

1. Deux petits problèmes : (4+5 points)

1a  $\frac{n+6}{56} = \frac{n}{50} + \frac{6}{100} \Leftrightarrow 56(2n+6) = 100(n+6) \Leftrightarrow n = 22$  : il y avait 22 femmes.

1b Soit  $d$  la distance aller en km et  $v$  la vitesse de la première en km/h.

$$\frac{d}{v} + \frac{d}{2v} = \frac{d}{v+x} + \frac{d}{x} \Leftrightarrow \frac{2v}{3} = \frac{x(v+x)}{v+2x} \Leftrightarrow 2v^2 + xv - 3x^2 = 0. \Leftrightarrow v = x \text{ (ou } -\frac{3x}{2}\text{)}$$

2. Une Hyperbole : (5+4+5 points)

2a  $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x-5 = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x-2 = 0^-, \lim_{x \rightarrow 2^+} x-2 = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty. :$$

donc  $\mathcal{C}_f$  admet 2 asymptotes d'équations  $y = 3$  et  $x = 2$ .

$$\forall h \neq 0, f(2+h) + f(2-h) = (3h+1)/h + (3h-1)/h = 2 \cdot 3$$

donc  $I(2; 3)$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .

2b  $M(x;y) \in D_1 \cap \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = x+1$  et  $3x-5 = (x+1)(x-2) \Leftrightarrow y = x+1$  et  $x^2-4x+3 = 0$   
 $\Leftrightarrow A_1(1; 2)$  et  $A_2(3; 4)$ . De plus  $f'(x) = -1/(x-2)^2$ ,  $f'(1) = -1 = f'(3)$   
 donc les tangentes à  $\mathcal{C}_f$  en  $A_1$  et en  $B_1$  sont parallèles.

2c  $D_m : y = mx + p$  or  $I \in D_m$  donc  $p = 3 - 2m$  et  $D_m : y = mx + 3 - 2m$  ;  
 $M(x;y) \in D_m \cap \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = mx+3-2m = (3x-5)/(x-2)$  et  $mx^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$ ,  
 $\Delta = 4m > 0$  (car  $m > 0$ ) donc 2 racines distinctes  $(2 \pm 1/\sqrt{m})$ .

Donc toute droite  $D_m$  de coefficient directeur  $m > 0$  et passant par  $I$ ,

$$\text{coupe } \mathcal{C}_f \text{ en 2 points } A_m(2 - 1/\sqrt{m}; 3 - \sqrt{m}) \text{ et } B_m(2 + 1/\sqrt{m}; 3 + \sqrt{m}) ;$$

Enfin  $f'(2 - 1/\sqrt{m}) = f'(2 + 1/\sqrt{m}) = -m$  donc les tangentes à  $\mathcal{C}_f$  en ces 2 points ont même coefficient directeur  $-m$ , elles sont bien parallèles.

3. Une Fonction Rationnelle (6+3+5+3+1+3+2 points)

3a  $\forall x \neq 2, ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} = \frac{ax^3 - (4a-b)x^2 + (4a-4b+c)x + 4b-2c+d}{(x-2)^2}$

Par identification :  $a=2$  ;  $4a-b=7$  ;  $4a-4b+c=3$  ;  $4b-2c+d = -3$

et  **$a = 2$  ;  $b = 1$  ;  $c = -1$  ;  $d = -9$** .

Soit  $d(x) = g(x) - 2x - 1$ .  $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} = 0$  donc  **$\Delta$  asymptote à  $\mathcal{C}_g$** .

Enfin  $(x-2)^2 d(x) = -(x-2)-9 = -(x+7)$  donc : si  $x \in D_f$  soit si  $x \neq 2$  on a :

**si  $x < -7$ ,  $d(x) > 0$  et  $\mathcal{C}_g$  au dessus de  $\Delta$  ; si  $x > -7$ ,  $d(x) < 0$  et  $\mathcal{C}_g$  au dessous de  $\Delta$**

3b  **$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$**  et de même  **$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$**

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 - 7x^2 + 3x - 3 = -9 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty.$$

Donc **la droite  $D$  d'équation  $x=2$  est asymptote à  $\mathcal{C}_g$**

3c  $g'(x) = 2 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{18}{(x-2)^3} = \frac{x(2x^2 - 12x + 25)}{(x-2)^3}$

est du signe de  $x/(x-2)$  ; soit

$g' > 0$  sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]2; +\infty[$  et  $g' < 0$  sur  $]0; 2[$

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'$		+	0	-		+	
$g$	$-\infty$	$\nearrow$	-3/4	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3d Sur  $]-\infty; 2[$ ,  $g$  admet  $-3/4$  pour maximum absolu, donc  $g < 0$  sur  $]-\infty; 2[$ .

Et sur  $]2; +\infty[$ ,  $g$  est dérivable et strictement croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,

donc  $g$  définit une **bijection de  $]2; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$** , or  $0 \in \mathbb{R}$ ,

donc, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  avec  $\alpha > 2$ .

De plus  $g(3.17) \approx -0.09$  et  $g(3.18) \approx +0.05$  donc  **$\alpha \approx 3.18$  à  $10^{-2}$  près**

3e  $\forall x \neq 0, \frac{g(2+x) + g(2-x)}{2} = \frac{2(2+x) + 1 - 1/x - 9/x^2 + 2(2-x) + 1 + 1/x - 9/x^2}{2}$   
 $= 10 - 18/x^2 \neq 10$  donc  **$I(2; 5)$  n'est pas centre de symétrie de  $\mathcal{C}_g$** .

3g  $x = 2$  n'est pas solution car  $\forall m, 2^4 - (7+m)4 + (3+4m)2 - 3 - 4m = -9$   
 $2x^3 - (7+m)x^2 + (3+4m)x - 3 - 4m = 0. \Leftrightarrow 2x^3 - 7x^2 + 3x - 3 = m(x^2 - 4x + 4)$   
 $\Leftrightarrow g(x) = m$ . Car on a toujours  $x \neq 2$ . D'où

**3 solutions si  $m < -3/4$  ; 2 solutions si  $m = -3/4$  et 1 solution si  $m > -3/4$**