}$ .

$$S_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{3}(n+3) = T_{n+1}.$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

• Et la proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n$  non nul.

**36** Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $P_n$  la proposition : «  $S_n = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$  ».

•  $P_2$  est vraie puisque  $S_2 = 1$  et  $(2-1)2^2 - 2 \times 2^{2-1} + 1 = 1$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie. Alors :

$$S_{n+1} = 1 + 2 \times 2 + \dots + (n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

Or on veut prouver que :

$$S_{n+1} = n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1$$

$$= 2n \times 2^n - n2^n - 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1.$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

• Et la propriété est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

**37** On note  $P_n$  la proposition :

$$\ll 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \gg.$$

•  $P_1$  est vraie car  $1 \times 2 \times 3 = 6$  et  $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 6$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie. Alors :

$$1 \times 2 \times 3 + \dots + n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}(n+4),$$

et  $P_{n+1}$  est vraie.

•  $P_n$  est donc vraie pour tout entier  $n$  non nul.

**38** • Soit  $P_n$  la proposition : «  $n! \geq 2^{n-1}$  ».

- $P_1$  est vraie car  $1! = 1$  et  $2^{1-1} = 1$ .
- On suppose que  $P_n$  est vraie. Alors, pour tout  $n \geq 1$  :  $(n+1)! = n! (n+1) \geq 2^{n-1} (n+1) \geq 2^{n-1} \times 2 = 2^n$ . Donc  $P_{n+1}$  est vraie.
- $P_n$  est donc vraie pour tout  $n \geq 1$ .

**Remarque** : Il y a  $(n-1)$  facteurs, dans le membre de gauche, supérieurs à 2 donc en multipliant...

**39** • La propriété est vraie pour  $n = 2$  car  $5^2 = 4^2 + 3^2$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n \geq 2$ ,  $5n \geq 4^n + 3^n$ .  
 $5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \geq 4 \times 4^n + 3 \times 3^n$  : la propriété est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

**40** • a) La propriété est vraie pour  $n = 1$  car  $(1+a)^1 = 1+a$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n \geq 1$ ,  $(1+a)^n \geq 1+na$ .  
 $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$  : la propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ .  
**b)** Si  $q > 1$ , alors il existe  $a > 0$  tel que  $q = 1+a$ , donc  $q^n \geq 1+na$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

**41** • 1. On note  $P_n$  la proposition : «  $3n^2 \geq (n+1)^2$  ».

- $P_2$  est vraie car  $3 \times 2^2 = 12$  et  $(2+1)^2 = 9$ .
- On suppose que  $P_n$  est vraie, alors :  
 $3(n+1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 \geq (n+1)^2 + 6n + 3 = n^2 + 8n + 4 \geq n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$ .

$P_{n+1}$  est vraie.

- Pour tout  $n \geq 2$ ,  $P_n$  est vraie.
  - 2. a) Notons  $P_n$  la proposition : «  $3^n \geq 2^n + 5n^2$  ».
  - Pour  $n = 1$ ,  $3 \geq 2 + 5$  est fausse.
  - Pour  $n = 2$ ,  $9 \geq 4 + 20$  est fausse.
  - Pour  $n = 3$ ,  $27 \geq 8 + 45$  est fausse.
  - Pour  $n = 4$ ,  $81 \geq 16 + 80$  est fausse.
  - Pour  $n = 5$ ,  $243 \geq 32 + 125$  est vraie.
- $n = 5$  est donc la plus petite valeur non nulle pour laquelle  $P_n$  est vraie.

**b)** Supposons que pour  $n \geq 5$ ,  $P_n$  est vraie et cherchons à savoir si  $P_{n+1}$  est vraie.

$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(2^n + 5n^2) \geq 2 \times 2^n + 5 \times 3n^2$ ,  
 et d'après le 1.,  $3n^2 \geq (n+1)^2$ .

D'où  $3^{n+1} \geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$  et  $P_{n+1}$  est vraie.

- $P_n$  est donc vraie pour tout  $n \geq 5$ .

**42** • 1. •  $3^0 = 1$  et  $(0+2)^2 = 4$  donc  $P_0$  est fausse.

- $3^1 = 3$  et  $(1+2)^2 = 9$  donc  $P_1$  est fausse.
- $3^2 = 9$  et  $(2+2)^2 = 16$  donc  $P_2$  est fausse.
- $3^3 = 27$  et  $(5+2)^2 = 25$  donc  $P_3$  est vraie.

2. •  $n \geq 3$ ; on suppose que  $P_n$  est vraie. Alors :

$$3^{n+1} = 3^n \times 3 \geq 3(n+2)^2 = 3n^2 + 12n + 12.$$

Il reste donc à prouver que :

$3n^2 + 12n + 12 \geq (n+3)^2$  ou  $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$ ,  
 ce qui est vérifié pour  $n \geq 3$ . Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

- Pour tout  $n \geq 3$ ,  $3n \geq (n+2)^2$ .

## Conjecturer puis démontrer

### 43 Pour apprendre à chercher

**Les outils :**

- Raisonnement par récurrence.

**Les objectifs :**

- Savoir conjecturer une propriété après le calcul des premiers termes.
- Savoir prouver la conjecture.

1.  $u_0 = 7$ ;  $u_1 = 52$ ;  $u_2 = 502$ ;  $u_3 = 5\,0002$ ;  $u_4 = 50\,002$ ;  $u_5 = 500\,002$ .

2. Lorsque  $n$  prend les valeurs 1, 2, 3, ..., il y a 0, 1, 2, ..., zéros entre le 5 et le 2.

3. a) En fait, on peut écrire pour  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  :

$$u_n = 5 \times 10^n + 2.$$

b) On suppose que cette proposition est vraie au rang  $n$ .  
 Alors  $u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5 \times 10^n + 2) - 18$

$$= 5 \times 10^{n+1} + 2.$$

$P_{n+1}$  est vraie et la proposition est vraie pour tout  $n$ .

**44** 1. •  $u_0 = 2$ ;  $u_1 = 1$ ;  $u_2 = -1$ ;  $u_3 = -5$ ;  $u_4 = -13$ ;  $u_5 = -29$ .

•  $u_1 - 3 = -2$ ;  $u_2 - 3 = -4$ ;  $u_3 - 3 = -8$ ;  $u_4 - 3 = -16$ ;  $u_5 - 3 = -32$ .

Il semble donc que  $u_n = 3 - 2^n$ .

2.  $u_{n+1} - 3 = (2u_n - 3) - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$ .

La suite  $(u_n - 3)$  est géométrique de raison 2 et de premier terme  $-1$ .

Donc  $u_n - 3 = -1 \times 2^n \Rightarrow 3 - 2^n = u_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**45** 1.  $u_0 = 3$ ;  $u_1 = 1$ ;  $u_2 = 3$ ;  $u_3 = 1$ ;  $u_4 = 3$ ;  $u_5 = 1$ .

Il semble donc que lorsque  $n$  est pair,  $u_n = 3$  et lorsque  $n$  est impair,  $u_n = 1$ .

2. Posons  $P_n$  la proposition : «  $u_{2n} = 3$  et  $u_{2n+1} = 1$  ».  
 $P_0, P_1, P_2$  sont vraies. On suppose que  $P_n$  est vraie.

Alors  $\begin{cases} u_{2n+2} = -u_{2n+1} + 4 = 3 \\ u_{2n+3} = -u_{2n+2} + 4 = 1 \end{cases}$  et  $P_{n+1}$  est vraie.

La proposition  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**46** Corrigé dans le manuel.

**47** • 1.  $u_0 = 1 ; u_1 = 1 ; u_2 = 2 ; u_3 = 4 ; u_4 = 7$ .

2. Remarque :  $u_5 = u_0 + 1 + 2 + 3 + 4$ .

Conjecture : pour tout entier  $n$ ,

$$u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

La propriété est vraie pour  $n = 0$ , car :

$$u_0 = \frac{0^2 - 0 + 2}{2} = 1.$$

Supposons que pour un entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{n^2 - n + 2}{2} + n \\ &= \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 2}{2} \end{aligned}$$

et la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

**48** • 1.  $u_0 = 1 ; u_1 = \frac{1}{3} ; u_2 = \frac{1}{7} ; u_3 = \frac{1}{15} ; u_4 = \frac{1}{31} ; u_5 = \frac{1}{63}$ .

Conjecture : pour tout naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$ .

2. La propriété est vraie pour  $n = 0$ , car :

$$u_0 = \frac{1}{2-1} = 1.$$

Supposons que pour un entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \text{ alors :}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2^{n+1} - 1}}{\frac{1}{2^{n+1} - 1} + 2} = \frac{1}{1 + 2(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^{n+2} - 1} :$$

la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

## Divisibilité

**49** • •  $P_0$  est vraie car  $4^0 + 5 = 6$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie, c'est-à-dire que  $4^n + 5 = 3p$ ,  $p$  entier.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 5 &= 4(4^n) + 5 = 4(3p - 5) + 5 \\ &= 12p - 15 = 3(4p - 5), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $4^{n+1} + 5$  est un multiple de 3.

$P_{n+1}$  est donc vraie.

• Pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n + 5$  est un multiple de 3.

**50** • 1. Si on suppose que  $P_n$  est vraie pour un entier  $n$ , alors  $10^{n+1} + 1 = 10(10^n) + 1 = 10(9p - 1) + 1 = 90p - 9 = 9(10p - 1)$ ,

donc  $10^{n+1} + 1$  est un multiple de 9 et  $P_{n+1}$  est vraie.

2. Pourtant  $10^n + 1$  s'écrit  $\underbrace{10 \dots 01}_n$ .

$(n-1)$  zéros

Et comme la somme des chiffres est 2, le nombre  $n$  n'est pas divisible par 9. Donc  $P_n$  n'est jamais vraie.

**51** • Soit  $P_n$  la proposition : «  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 ».

•  $P_0$  est vraie puisque  $2^{2 \times 0} - 1 = 0$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie pour un certain  $n$ . Alors :

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n} \times 2^3 - 1 = 8(7p + 1) - 1 \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ &= 56p + 7 = 7(8p + 1). \end{aligned}$$

$2^{3(n+1)} - 1$  est un multiple de 7 et  $P_{n+1}$  est vraie.

• La propriété  $P_n$  est donc vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**52** • Pour  $n = 0$  :  $3^0 - 1 = 0$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,  $3^{2n} - 1$  est un multiple de 8.

$3^{2(n+1)} - 1 = 3^2 \times 3^{2n} - 1 = 3^2(3^{2n} - 1) + 8$  : la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

**53** • Corrigé dans le manuel.

**54** • •  $P_0$  est vraie car  $3^1 + 2^2$  est égal à 7.

•  $P_n$  est supposée vraie, pour un entier  $n \geq 0$ .

Il s'agit de prouver que  $P_{n+1}$  est vraie, c'est-à-dire que :

$$3^{2(n+1)} + 1 + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$$

est un multiple de 7. Soit encore :

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} - (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \text{ est multiple de } 7,$$

$$3^{2n+1}(3^2 - 1) + 2^{n+2}(2 - 1) \text{ est multiple de } 7,$$

$$3^{2n+1}(8) + 2^{n+2}(1) \text{ est multiple de } 7,$$

$$7(3^{2n+1}) + 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est multiple de } 7,$$

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence.

Donc  $P_{n+1}$  est vraie et la proposition  $P_n$  est vraie pour tout  $n$ .

## Divers

**55** 1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$  ; la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

2. Pour  $n = 0, u_1 = 1 > 0^2$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n, u_n > n^2$ .

$u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$  : pour tout entier naturel  $n, u_n > n^2$ .

**56**  $u_0 \in ]0 ; 1[$  ; la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que pour un entier naturel  $n : 0 < u_n < 1$ .

$u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x(2-x)$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}, f'(x) = 2(1-x) > 0$  sur  $]0 ; 1[$ .

$f$  est donc strictement croissante  $]0 ; 1[$ .

Puisque  $0 < u_n < 1$ , alors  $f(0) < f(u_n) < f(1)$  soit :

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

Conclusion, pour tout entier  $n, 0 < u_n < 1$ .

**57** • 1.  $u_n = 1 + 2n$ .

2.  $v_0 = 1 = 1 + 0^2$ , la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la vraie au rang  $n$ .

$v_{n+1} = v_n + u_n = 1 + n^2 + 1 + 2n = 1 + (n+1)^2$  : la propriété est donc vraie pour tout  $n$ .

**58** • 1. Soit  $P_n$  la proposition : «  $0 \leq u_n \leq 2$  ».

•  $P_0$  est vraie car  $u_0 = 1$ .

• On suppose que  $P_n$ , soit  $0 \leq u_n \leq 2$ , alors :

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}.$$

On a bien  $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ ,  $P_{n+1}$  est vraie.

• Pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n$  est vraie.

$$\begin{aligned} 2. u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}. \end{aligned}$$

Ce quotient est positif car  $0 < u_n < 2$  et  $(u_n)$  est strictement croissante.

**59** • On note  $P_n$  la proposition : «  $0 \leq u_n \leq 1$  ».

1. •  $P_0$  est vraie puisque  $u_0 = 1$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie pour un entier  $n \geq 0$ .

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3} \geq 0.$$

$$\text{D'autre part } u_{n+1} - 1 = \frac{-2}{u_n + 3} \leq 0.$$

La propriété  $P_{n+1}$  est vraie.

• La propriété est donc vraie pour tout entier naturel  $n$ .

$$2. \bullet u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{donc } u_1 < u_0.$$

• On suppose que  $u_{n+1} < u_n$ .

Comme la fonction  $x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x+3}$  est strictement

croissante ( $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ ),  $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ , soit

$u_{n+2} < u_{n+1}$  et la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

**60** • On note  $P_n$  la proposition : « il existe  $p_n, q_n$  entiers tels que  $(2 + \sqrt{3})^n = p_n + q_n \sqrt{3}$  ».

•  $P_1$  est vraie, en prenant  $p_1 = 2$  et  $q_1 = 1$  :

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3}.$$

• On suppose que  $P_n$  est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{n+1} &= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n \\ &= (2 + \sqrt{3})(p_n + q_n \sqrt{3}) \\ &= (2p_n + 3q_n) + (2q_n + p_n)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Les nombres  $2p_n + 3q_n$  et  $2q_n + p_n$  sont des entiers, donc  $P_{n+1}$  est vraie.

•  $P_n$  est donc vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{61} \bullet 1. \mathbf{a)} \quad u_1 &= \sqrt{2(1 + \cos \theta)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \frac{\theta}{2}; \\ u_2 &= 2 \cos \frac{\theta}{4}. \end{aligned}$$

**b)** Récurrence immédiate.

2. Vrai pour  $n = 0$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2^n} \right).$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + 2 \cos \left( \frac{\theta}{2^n} \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}};$$

la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

**62** • A. 1.  $u_3 = 5, u_4 = 7, u_5 = 9$ .

Il semble que  $u_n = 2n - 1$  pour  $n \geq 1$ .

2. Cette proposition est vraie pour 1, 2, 3.

• Si elle est vraie pour  $u_n$  et  $u_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , alors :

$$u_{n+2} = 2(2n+1) - (2n-1) = 2n+3.$$

• La proposition est vraie pour  $u_{n+2}$  et donc vraie pour tout  $n$ .

**B.** •  $P_n$  est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

• On suppose que  $P_n$  est vraie jusqu'au rang  $n + 1$ . Alors :

$$u_{n+2} = 5 \left( \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{5} \right) - 6 \left( \frac{2^n + 3^n}{5} \right) = \frac{2^{n+2} + 3^{n+2}}{5},$$

et  $P_{n+2}$  est vraie.

$$\mathbf{63} \bullet \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^0 + (2 - \sqrt{3})^0] = 1 = u_0.$$

$$\frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^1 + (2 - \sqrt{3})^1] = 2 = u_1.$$

$$u_2 = 4u_1 - u_0 = 7 = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2].$$

La propriété est vraie aux premiers rangs.

Supposons la vraie au rang  $n$ .

Posons  $a = 2 + \sqrt{3}$  et  $b = 2 - \sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(a^n + b^n) - \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2} \\ &= a^{n-1} \left( 2a - \frac{1}{2} \right) + b^{n-1} \left( 2b - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

$$2a - \frac{1}{2} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{2} \quad \text{et} \quad 2b - \frac{1}{2} = \frac{b^2}{2} \quad \text{donc}$$

$$u_{n+1} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}.$$

**64** • a)  $u_0 = 2 > -1$  donc vrai pour  $n = 0$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,  $u_n > -1$ , alors  $u_n + 1 > 0$  et  $\sqrt{u_n + 1} > 0 > -1$ .

Conclusion, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > -1$ .

**b)**  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x+1}$ , fonction strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .

$$u_0 = 2 > \sqrt{3} = u_1.$$

Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,  $u_n > u_{n+1}$ , alors  $f(u_n) > f(u_{n+1})$  soit  $u_{n+1} > u_{n+2}$  : pour tout

entier  $n$ ,  $u_n > u_{n+1}$  ; la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

c)  $2 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  donc vrai pour  $n=0$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,

$$u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \text{ alors } u_{n+1} \geq \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1},$$

$$\text{soit } u_{n+1} \geq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Conclusion, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**65** 1.  $v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+4}{u_n-2} - 1}{\frac{u_n+4}{u_n-2} - 4} = -\frac{2}{3} \times \frac{u_n+4}{u_n-2} = -\frac{2}{3}v_n.$

2.  $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$

Pour tout  $n$ ,  $v_n \neq 1$  et  $u_n = \frac{4v_n+1}{v_n-1} = \frac{4(-2)^{n+1}+3^{n+1}}{(-2)^{n+1}-3^{n+1}}.$

**66** 1.  $P(x+1) - P(x) = \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{x+1}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} = x^2 + x + \frac{1}{3} - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = x^2.$

2.  $P(0) = 0$ , donc vrai pour  $n=2$ .

Supposons que pour un entier naturel  $n$ ,  $P(n) \in \mathbb{N}$ , alors, comme  $P(n+1) = P(n) + n^2$ ,  $P(n-1) \in \mathbb{N}$ . Conclusion, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P(n) \in \mathbb{N}$ .

3.  $0^2 = P(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ , donc vrai au rang 0.

Supposons la propriété vraie au rang  $n$ .

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = P(n+1) + (n+1)^2 = P(n+2).$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left[ \frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right] = (n+1) \times \frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} ;$$

la propriété est vraie pour tout entier  $n$ .

**67** 1.  $u_1 = \frac{1}{2}$  ;  $u_2 = \frac{2}{3}$  ;  $u_3 = \frac{3}{4}$ , on peut conjecturer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

La propriété est vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang  $n$ .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} ; \text{ la propriété est vraie pour}$$

tout entier  $n$  et  $u_{2006} = \frac{2006}{2007}$ .

**68** 1.  $n$  est un entier supérieur ou égal à 24.

$24 = 2 \times 5 + 2 \times 7$  : la propriété est vraie au rang 24.

Supposons la vraie au rang  $n$  :

$$24 \leq n = 5a + 7b.$$

Si  $b \geq 2$ ,  $25 \leq n+1 = 5a+7b+15-14$  et  $n+1 = 5(a+3) + 7(b-2)$ .

Si  $b = 1$ ,  $24 \leq n = 5a+7$  alors  $a \geq 4$ .

$n+1 = 5a+8 = 5(a-4) + 7 \times 4$ .

Si  $b = 0$ ,  $24 \leq n = 5a$  alors  $a \geq 5$ .

$n+1 = 5(a-4) + 7 \times 3$ .

La propriété est vraie pour tout  $n \geq 24$ .

**69** 1. a)  $u_1 = \frac{1}{2}$  ;  $u_2 = \frac{2}{4}$  ;  $u_3 = \frac{3}{8}$  ;  $u_4 = \frac{4}{16}$  ;  $u_5 = \frac{5}{32}$ .

b) La propriété est vraie au rang 1 (et 2, 3, ...).

Supposons la vraie au rang  $n$  :

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

$u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$  : la propriété est vraie pour tout  $n$ .

2.  $v_1 = \frac{1}{k}$  ;  $v_2 = \frac{2}{k^2}$  ;  $v_3 = \frac{3}{k^3}$  ; on peut conjecturer que

$$v_n = \frac{n}{k^n}.$$

La propriété est, bien sûr, vraie au rang 1.

Supposons la vraie au rang  $n$  :

$$v_n = \frac{n}{k^n}.$$

$v_{n+1} = \frac{n+1}{k^{n+1}} \times \frac{n}{k^n} = \frac{n+1}{k^{n+1}}$  : la propriété est vraie pour tout  $n$ .