TS **MATHEMATIQUES** 12 Nov 2009 Examen 1

durée : 2 heures

1. Deux petits problèmes

1.a Une entreprise emploie 50 personnes. On embauche 6 femmes. Quel était le nombre n des femmes si leur pourcentage a augmenté de 6%. ?

1.b Deux voitures A et B mettent le même temps pour faire un aller et retour.
A l'aller, la première (A) roule à x km/h de moins que la seconde (B).
Au retour la voiture A double sa vitesse et la voiture B roule à x km/h.
Déterminer en fonction de x la vitesse aller v de la voiture A.

2. Une Hyperbole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2}}$

et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2.a Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
Déterminer les asymptotes éventuelles de C_f.
Prouver que C_f admet un centre de symétrie I.

2.b Soit D_1 la droite d'équation $y = x + 1$;
Déterminer les points d'intersections A_1 et B_1 de D_1 avec C_f.
Montrer que les tangentes à C_f en A_1 et en B_1 sont parallèles.

2.c Prouver que toute droite D_m de coefficient directeur m (m > 0) et passant par I, coupe C_f en 2 points A_m et B_m et que les tangentes à C_f en ces 2 points sont parallèles, de coefficient directeur **–m**.

3. Une Fonction Rationnelle

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $g(x) = \dfrac{2x^3 - 7x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}$,

et $\mathcal{C}_g$ est la courbe de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
d'unités $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.

3.a Trouver les réels a, b, c, d tels que g(x) s'écrive : $ax + b + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{(x-2)^2}$

En déduire que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$;
puis étudier la position relative de Δ et $\mathcal{C}_g$.

3.b Déterminer les limites de g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2.
En déduire une autre asymptote de $\mathcal{C}_g$,

3.c Prouver que la dérivée g ' de g s'écrit : $g'(x) = \mathbf{\dfrac{x(2x^2 - 12x + 25)}{(x-2)^3}}$
Etudier le signe de g ' et dresser enfin le tableau de variations de g.

3.d Prouver que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près

3.e Le point I, intersection des asymptotes est–il centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$?
Justifier la réponse.

3.f Représenter $\mathcal{C}_g$ et ses asymptotes.

3.g Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$$2x^3 - (7 + m)x^2 + (3 + 4m)x - 3 - 4m = 0.$$