TS | 1h20 — **MATHEMATIQUES** — 9 Jan 2012 | Partiel 4

1. Résoudre dans ℝ l'équation et l'inéquation (4 points)

$\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$ et $\ln x \leq \ln(x^2 - 2x)$

2. Etude d'une fonction f : $x \longmapsto \dfrac{x}{3} + \ln(1 + e^{-x})$, définie sur ℝ. C_f est sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$, $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

Partie A : Etude des limites aux bornes. **(6 points)**

A.1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Prouver que la droite Δ d'équation $y = x/3$ est asymptote à la courbe C_f.
Etudier la position de relative de Δ et C_f.

A.2. Prouver que $f(x) = \ln(e^x + 1) - \dfrac{2x}{3}$.
En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et une autre asymptote Δ' de C_f.

Partie B : Etude des variations. **(4 points)**

B.1. Prouver que la dérivée f ' de f s'écrit : $f'(x) = \dfrac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.
En déduire une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.

B.2. Déterminer le signe de f ' et dresser le tableau de variations de f.

Partie C : Exploitation des études précédentes. **(4 points)**

C.1. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ possède deux solutions α et β.
En donner des encadrements de largeur 10^{-1}.

C.2. Dessiner les droites T, Δ et Δ' puis la courbe C_f.

Partie D : Compléments. **(4 points)**

Pour cette question toute tentative, même incomplète ou non aboutie, sera valorisée dans l'évaluation. Soit deux points M et N de la courbe C_f d'abscisses non nulles et opposées. Prouver que la droite (MN) est parallèle à T.

TS — **MATHEMATIQUES** — 9 Jan 2012 | Partiel 4co

1. Résoudre dans ℝ l'équation et l'inéquation (4 points)

$x < -2$ et $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = -4}$

$x > 2$ et $x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{x \geq 3}$

2. Etude d'une fonction f : $x \longmapsto \dfrac{x}{3} + \ln(1 + e^{-x})$

Partie A **(6 points)**

A.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\ln 1 = 0$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x/3 = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ donc <u>Δ est asymptote à C_f.</u>

$\forall x$, $1 + e^{-x} > 1$ donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$ donc <u>C_f est toujours au dessus de Δ.</u>

A.2. $\mathbf{f(x)} = \dfrac{x}{3} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = \dfrac{x}{3} + \ln(e^x + 1) - \ln e^x = \mathbf{\ln(e^x + 1) - \dfrac{2}{3}x}.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\ln 1 = 0$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{3}x = +\infty$ **(As : $y = -\dfrac{2x}{3}$)**

Partie B **(4 points)**

B.1. $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}.$

$f'(0) = -1/6$, $f(0) = \ln 2$, d'où T : $\mathbf{y = \ln 2 - x/6.}$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f '		–	0	+	
f	$+\infty$	↘	0.64	↗	$+\infty$

B.2. f ' est du signe de $e^x - 2$ d'où $f' > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

$f(\ln 2) = (\ln 6.75)/3$

Partie C **(4 points)**

C.1. soit $I =](\ln 6.75)/3\ ; +\infty[$; f définit 2 bijections, l'une de $]-\infty\ ; \ln 2[$ dans I et l'autre de $]\ln 2\ ; +\infty[$ dans I or $1 \in I$ d'où les 2 solutions.

$f(-1.1) \approx 1.02$, $f(-1) \approx 0.98$ donc $\mathbf{-1.1 < \alpha < -1}$,

$f(2.8) \approx 0.99$, $f(2.9) \approx 1.02$ donc $\mathbf{2.8 < \beta < 2.9}$.

C.2. Dessin : T, Δ, et Δ', C_f.

Partie D **(4 points)**

$$\mathbf{\frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}} = \frac{1}{2a}\left[\ln(e^a + 1) - \frac{2a}{3} - \left(\frac{-a}{3} + \ln(1 + e^a)\right)\right] = \mathbf{-\frac{1}{6} = f'(0)}$$

<u>donc (MN) est parallèle à T</u>.