DS2	MATHEMATIQUES	5/11/2010

durée : 1 heure

1. Soit la fonction définie par $f(x) = x(2x - 6)^2$.

1.1. Prouver que la dérivée de f s'écrit : $f'(x) = 12(x-1)(x-3)$.
Dresser (en le justifiant succinctement) le tableau de variations de f.

1.2. Prouver que l'équation $f(x) = 20$ possède une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

1.3. Donner un encadrement de α de largeur 10^{-2}.

2. Connaissance du cours :

2.1. Donner la définition d'une fonction continue en a ($a \in D_f$).

2.2. Citer le théorème des valeurs intermédiaires.

2.3. Citer le théorème de dérivation d'une fonction composée.
Démontrer ce dernier théorème.

3. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

3.1. Etudier les limites de f en 2 et en l'infini.
Prouver que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
Etudier la position relative de Δ et de $\mathcal{C}_f$.

3.2. Prouver que la dérivée f' de f a le même signe que $g(x) = (x + 1).(x - 5)$;
et dresser le tableau de variations de f.

3.3. En déduire, suivant les valeurs de m, le nombre de racines du trinôme :
$E(x) = x^2 - (m + 2)x + 2m + 9$.
Retrouver ce résultat par le calcul.

3.4. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.

4. Sur ce trajet, si la vitesse du TGV diminue de 50 km/h, on perd 30 minutes mais on ne gagne que 20 minutes si elle augmente de 50 km/h.
Quelle est donc la distance de ce trajet et quelle est la vitesse du TGV ?
Autre énoncé : remplacer 30 par n et 20 par "les deux tiers".
Autre Pb : la vitesse du TGV ayant diminuée de 50 km/h, la durée du trajet a été augmentée de 20%. Quelle est sa vitesse normale ?

Barème possible : 4 – 4 - 8 – 4

O de MUIZON TS2

DS2co	MATHEMATIQUES	5/11/2010

1. 3+4+1

1.1. f est un polynôme, dérivable sur ℝ et
$f'(x) = (2x - 6)^2 + 4x(2x - 6) = 6$ $\boldsymbol{(x - 1)(2x - 6)}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

x	-∞	1	3	+∞
f '	+	0 –	0 +	
f	-∞ ↗	16 ↘	0 ↗	+∞

1.2. L'étude précédente montre que sur]-∞ ; 3[f admet 16 comme maximum, donc f(x) = 20 n'y a aucune solution.
Par ailleurs sur]3 ; +∞[, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. f définit donc une bijection de]3 ; +∞[dans]0; +∞[
or 20 ∈]0 ; +∞[donc f(x) = 20 possède une solution unique $\alpha > 3$.

1.3. Enfin f(4.1) < 19.9 <20 < 20.2 < f(4.11) donc **4.10 < α < 4.11**.

2. Cours 2+2+4

2.1. f continue en a signifie que f a une limite en a ; cette limite est f(a).

2.2. Th des valeurs intermédiaires : si f continue sur [a ; b],
alors pour tout m de [f(a) ; f(b)], il existe c dans [a ; b] tel que $m = f(c)$.

2.3. Si u dérivable sur I, et f définie et dérivable sur u(I), alors f o u est dérivable sur I et $(fou)' = f'ou \times u'$ soit $(fou)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$.

Preuve : $T_f(a,h) = \dfrac{fou(a+h) - fou(a)}{h} = \dfrac{fou(a+h) - fou(a)}{u(a+h) - u(a)} \times \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$

et on obtient le résultat en passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$
en utilisant : u dérivable donc continue en a donc $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$

3. 5+4+4+3

3.1. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-2+9) = 9$ d'où $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{9}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{9}{x-2} = 0$. QED

Par ailleurs $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow x > 2$ d'où $\mathscr{C}_f$ **au dessus de Δ sur]2 ; +∞[**

3.2. $\boldsymbol{f'(x)} = 1 - \dfrac{9}{(x-2)^2} = \dfrac{\boldsymbol{x^2 - 4x - 5}}{\boldsymbol{(x-2)^2}} = \dfrac{\boldsymbol{(x+1)(x-5)}}{\boldsymbol{(x-2)^2}}$ du signe de :
(x+1)(x–5) soit $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 5$

x	-∞		–1		2		5		+∞
f '		+	0	–	‖	–	0	+	
f	-∞	↗	-4	↘ -∞	‖	+∞ ↘	8	↗	+∞

3.3. $E(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$. On déduit du tableau :
pas de racine si $\boldsymbol{-4 < m < 8}$;
une racine si $\boldsymbol{m = -4}$ **ou** $\boldsymbol{m = 8}$; 2 racines sinon.
Par le calcul : $\boldsymbol{\Delta = m^2 - 4m - 32 = (m-8)(m+4)}$
pas de racine si $\Delta < 0$ soit $-4 < m < 8$;
une racine si $\Delta = 0$ soit $m = -4$ ou $m = 8$; 2 racines sinon.

3.4. Si a est l'abscisse de leur point de contact de $\mathscr{C}_f$, avec une tangente passant par l'origine, on a f(a) = a f '(a) soit a = 1. Or f '(1) = -8.
Il n'y a donc qu'une seule telle tangente d'équation : y = -8x

4. 4+4

$\dfrac{d}{V} - \dfrac{d}{V+50} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{d}{V-50} - \dfrac{d}{V} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} V(V+50) = 150d \\ V(V-50) = 100d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V^2 = 125d \\ 100V = 50d \end{cases}$

Conclusion : **V = 250km/h et d = 500km**.
Autre méthode : d = Vt = (V – 50)(t + 1/2) = (V + 50)(t – 1/3) donc
50t = (V + 50)/3 = (V – 50)/2 d'où **V = 250 km/h, t = 2h et d = 500 km.**