DS3	MATHEMATIQUES	30/11/2010

Barème possible : 9+6+9+9+9(+3) = 40 points

1. Soit la fonction définie par $f(x) = 10\,\dfrac{x-2}{x^3+1}$ sur $D_f =]-3\,;\,-1[\ \cup\ ]-1\,;\,6[$

et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$, d'unités : 1cm.

1.1. En vous aidant de votre calculatrice, dessinez l'allure de C (sans justification).

1.2. Vérifier que la dérivée f ' de f a le signe contraire de $g(x) = 2x^3 - 6x^2 - 1$.

1.3. Etudier les variations de g ; en déduire que g(x) possède une unique racine réelle α.

1.4. En déduire le signe de f ' sur D_f et dresser le tableau de variations de f sur D_f.

1.5. Déterminer une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 0.
Etudier la position relative de C et T. Qu'observe-t-on au voisinage de A ?

2. Questions de cours

2.1. Donner les deux définitions de la fonction exponentielle.

2.2. En utilisant la propriété fondamentale de la fonction exponentielle :

- Prouver que : $\exp(0) = 1$; $\forall a \in \mathbb{R}\ \exp(a) \neq 0$; $\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$.
- Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ [\exp(a)]^n = \exp(na)$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)(2 - e^{-x})$

et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$, d'unités : 2cm.

3.1. Etudier les limites infinies de h et démontrer que la droite d d'équation $y = 2x - 2$.
est asymptote à C. Etudier la position relative de C et d.

3.2. Démontrer que $h'(x) = 2 + (x-2).\ e^{-x}$ et que $h''(x) = (3-x)e^{-x}$.

3.3. Dresser le tableau de variation de h' (calculer les limites de h' à l'infini)

3.4. Calculer h'(3) et h'(0) ; en déduire le signe de h' et le tableau de variation de h.

3.5. En quel point de C la tangente est-elle parallèle à d ?

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$

et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

4.1. Etudier les variations de f pour en déduire le signe de f(x).

4.2. Démonstration de cours :
utiliser **4.1.** pour prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

4.3. M est un point de C d'abscisse a et T_a la tangente en M à C.
Prouver que T_a passe par A(1 ; 0) si et seulement si : $e^a(2-a) = 1$

4.4. G est la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $g(x) = e^x(2-x)$.
Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

4.5. En déduire le nombre de tangentes à C passant par le point A(1 ; 0).

5. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0] \cup [4\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$

et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$, d'unités : 1cm.

5.1. Prouver que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

5.2. Prouver que la droite d d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à C en $-\infty$.

5.3. Calculer f '(x) pour $x \notin [0\,;\,4]$.

5.4. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 4.
Qu'en déduire pour des tangentes aux points de C d'abscisses 0 et 4 ?

5.5. Dresser le tableau de variations de f ; tracer les asymptotes puis la courbe C.

6. Pur Bonus : Quelle est la vitesse normale d'un TGV, sachant que si elle diminue
de 50 km/h, la durée du trajet augmentera de 20% ?

DS3co **MATHEMATIQUES** **30/11/2010**

1. $f(x) = 10\dfrac{x-2}{x^3+1}$ sur $D_f = [-3 ; -1[\cup]-1 ; 6]$. **(12322 = 10 points)**

1.1. Graphique.

1.2. $f'(x) = 10\dfrac{(x^3+1)-3x^2(x-2)}{(x^3+1)^2} = 10\dfrac{6x^2-2x^3+1}{(x^3+1)^2} = \mathbf{\dfrac{-10\,g(x)}{(x^3+1)^2}}$

1.3. $\mathbf{g'(x)} = 6x^2 - 12x = \mathbf{6x(x-2)}$

x	-3		0		2		6
g'		+	0	–	0	+	
g	-109	↗	-1	↘	-9	↗	216

sur $]-\infty ; 2[$, $g(x) \le -1$: pas de racine.
de même sur $[6 ; +\infty[$, $g(x) \ge 216$
sur $]2 ; 6[$, g est continue (polynôme) et strictement croissante ;
or $0 \in]g(2) ; g(6)[$ donc $g(x)$ possède une racine unique α dans $]2 ; 6[$.
(Th de la bijection). D'où $g < 0$ si $x < \alpha$ et $g > 0$ si $x > \alpha$.

1.4. Donc **$f' > 0$ sur $]-3 ; 1[\cup]1 ; \alpha[$ et $f' < 0$ sur $]\alpha ; 6[$** avec $\alpha \approx 3.05$.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-2}{x^2-x+1} = -1$ donc
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} = -\infty$

x	-3		-1		3.05		6
f '		+	||	+	0	–	
f	1.9	↗	+∞ || -∞	↗	3.6	↘	0.18

1.5. $f(0) = -20$, $f'(0) = 10$ d'où **T : y = 10x – 20**
$f(x) - 10(x-2) = \dfrac{10(2-x)x^3}{x^3+1}$ donc C coupe T pour x = 0 et x = 2 ;
<u>C au dessus de T ssi $x \in [-3 ; -1[\cup]0 ; 2[$</u> . <u>En A, T traverse C</u>.

2. Questions de cours **(2+1113 = 8 points)**

2.1. Exp est l'unique fonction <u>non nulle, f, dérivable sur ℝ</u> et telle que :
Déf 1 : **$\forall a, \forall b, f(a+b) = f(a).f(b)$ et $f'(0) = 1$.**
Déf 2 : **$f' = f$ et $f(0) = 1$**.

2.2.

a. exp non nulle donc $\exists a$ tel que $\exp(a) \neq 0$;
alors $\exp(a).\exp(0) = \exp(a+0) = \exp(a)$ d'où **$\exp(0) = 1$**

b. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exp(a).\exp(-a) = \exp(a-a) = 1$ donc **$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exp(a) \neq 0$**

c. $\exp(a-b).\exp(b) = \exp(a-b+b) = \exp(a)$ or **$\exp(b) \neq 0$** : on peut diviser.

d. Initialisation : $[\exp(a)]^1 = \exp(1.a)$ ou $[\exp(a)]^0 = 1 = \exp(0.a)$
Hérédité : Supp…$[\exp(a)]^n = \exp(na)$. Alors $[\exp(a)]^{n+1} =$
$[\exp(a)]^n.\exp(a) = \exp(na).\exp(a) = \exp(na+a) = \exp[(n+1)a]$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $[\exp(a)]^n = \exp(na)$.

3. $h(x) = (x-1)(2-e^{-x})$. **(31222 = 10 points)**

3.1. $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$; $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.
$\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) - 2x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (1-x).e^{-x} = 0}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$
Donc la droite d d'équation y = 2x – 2 est asymptote à C.
C au dessus de d ssi $(1-x).e^{-x} > 0 \Leftrightarrow$ **$x < 1$.**

3.2. $\mathbf{h'(x)} = (2-e^{-x}) + (x-1)(e^{-x}) = \mathbf{2 + (x-2).\,e^{-x}}$
$\mathbf{h''(x)} = e^{-x} - (x-2).e^{-x} = \mathbf{(3-x)e^{-x}}$

3.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) = 2$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h'(x) = -\infty$

x	-∞		0		3		+∞
h''		+		+	0	–	
h'	-∞	↗	0	↗	$2 + e^{-3}$	↘	2

3.4. $h'(3) = 2 + e^{-3} > 2$ et $h'(0) = 0$ d'où :
sur $]0;+\infty[$ $h' \in]0 ; 2+e^{-3}[$ donc h'>0
et sur $]-\infty ; 0[$ h' ↗ donc h'<0 ;

x	-∞		0		+∞
h'		–	0	+	
h	+∞	↘	-1	↗	+∞

3.5. $\mathbf{h'(x) = 2} \Leftrightarrow (x-2).\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ car $e^{-x} \neq 0$ d'où **$A(2 ; 2 - e^{-2})$**

4. $f(x) = e^x - x$. **(32221 = 10 points)**

4.1. $f'(x) = e^x - 1$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$,
donc f décroit sur $]-\infty;0[$ et croit sur $]0;+\infty[$
$f(0) =$ <u>1 est donc le minimum absolu de f</u>, d'où **$f(x) > 0$** $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.2. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ **$e^x > x$** or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$

Posons **X = -x** ; $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \mathbf{\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0}$

4.3. $f'(x) = e^x - 1$; $T_a : y = (x-a)(e^a-1) + (e^a-a)$ et
$\mathbf{A \in T_a} \Leftrightarrow 0 = (1-a)(e^a-1) + (e^a-a) \Leftrightarrow \mathbf{e^a(2-a) = 1}$

4.4. $\mathbf{g'(x)} = e^x(2-x) - e^x = \mathbf{(1-x)e^x}$ d'où $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

4.5. L'étude précédente montre que
g prend 2 fois la valeur 1
(pour $\alpha < 1$ et pour $\beta > 1$).
C possède donc deux tangentes passant par le point A(1 ; 0).

x	-∞	α	1	β	+∞
g'		+	0	–	
g	0	↗	e	↘	-∞

5. $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$ sur $]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$ **(21332 = 11 points)**

5.1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$ donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ et

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x} = \frac{1 + 6x}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{1/x + 6}{1 + 1/x + \sqrt{1 - 4/x}}$$

d'où $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6/2 = 3}$; <u>asymptote d'équation y = 3</u> en $+\infty$.

5.2. $f(x) - (2x - 1) = -(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}) = \dfrac{-4}{x - 2 - \sqrt{x^2 - 4x}}$

d'où $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (2x - 1) = 0}$; <u>asymptote d'équation y = 2x – 1</u> en $-\infty$.

5.3. $f'(x) = 1 - \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$. **Si $x < 0$ on a $f'(x) > 0$**

et **si $x > 4$**, $\dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x}} > 1$ d'où $\mathbf{f'(x) < 0}$

5.4. $T_0 = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{h - \sqrt{h^2 - 4h}}{h} = \dfrac{4}{(h + \sqrt{h^2 - 4h})}$ d'où $\mathbf{\lim\limits_{h \to 0-} T_0 (h) = +\infty}$

de même $\mathbf{\lim\limits_{h \to 4+} T_4 (h)} = \lim\limits_{h \to 4+} \dfrac{f(h) - f(4)}{h - 4} = \mathbf{-\infty}$**.**

En ces points, C possèdera des <u>demi-tangentes verticales</u>.

5.5. Tableau.
+ Graphique.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f '		+	‖	//////	‖	–	
f	$-\infty$	↗	1	//////	5	↘	3

6. **(3 points)**

Soit V la vitesse et t le temps normal : Vt = (V – 50)1.2t d'où **V = 300.**