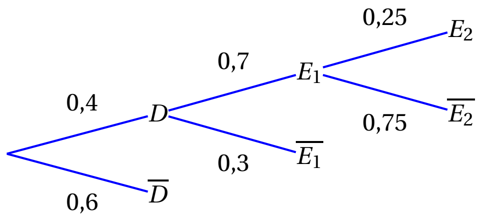
EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. **VRAIE** : Sur l'intervalle $[-3, -1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative.
2. **VRAIE** : Sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$, on lit que $f'(x) \geqslant 0$, donc que f est croissante.
3. **FAUSSE** : $[-1\,;\,0]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$. Or $f(0) = -1$. Donc $f(x) \leq -1$ sur $[-1\,;\,0]$
4. **VRAIE** : $f'(0) = 1$ et $f(0) = -1$. Tangente à $\mathscr{C}$ en 0 : $y - (-1) = 1x \iff y = x - 1$. Cette tangente passe par le point $(1\,;\,0)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. a.



b. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = \mathbf{0{,}28}$.

c. p("être recruté")$= p\left(\overline{F}\right) = p(E_2) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$. D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = \mathbf{0{,}93}$.

2. a. Chaque dossier est étudié **indépendamment** des autres et chacun des **5** candidats a la même probabilité d'être recruté égale à **0,07**. On est donc en présence d'un **schéma de Bernoulli**.
La variable X (nombre de succès) suit donc une loi **binomiale** $\mathscr{B}$**(n=5, p=0,07)**.

b. On a $p(X = 2) = \binom{5}{2}0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx \mathbf{0{,}039}$ à 10^{-3} près

3. $p(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$. donc $p(X \geq 1) = 1 - 0,93^n$.

et $1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93 \iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx \mathbf{95{,}1}$.

Il faut traiter au moins **96 dossiers** pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

EXERCICE 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ or $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, donc par somme : $\displaystyle\lim_{x:\to+\infty} f(x) = \mathbf{0}$.

2. la fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Or $u'(x) = \dfrac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
$x \geqslant 1$, donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$
de $f(1) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2} \approx -0,193$ à 0 sa limite en $+\infty$.
Le tableau montre que f(x) < 0 sur $[1\,;\,+\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	-0.193 ↗	0

Partie B

1. On obtient successivement pour u les valeurs : **1**; $\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ et $\mathbf{\dfrac{11}{6}}$.
2. Il suffit de modifier la sortie en : **Afficher : u - ln n**.
3. On conjecture que pour **n < 2000** la suite semble être **décroissante** et **converger** vers une valeur proche de **0,577**.

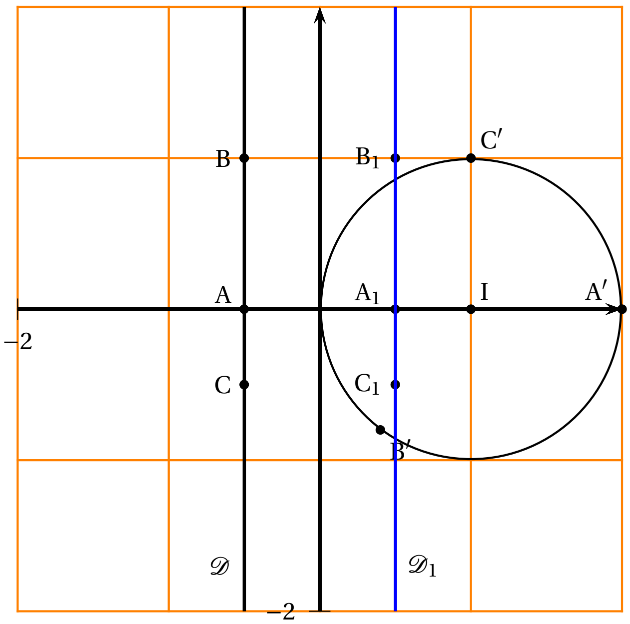
Partie C

1. On a $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n+1}+\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = f(n)$. Or pour $x \geqslant 1, f(x) < 0$, donc $u_{n+1}-u_n < 0$ donc la suite (u_n) est **décroissante**.
2. **a.** $0 < k \leqslant x \leqslant k+1 \iff 0 < \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$; donc $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$.
   L'intégrale sur $[k\ ;\ k+1]$ **de la fonction continue et positive est un nombre positif.**
   $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}$ Or $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(k+1)-\ln k$. Donc $\ln(k+1)-\ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$

   b. En additionnant cette dernière inégalité de 1 jusqu'à n, on obtient :
   $\ln(n+1) \leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ (car $ln(1)=0$

   c. **ln étant croissante,** $\ln n < \ln(n+1)$ donc $\ln n < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} \iff 0 < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, soit $u_n > 0$.
3. **la suite est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à zéro.**

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1. **a.** Voir la figure.

   b. $z_{A'} = \mathbf{2}$. $z_{B'} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{(\frac{1}{2}+\mathrm{i})(\frac{1}{2}-\mathrm{i})} = \mathbf{\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}\text{-}i\right)}$.

   $z_{C'} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})} = \mathbf{1+i}$.

   c. $z_{\overrightarrow{A'B'}} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\right)-2 = \mathbf{\dfrac{2}{5}\text{-}\dfrac{4}{5}i}$.
   et $z_{\overrightarrow{A'C'}} = 1+\mathrm{i}-2 = \mathbf{-1+i}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont **non colinéaires,** donc les points **A', B' et C' ne sont pas alignés**.
2. **a.** ***g* est la translation de vecteur** $\vec{u}$.

   b. Voir la figure

   c. Soit I le point d'affixe 1. $|z-1| = |z| \iff$
   $|z-z_\mathrm{I}| = |z-z_\mathrm{O}| \iff \mathrm{I}M = \mathrm{O}M$.
   M est donc **équidistant de O et de I** :
   M appartient à la **médiatrice de [OI]**,
   d'équation $x = \dfrac{1}{2}$: c'est bien la droite $\mathscr{D}_1$.
3. **a.** $z_{A_1} = \dfrac{1}{z_{A_1}} = \mathbf{2} = \mathbf{A'}$. $z_{B_1} = \dfrac{1}{z_{B_1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+1} = \mathbf{\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}\text{-}i\right)} = \mathbf{B'}$. $z_{C_1} = \dfrac{1}{z_{C_1}} = \dfrac{2}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{2(1+\mathrm{i}}{1+1} = \mathbf{1+i=C'}$

   b. $\left|\dfrac{1}{z}-1\right| = 1 \iff \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \iff \dfrac{|z-1|}{|z|} = 1 \iff |z-1| = |z|$.

   c. $M(z) \in \mathscr{D}_1 \iff |z-1| = |z| \iff \left|\dfrac{1}{z}-1\right| = 1$
   Son image par h est le point M_2 d'affixe $z' = \dfrac{1}{z}$. Donc $M(z) \in \mathscr{D}_1 \Longrightarrow |z'-1| = 1$
   ce qui signifie que le point M_2 **appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 1.**
   Conclusion : **l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans le cercle de centre I et de rayon 1**.
4. Soit $M(z) \in \mathscr{D}$. Son image par g est le point M_1 d'affixe $z+1$.
   L'image par h du point M_1 d'affixe $z+1$ est le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$ c'est-à-dire l'image par f de M.
   Or l'image par g de la droite $\mathscr{D}$ est la droite $\mathscr{D}_1$ et l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.
   Conclusion : **l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$ est le cercle de centre I de rayon 1 privé de O.**