CHAPITRE 11

Graphes

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

(page 294)

Problème 1

2. Tout sous-ensemble de magasins pouvant être simultanément ouverts en nocturne est un sous-ensemble des points A, B, C, D, E vérifiant la propriété (Q) suivante : deux points quelconques de ce sous-ensemble sont reliés par un segment ; la résolution du problème (P) équivaut donc à la détermination d'un sous-ensemble des points A, B, C, D, E vérifiant la propriété (Q) et contenant le plus possible de ces points.

3. (P_1) équivaut à « il existe un sous-ensemble de quatre points vérifiant la propriété (Q) », c'est-à-dire à « il existe dans le schéma un quadrilatère dont les diagonales sont tracées » (P_2).

4. Les cinq magasins ne peuvent pas être ouverts simultanément ; le schéma ne contenant aucun quadrilatère (et donc *a fortiori* aucun quadrilatère dont les diagonales sont tracées), quatre quelconques des cinq magasins ne peuvent pas être ouverts simultanément.

Par contre, le schéma contient un triangle : le triangle BCE ; les trois magasins B, C et E peuvent donc être ouverts simultanément. C'est la solution du problème posé.

Problème 2

2. L'existence d'un itinéraire passant une fois et une seule par chaque pont équivaut à l'existence dans le graphe d'un « parcours » qui, à partir d'un sommet « de départ », emprunte successivement toutes les arêtes du graphe une fois et une seule, et s'achève au sommet de départ ou en un autre sommet.

3. Quel que soit le sommet de départ, les tentatives pour obtenir un tel parcours échouent.

L'existence d'un tel parcours implique en effet que, chaque fois que l'on arrive en un sommet « intermédiaire » (autre que les sommets de départ et d'arrivée) par une arête, on doit en repartir par une arête nouvelle : le degré de tout sommet intermédiaire doit donc être pair. Or les degrés de tous les sommets du graphe sont impairs.

Le théorème d'Euler (fiche-cours **2**, p. 297) permet de justifier rigoureusement l'impossibilité d'un tel parcours, que les sommets de départ et d'arrivée soient distincts ou non.

Problème 3

1. Chemins possibles reliant D et A : D-B-A ; D-C-A ; D-B-C-A et D-C-B-A.

2. Le plus court chemin entre D et A, c'est-à-dire ici celui qui minimise la somme dépensée en péages, est D-C-A (dépense : 50).

Problème 4

A **1.** Somme des degrés : 54, d'où le nombre d'arêtes : $\frac{54}{2} = 27$.

2. Pour tout i de 1 à 10, la somme des termes de la i-ième ligne de la matrice est égale au degré de X_i.

Le sommet dont le degré est le plus grand étant X_3 (de degré 7), c'est la somme des termes de la troisième ligne (égale à 7) qui est la plus grande.

Les sommets dont le degré est le plus petit étant X_1 et X_{10} (de degré 3), c'est la somme des termes des première et dixième lignes (égale à 3) qui est la plus petite.

B **1. a)** X_2 fait confiance à X_1, X_3 et X_5.

b) Il y a confiance réciproque entre X_2 et X_5, ainsi qu'entre X_3 et X_5.

c) X_1 ne fait confiance qu'à lui-même ; X_6 ne fait confiance à personne, et personne ne lui fait confiance.

2. La matrice du graphe est la matrice suivante (non symétrique) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C **1.** Non.

2. La personne la plus populaire est X_3.

3. Matrice (non symétrique) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème 5

A **2.** Somme des degrés S = 24, nombre d'arêtes $m = 12$; on a bien S = 2 m.

3. Dans une répartition en binômes idéale, les cinq binômes sont des paires disjointes d'élèves, constituées d'un élève de X et d'un élève de Y ayant des affinités ; ces cinq binômes sont donc représentés par cinq arêtes du graphe G n'ayant pas d'extrémité commune.

B C = 1, L = 2, P = 3, T = 4, V = 5, A = 6, B = 7, F = 8, G = 9, Q = 10.

1. $$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

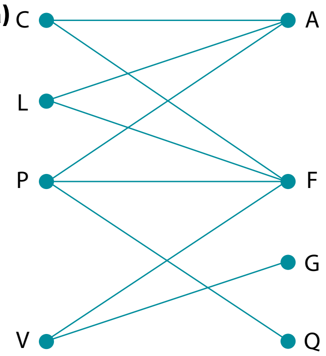
Les deux sous-matrices carrées correspondant aux cinq premières lignes et colonnes et aux cinq dernières lignes et colonnes sont nulles.

2. Plus généralement, les sommets d'un graphe biparti peuvent être répartis en deux sous-ensembles X et Y, tels qu'aucune arête ne relie deux sommets d'un même sous-ensemble. Si l'on numérote de 1 à |X| les sommets de X et de |X| + 1 à |X| + |Y| les sommets de Y, alors la sous-matrice carrée de la matrice du graphe formée par les |X| premières lignes et colonnes, et la sous-matrice formée par les |Y| dernières lignes et colonnes, sont nulles.

C **1.** Le seul sommet adjacent à B est T : le binôme (T-B) fait donc nécessairement partie d'une répartition en binômes idéale.

2. a)

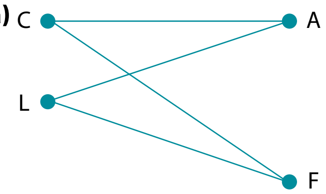
G_1



b) Dans G_1, le seul sommet adjacent à G est V, et le seul sommet adjacent à Q est P ; on en déduit que les binômes (V-G) et (P-Q) font nécessairement partie d'une répartition en binômes idéale.

3. a)

G_2



b) Répartition en binômes idéale :
{(T-B), (V-G), (P-Q), (C-A), (L-F)}
(ou {(T-B), (V-G), (P-Q), (C-F), (L-A)}).

Problème 6

1. et **2.** Pour tout k : G_k est d'ordre $2^k - 1$.

3. Chacun de ces graphes est connexe car on peut le dessiner « sans lever le crayon de la feuille ».

4. a) Nombre de sommets = nombre d'arêtes + 1.

b) Pour tout k, dans G_k : le sommet de niveau 1 (la « racine » de l'arbre) est de degré 2, les 2^{k-1} sommets de niveau maximum son de degré 1, tous les autres sommets (il y en a $2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-2}$, soit $2^{k-1} - 2$) sont de degré 3.

c) Par suite, la somme des degrés est :
$S = 2 + (2^{k-1} - 2)3 + 2^{k-1} = 4(2^{k-1} - 1)$. Le nombre d'arêtes est $m = (2^k - 1) - 1$ (d'après **2.** et **4. a)**), c'est-à-dire $m = 2^k - 2$.
On a bien $S = 2m$.

Problème 7

A **1.** Deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne « extraite » de la chaîne (E-F-D-A-C-B) qui passe par tous les sommets.

2. D'après le théorème d'Euler, le graphe G, connexe et ayant exactement deux sommets de degré impair : A et B, admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B.

B **3.** La chaîne (A-D-B-A-C-B) ne contient pas toutes les arêtes du graphe, elle n'est donc pas eulérienne.

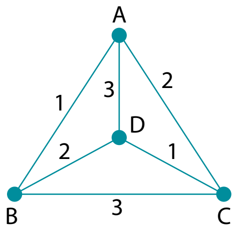
4. On insère la chaîne fermée (D-E-F-D) dans la chaîne (A-D-B-A-C-B) pour obtenir la chaîne eulérienne (A-D-E-F-D-B-A-C-B).

Problème 8

1. Le flux horaire maximum pouvant circuler sur le trajet (A-B-C-E) sans créer de bouchons est celui pouvant circuler sur l'arête (B-C), soit 400.
Le flux horaire maximum pouvant circuler sur le trajet (A-D-E) sans créer de bouchons est celui pouvant circuler sur l'arête (D-E), soit 300.
Le maximum de véhicules/heure à faire partir de A, de sorte qu'ils puissent arriver à E sans bouchons, est donc de 700 : 400 sur (A-B) et 300 sur (A-D).
2. Le doublement du poids de l'arête (C-E) n'a aucune incidence sur le flux horaire maximum pouvant circuler sur le trajet (A-B-C-E) sans créer de bouchons, qui est toujours égal à celui pouvant circuler sur l'arête (B-C), soit 400.
On ne peut donc pas faire partir davantage de véhicules de A pour aller jusqu'à E sans bouchons.

Problème 9

A **1.** Deux sommets quelconques sont reliés par une arête, puisque les deux joueurs représentés par ces deux sommets doivent se rencontrer : le graphe est donc complet.
2.



B **1.** Il y a quatre parties à chaque tour.
2. a) • La droite (12) est la médiatrice des arêtes (3-8), (4-7) et (5-6) qui sont donc perpendiculaires à l'arête (1-2). Arêtes obtenues : (1-2), (3-8), (4-7), (5-6).
• La droite (13) est la médiatrice des arêtes (4-2), (5-8) et (6-7) qui sont donc perpendiculaires à l'arête (1-3). Arêtes obtenues : (1-3), (4-2), (5-8), (6-7).
• Le processus s'achève avec l'arête (1-8) et ses trois arêtes perpendiculaires (2-7), (3-6) et (4-5).
• Montrons que toute arête du graphe est obtenue une fois et une seule dans le processus précédent.
C'est évident pour tout arête (1-*i*), $i \in [2\,;8]$.
Montrons-le pour toute arête dont le sommet 1 n'est pas une extrémité. Soit (*j*-*k*) une telle arête. Parmi les cinq sommets autres que *j*, *k* et 1, un nombre pair se trouve d'un côté de l'arête (*j*-*k*) et un nombre impair de l'autre côté ; le sommet « médian » de ces derniers sommets est équidistant de *j* et *k* (et c'est le seul des cinq sommets qui a cette propriété).
Notons-le *i* ; la droite (1-*i*) est donc médiatrice de l'arête (*j*-*k*), qui est donc obtenue à la $(i\text{-}1)^e$ étape du processus comme l'une des trois arêtes perpendiculaires à (1-*i*).
Exemple : (*j*-*k*) = (3-7) ; deux sommets : 2 et 8 d'un côté de (3-7), trois sommets : 4, 5 et 6 de l'autre ; le sommet « médian » de 4, 5 et 6 est le sommet 5 qui est le seul – parmi les sommets 2, 8, 4, 5, 6 – qui soit équidistant de 3 et 7 ; la droite (15) est donc médiatrice de l'arête (3-7), qui est donc obtenue, à la quatrième étape du processus, comme l'une des trois arêtes perpendiculaires à (1-5).
(Confirmation dans le planning donné à la question **3.**)
Le processus permet donc d'obtenir toutes les arêtes du graphe.
b) Il y a sept étapes dans le processus ; au cours de chaque étape, on sélectionne quatre nouvelles arêtes : le nombre d'arêtes du graphe est donc égal à 28.
N.B. (dénombrement direct des arêtes) : le graphe est complet d'ordre 8, chaque sommet est donc de degré 7, la somme des degrés est donc égale à 56, donc le nombre d'arêtes à $\frac{56}{2} = 28$.
3. Planning possible.
Remarques :
• la *i*-ième étape du processus sera appelée *i*-ième tour ;
• les quatre arêtes du *i*-ième tour peuvent se déduire des quatre arêtes du $(i\text{-}1)^e$ tour en effectuant la permutation circulaire : $1 \to 1$, $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 2$ $\left(\text{géométriquement : en effectuant une rotation de centre 1 et d'angle } \frac{2\pi}{7}\right)$.

Rencontres du 1er tour	(1-2), (3-8), (4-7), (5-6)
Rencontres du 2^e tour	(1-3), (4-2), (5-8), (6-7)
Rencontres du 3^e tour	(1-4), (5-3), (6-2), (7-8)
Rencontres du 4^e tour	(1-5), (6-4), (7-3), (8-2)
Rencontres du 5^e tour	(1-6), (7-5), (8-4), (2-3)
Rencontres du 6^e tour	(1-7), (8-6), (2-5), (3-4)
Rencontres du 7^e tour	(1-8), (2-7), (3-6), (4-5)

C Planning possible avec six joueurs :

Rencontres du 1er tour	(1-2), (3-6), (4-5)
Rencontres du 2^e tour	(1-3), (4-2), (5-6)
Rencontres du 3^e tour	(1-4), (5-3), (6-2)
Rencontres du 4^e tour	(1-5), (6-4), (2-3)
Rencontres du 5^e tour	(1-6), (2-5), (3-4)

Problème 10

Chacun des mots « dbf », « decif », « daabif », « deacif » peut être choisi comme code d'accès.
Par contre, les mots « debcif » et « deabi » ne sont pas reconnus.

Problème 11

2. a) $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICES Entraînement (page 314)

REPRÉSENTER UNE SITUATION À L'AIDE D'UN GRAPHE

Dans les exercices 11 à 13, S désigne la somme des degrés des sommets du graphe, m le nombre de ses arêtes ; on vérifie que $S = 2m$.
La matrice du graphe est notée A.

11 $S = 4,\ m = 2\ ;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

12 $S = 4,\ m = 2\ ;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

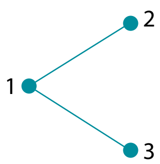
13 $S = 8,\ m = 4\ ;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

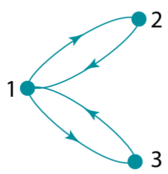
15 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17

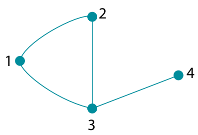


ou

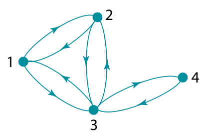


(graphe orienté)

18

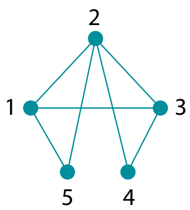


ou

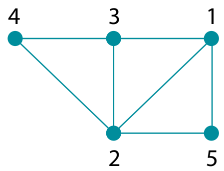


(graphe orienté)

19 **a)** Oui :



b) Oui :



c) Non (il n'y a pas, dans ce graphe, de sommet de degré 4, alors que la deuxième ligne de A comporte quatre « 1 »).

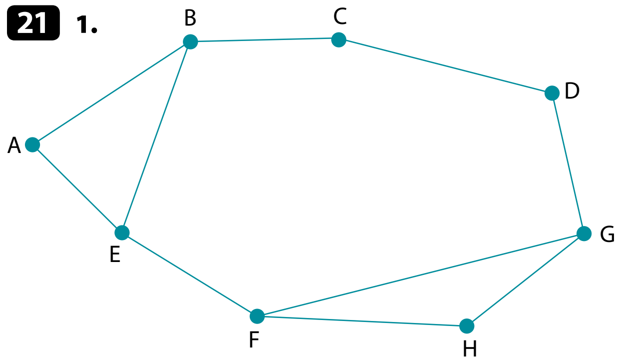
20

Sommet	1	2	3	4	5	6	7
Degré	4	5	6	4	3	6	4

Somme des degrés : $S = 32$.

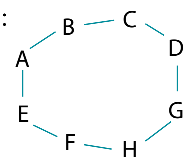
Nombre d'arêtes : $\dfrac{S}{2} = 16$.

21 **1.**



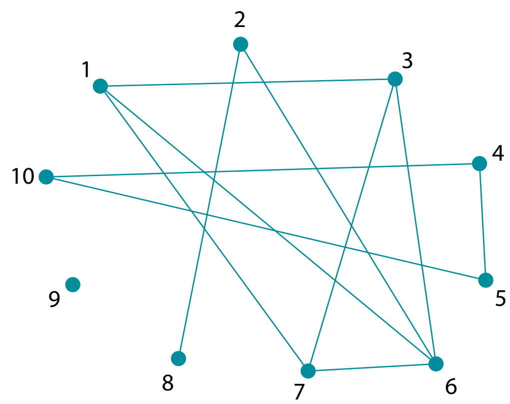
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) Parcours :



b) Suppression possible de (B-E) et (F-G).

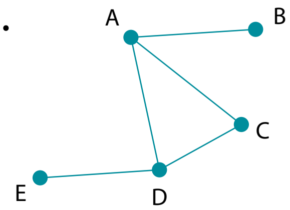
22



2. a) Propriété qu'aurait le graphe : l'existence d'une chaîne de longueur 2 entre deux sommets implique l'existence d'une arête entre ces deux sommets.

b) L’adage n’est pas vérifié car, par exemple, il y a une chaîne de longueur 2 reliant les sommets 8 et 6 (la chaîne (8-2-6)) sans que l’arête 8-6 existe.

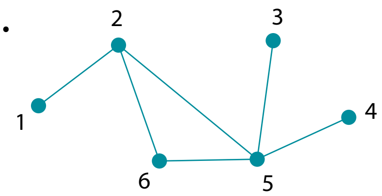
23 **1.**



2. a) Problème (P) : il s’agit de trouver un sous-ensemble de magasins, contenant le plus grand nombre de magasins possible, tel que deux magasins quelconques de ce sous-ensemble puissent être ouverts simultanément. Cela équivaut à trouver dans le graphe un sous-ensemble de sommets ayant le plus grand nombre de sommets possible et tel que deux sommets quelconques de ce sous-ensemble ne soient pas reliés par une arête (contrainte C).

b) Sous-ensembles de cardinal maximum respectant la contrainte C :
– contenant A : {A, E} ;
– contenant B : {B, C, E} ;
– contenant C : {B, C, E} ;
– contenant D : {B, D} ;
– contenant E : {B, C, E}.
D’où la solution : {B, C, E}.

24 **1.**



2. Degrés respectifs des sommets : 1, 3, 1, 1, 4, 2 ; somme des degrés : 12, nombre d’arêtes $12 \div 2 = 6$.

3. Le nombre maximum de personnes pouvant être invitées sans risque d’ambiance difficile est celui de tout sous-ensemble de sommets, de cardinal maximum, tel que deux sommets quelconques de ce sous-ensemble ne soient pas reliés par une arête.

L’ensemble des six sommets ne convient pas ; aucun des sous-ensembles de cinq sommets ne convient ; par contre, un (et un seul) sous-ensemble de quatre sommets convient : {1, 3, 4 et 6}, et fournit donc la solution.

25 **1.** Construisons le graphe d’ordre 7 dont les sommets représentent les commissions et les arêtes représentent les conseillers.

• Chaque conseiller est représenté par l’arête reliant les deux sommets qui représentent les deux commissions dont il fait partie (règle 1).

• D’après la règle 2, deux sommets quelconques sont reliés par une arête (et une seule). Le graphe est donc complet.

2. Chaque sommet est de degré 6 ; la somme des degrés est donc égale à $7 \times 6 = 42$; d’où le nombre d’arêtes : $\dfrac{42}{2} = 21$.

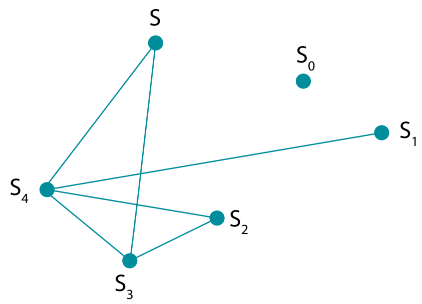
3. Il y a donc 21 conseillers généraux et 6 membres dans chaque commission.

26 **1.** Les nombres de poignées de main échangées par les cinq personnes autres que M. Grafeuil sont, puisque 4 en est le nombre maximum : 0, 1, 2, 3 et 4.

2. a) Le sommet S_4, de degré 4, est relié à tous les autres sommets sauf S_0, qui n’est relié à aucun sommet, et qui représente donc son conjoint.

b) S_1 est relié à S_4 seulement, donc les trois sommets adjacents à S_3 sont S_2, S_4 et S ; le conjoint de S_3 est donc S_1.

3. Les deux sommets adjacents à S_2 étant déjà identifiés, le graphe représentant la situation est donc le suivant :



Conclusion : l’épouse de M. Grafeuil est représentée par le sommet S_2 ; M. et Mme Grafeuil ont, tous les deux, serré la main aux deux personnes représentées par les sommets S_3 et S_4.

27 **1. a)** La somme des degrés des sommets d’un graphe est égale à deux fois le nombre d’arêtes : c’est donc un nombre pair.

b) La somme des degrés des sommets d’un graphe d’ordre 5 dont tous les sommets sont de degré 3 serait égale à $5 \times 3 = 15$ qui est impair ; un tel graphe n’existe donc pas.

2. La somme des degrés des sommets d’un graphe d’ordre $2k + 1$ dont tous les sommets sont de degré 3 serait égale à $(2k + 1) \times 3$ qui est un nombre impair ; un tel graphe n’existe donc pas.

3. Un graphe d’ordre 4 dont tous les sommets sont de degré 3 est un graphe complet d’ordre 4.

4. Graphe d’ordre 6 répondant à la question : un hexagone, en prenant pour arêtes les six côtés de l’hexagone : (1-2), (2-3), (3-4), (4-5), (5-6), (6-1) (chaque sommet étant alors de degré 2), et trois diagonales faisant passer le degré de chaque sommet de 2 à 3, par exemple (1-4), (2-5) et (3-6).

28 **1.** La somme des degrés des sommets d’un graphe, égale au double du nombre d’arêtes, est un entier pair.

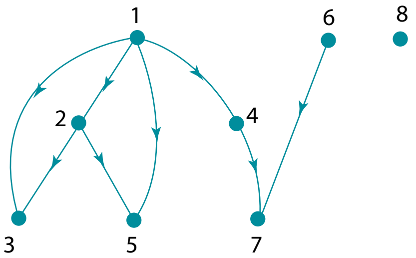
Dans le graphe d’ordre 7 dont les sommets sont les sept équipes et dans lequel une arête relie deux sommets i et j si l’équipe i rencontre l’équipe j, les sommets ne peuvent donc pas être tous de degré 5, car alors la somme des degrés serait égale à $7 \times 5 = 35$, qui est impair. Il est donc impossible de faire jouer cinq matchs à chaque équipe.

2. La question est celle de l’existence d’un graphe d’ordre 7 dont tous les sommets soient de degré 4. On va construire un tel graphe.

• On part d’un heptagone, en prenant pour arêtes les sept côtés de l’heptagone : (1-2), (2-3), (3-4), (4-5), (5-6), (6-7), (7-1) : tous les sommets sont donc, pour l’instant, de degré 2.

• On ajoute deux arêtes nouvelles quelconques : les quatre sommets extrémités de ces deux arêtes sont donc désormais de degré 3.
• On relie deux quelconques des trois autres sommets au troisième : ce dernier est donc de degré 4, et les six autres sont de degré 3.
• On relie enfin ces six sommets par paires : dans le graphe obtenu, tous les sommets sont de degré 4.
Exemple de choix d'arêtes : (1-5) et (3-7), puis (2-6) et (4-6), enfin (1-3), (2-5) et (4-7).

29 **1.**



2. La somme des termes d'une ligne i quelconque de A est égale au nombre d'arêtes orientées d'origine le sommet *i* : elle indique donc le nombre de chapitres nécessitant en prérequis le chapitre *i*.
Le chapitre à réviser en priorité est donc celui qui correspond à la ligne de A dont la somme des termes est la plus grande : il s'agit du chapitre 1.

30 **1.** On prend comme origine du temps la date de début du chantier.
• La tâche T_2 est exécutable dès que la tâche T_1, de durée 2, est achevée, c'est-à-dire au plus tôt à la date 2.
• La tâche T_3 est exécutable dès que les tâches T_1 et T_2 sont achevées ; or T_1 est achevée au plus tôt à la date 2, et T_2 – dont l'exécution démarre au plus tôt à la date 2 et dure trois jours – à la date 5 ; la date de début au plus tôt de T_3 est donc égale à max(2,5), c'est-à-dire 5.
• La tâche T_4 est exécutable dès que les tâches T_2 et T_3 sont achevées, c'est-à-dire au plus tôt à la date calculée par max(2 + 3, 5 + 2), soit 7.
• La tâche T_5 est exécutable dès que les tâches T_2, T_3 et T_4 sont achevées, c'est-à-dire au plus tôt à la date calculée par max(2 + 3, 5 + 2, 7 + 4), soit 11.
• La fin du chantier T_6 survient dès que les tâches T_4 et T_5 sont achevées, c'est-à-dire au plus tôt à la date calculée par max(7 + 4, 11 + 3), soit 14.
N.B. : la date au plus tôt de l'exécution d'une tâche T_j (respectivement de la fin du chantier T_6) est le poids d'un plus long chemin de T_1 à T_j (respectivement de T_1 à T_6).

31 **1. a)** Liste exhaustive des tournées de G : 1-2-3-4-1, 1-2-4-3-1, 1-3-2-4-1, 1-3-4-2-1, 1-4-2-3-1, 1-4-3-2-1.
b) En fait, les tournées 1-2-3-4-1 et 1-4-3-2-1, 1-2-4-3-1 et 1-3-4-2-1, 1-3-2-4-1 et 1-4-2-3-1 ne diffèrent que par le sens de parcours, elles ont le même kilométrage.
c)

Tournée	1-2-3-4-1 et 1-4-3-2-1	1-2-4-3-1 et 1-3-4-2-1	1-3-2-4-1 et 1-4-2-3-1
Kilométrage	173	168	221

d) Solution du problème : la tournée 1-2-4-3-1 (ou 1-3-4-2-1).
2. La solution est la même tournée, mais avec départ de 4 et retour en 4, c'est-à-dire : 4-3-1-2-4 (ou 4-2-1-3-4).

CONNEXITÉ

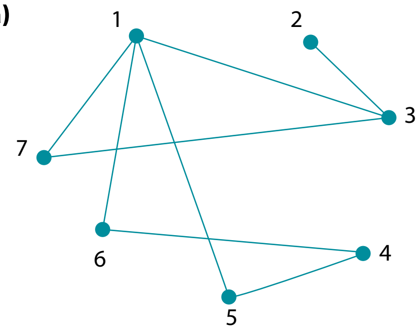
32 G est connexe. En effet, la chaîne C = (2-3-1-4-5-6) passe par tous les sommets de G, donc deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de C.

33 G n'est pas connexe. En effet, il n'existe pas, par exemple, de chaîne reliant les sommets 2 et 5.

34 G est connexe. En effet, la chaîne C = (1-3-2-4-5-6) passe par tous les sommets de G, donc deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de C.

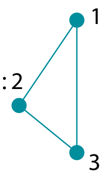
35 G n'est pas connexe. En effet, il n'existe pas, par exemple, de chaîne reliant les sommets 1 et 6.

36 **1.** G est connexe. En effet, si C est la chaîne passant par tous les sommets de G, alors deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de C.
2. a)



b) La chaîne (2-3-7-1-6-4-5) passe par tous les sommets de G. On en déduit que G est connexe.

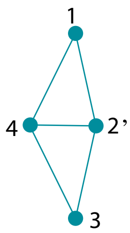
37 **1.** G_1 n'est pas connexe. En effet, il n'existe pas, par exemple, de chaîne reliant les sommets 1 et 4.
Par contre, G_1 peut être décomposé en deux graphes connexes :

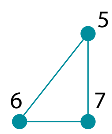
G'_1 : 

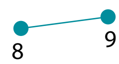
et G''_1 : 

(composantes connexes de G_1).

G_2 n'est pas connexe, mais peut être décomposé en trois graphes connexes :

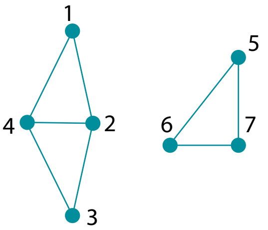
G'_2 : 

G''_2 : 

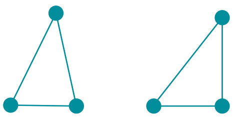
et G'''_2 : 

(composantes connexes de G_2).

2. a)



b)



(Il n'y a pas d'autre solution.)

CHAÎNES EULÉRIENNES

Dans les exercices 38 à 40, les graphes considérés sont connexes.

38 **a)** Oui ; (2-1-5-2-3-4).
b) Non (quatre sommets de degré impair).

39 **a)** Oui ; (1-2-3-1-4-5-6-3-4).
b) Non (quatre sommets de degré impair).

40 **a)** Tous les sommets sont de degré pair, donc le graphe admet une chaîne eulérienne fermée, par exemple : (1-2-3-4-1-3-6-5-1).
b) Non (quatre sommets de degré impair).

41 **1.** Le graphe est connexe, mais le nombre de sommets de degré impair est égal à 4.
2. En rajoutant une arête reliant deux sommets de degré impair, le nombre de sommets de degré impair du graphe obtenu – *a fortiori* connexe – est égal à 2 ; le graphe obtenu admet donc une chaîne eulérienne. Si, par exemple, on rajoute l'arête (1-6), le graphe obtenu admet la chaîne eulérienne (2-1-6-5-4-3-2-4).

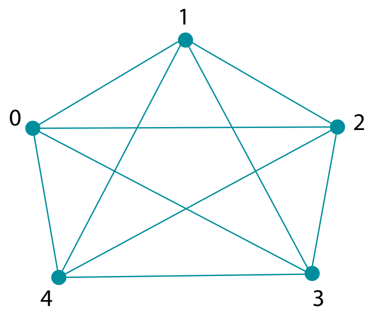
42 **1.** Le problème est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne dans le graphe. Or, le graphe est connexe, mais quatre sommets sont de degré impair (A, B, D, I). Il n'admet donc pas de chaîne eulérienne.
2. Si l'on supprime l'arête (B-D), le graphe obtenu reste connexe, et n'a plus que deux sommets de degré impair (A et I) ; il admet donc une chaîne eulérienne d'extrémités A et I, par exemple : (A-B-C-I-E-D-A-G-D-H-G-F-H-E-F-I), parcours permettant au promeneur de parcourir toutes les rues – sauf (B-D) – sans passer deux fois par la même rue.
Autres solutions : suppression de l'arête (A-B) ou (A-D).

43 Le problème est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne dans le graphe du site internet. Or ce graphe est connexe, mais quatre sommets sont de degré impair (A, B, D, G) ; il n'admet donc pas de chaîne eulérienne, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de parcours passant une seule fois par tous les liens de pages.

44 **1.** Le graphe est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. D'après le théorème d'Euler, il admet donc une chaîne eulérienne fermée.
2. Exemple d'une telle chaîne : (A-B-C-A-E-C-F-E-D-A).

45 **2.** G n'est pas complet, mais il est connexe.
3. a) Le problème est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne fermée dans le graphe. Or, le graphe est connexe, mais tous les sommets ne sont pas de degré pair ; il n'existe donc pas de telle chaîne.
b) Le problème est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne dans le graphe. Or, le graphe est connexe et admet exactement deux sommets de degré impair : 6 et 8 ; il existe donc une chaîne eulérienne reliant 6 et 8, par exemple : (6-5-4-3-2-4-6-7-1-2-8-3-1-8), d'où une réponse positive à la question posée.

46 **1.** Les graphes de cet exercice sont complets donc connexes.



G (graphe complet d'ordre 5).
2. L'alignement des deux dominos $\boxed{n_1 \mid n_2}$ et $\boxed{n_3 \mid n_4}$ n'est possible que si $n_2 = n_3$ c'est-à-dire si les arêtes représentatives $(n_1 - n_2)$ et $(n_3 - n_4)$ forment, dans G, une chaîne de longueur 2 d'extrémités n_1 et n_4.
L'alignement de tous les dominos n'est donc possible que s'il existe dans G une chaîne eulérienne (*tous* les dominos sont utilisés *une seule fois*).
3. Tous les sommets de G étant de degré pair, une telle chaîne existe, plus précisément : il existe une chaîne eulérienne fermée dans G, par exemple (0-1-2-3-4-0-2-4-1-3-0) et donc une solution au problème (P) obtenue en intercalant les « doubles ».
4. a) Dans le graphe complet G d'ordre 4 représentant la situation, les quatre sommets sont de degré 3 donc impair ; donc pas de chaîne eulérienne dans G et donc pas de solution au problème (P).
b) Les sept sommets sont de degré 6 donc pair, d'où l'existence d'une chaîne eulérienne fermée dans G par exemple : (0-1-2-3-4-5-6-0-2-4-6-1-3-5-0-3-6-2-5-1-4-0), et donc d'une solution au problème (P) dans ce cas, obtenue en intercalant les « doubles ».

47 **1.** Le problème est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne dans le graphe. Or, le graphe est connexe et admet exactement deux sommets de degré impair : E et G ; il existe donc une chaîne eulérienne reliant E et G, par exemple la chaîne : (E-D-C-B-A-G-F-E-C-G-E-B-G).
2. Le problème est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne fermée dans le graphe.
Or le graphe est connexe, mais tous les sommets ne sont pas de degré pair ; il n'existe donc pas de telle chaîne.

48 **A. 1.** Deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (Y-C-D-G-H-E-F-B-A-Z) : le graphe est donc connexe.

2.

Sommet	Y	A	B	C	D	E	F	G	H	Z
Degré	3	4	4	4	4	4	2	4	2	1

3. D'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités les deux sommets de degré impair : Y et Z.

B. 1. La situation peut être représentée par un graphe ayant pour sommets Y (accueil), A, B, C, D, E, F, G, H (les salles d'exposition du musée), et Z (boutique), et dans lequel une arête relie deux sommets si et seulement si les deux salles représentées par ces sommets communiquent par une porte. Le graphe ainsi obtenu est le graphe du **A.**

2. Le résultat du **A.3.** assure alors l'existence d'un parcours partant de l'accueil Y, passant une fois et une seule par toutes les portes intérieures du musée et arrivant à la boutique Z. Exemple d'un tel parcours : (Y-G-H-E-F-B-E-D-B-A-C-G-D-C-Y-A-Z).

N.B. : considérons le graphe obtenu en rajoutant un sommet X (billetterie/livre d'or, à l'extérieur du musée, à proximité de l'accueil et de la boutique), ainsi qu'une arête (X-Y) représentant la porte d'accès à l'accueil, et une arête (Z-X) représentant la porte de sortie de la boutique ; dans ce graphe (connexe !), tous les sommets sont de degré pair, et il existe donc une chaîne eulérienne fermée, obtenue, par exemple, en concaténant l'arête (X-Y), la chaîne eulérienne de Y à Z proposée ci-dessus, et l'arête (Z-X).

49 **1.**

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	5	3	4	2	2

La somme des degrés des sommets est égale à 20, le nombre d'arêtes est donc égal à $\frac{20}{2} = 10$.

2. Le graphe est connexe. En effet, deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (F-A-B-C-D-E) qui passe par tous les sommets.

Par ailleurs, deux sommets sont de degré impair : B et C.

D'après le théorème d'Euler, le graphe admet donc une chaîne eulérienne d'extrémités B et C. Exemple de chaîne eulérienne : (B-A-C-B-F-A-D-E-B-D-C).

RECHERCHE D'UN PLUS COURT CHEMIN

50 Poids des chemins de A à E ne passant pas deux fois par le même sommet :

Chemin	(A-B-C-E)	(A-B-C-D-E)	(A-B-D-E)	(A-B-D-C-E)	(A-C-E)	(A-C-D-E)	(A-C-B-D-E)
Poids	7	8	7	10	8	9	10

Plus courts chemins *ex æquo* de A à E : (A-B-C-E) et (A-B-D-E), de poids 7.

Dijkstra :

A	B	C	D	E	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	A
	0 + 3 3 (A)	0 + 5 5 (A)	∞	∞	B
		3 + 1 4 (B)	3 + 2 5 (B)	∞	C
			4 + 2 5 (B)	4 + 3 7 (C)	D
				5 + 2 7 (C)	E

D'où un plus court chemin de A à E : (A-B-C-E).

N.B. : Lors de la dernière mise à jour éventuelle du coefficient de E, on compare 5 + 2 au coefficient de E égal à 7 ; les deux nombres étant égaux, on garde, conventionnellement, 7(C) ; mais le fait que le coefficient 7 soit égalé signifie qu'il existe un autre chemin de longueur 7 de A à E, dont l'avant-dernier sommet est D : le chemin (A-B-D-E).

51 Poids des chemins de A à E ne passant pas deux fois par le même sommet :

Chemin	(A-E)	(A-C-E)	(A-B-C-E)	(A-B-D-C-E)
Poids	5	4	7	11

Plus court chemin de A à E : (A-C-E), de poids 4.

Dijkstra :

A	B	C	D	E	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	A
	0 + 2 2 (A)	0 + 1 1 (A)	∞	0 + 5 5 (A)	C
	1 + 2 2 (A)		1 + 4 5 (C)	1 + 3 4 (C)	B
			2 + 2 4 (B)	4 (C)	D
				4 (C)	E

D'où un plus court chemin de A à E : (A-C-E), de poids 4.

Remarque concernant la sélection du sommet D : on aurait pu choisir le sommet E qui est affecté du même coefficient (4) ; l'algorithme se serait alors terminé avec cette sélection de E.

52 Poids des chemins de A à E ne passant pas deux fois par le même sommet :

Chemin	(A-B-C-D-E)	(A-B-C-E)	(A-B-D-C-E)	(A-B-D-E)	(A-B-E)
Poids	$4 + x$	6	$6 + x$	4	4

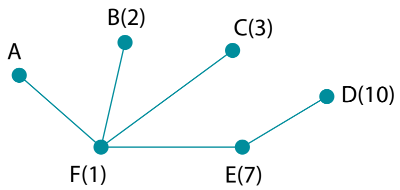
Chemin	(A-C-B-D-E)	(A-C-B-E)	(A-C-D-B-E)	(A-C-D-E)	(A-C-E)
Poids	4	4	$4 + x$	$2 + x$	4

Donc (A-C-D-E) est un plus court chemin de A à E si et seulement si $x \leqslant 2$.

53 Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0 + 3 3 (A)	∞	∞	∞	0 + 1 1 (A)	F
	1 + 1 2 (F)	1 + 2 3 (F)	∞	1 + 6 7 (F)		B
		2 + 4 3 (F)	∞	7 (F)		C
			3 + 9 12 (C)	7 (F)		E
			7 + 3 10 (E)			D

Dans le graphe suivant, pour tout sommet X ≠ A, l'unique chemin de A à X est un plus court chemin de A à X ; son poids est indiqué à côté de X entre parenthèses.



54 Dijkstra :

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	*a*
	0 + 3 3 (*a*)	0 + 11 11 (*a*)	0 + 17 17 (*a*)	0 + 16 16 (*a*)	∞	∞	∞	*b*
		3 + 5 8 (*b*)	17 (*a*)	16 (*a*)	∞	∞	∞	*c*
			17 (*a*)	8 + 6 14 (*c*)	∞	8 + 7 15 (*c*)	∞	*e*
			14 + 3 17 (*a*)		14 + 7 21 (*e*)	14 + 6 20 (*c*)	∞	*g*
			17 (*a*)		21 (*e*)		15 + 11 26 (*g*)	*d*
					21 (*e*)		17 + 9 26 (*g*)	*f*
							21 + 4 25 (*f*)	*h*

Le trajet de durée minimum est : (*a-b-c-e-f-h*), de durée 25 minutes.

55 **1.**

Plus courts chemins reliant les sommets	1 et 2	1 et 3	1 et 4	2 et 3	2 et 4	3 et 4
→	(1-2) et (2-1)	(1-2-4-3) et (3-4-2-1)	(1-2-4) et (4-2-1)	(2-4-3) et (3-4-2)	(2-4) et (4-2)	(3-4) et (4-3)

3. • Décrivons, par exemple, à partir des termes (a_{ij}) de la matrice A, les sommets rencontrés sur le plus court chemin allant de 3 à 1 ; ces sommets sont : 3, puis $a_{31} = 4$, puis $a_{41} = 2$, puis $a_{21} = 1$: on retrouve bien le chemin (3-4-2-1).

• Autre exemple. Les sommets rencontrés sur le plus court chemin allant de 1 à 4 sont : 1, puis $a_{14} = 2$, puis $a_{24} = 4$; on retrouve bien le chemin (1-2-4).

56 **1. a)**

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	4	3	2

b) Deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (E-D-A-C-B-F) qui passe par tous les sommets : le graphe est donc connexe.

2. a) Il s'agit de justifier l'existence, dans le graphe, d'une chaîne eulérienne.

Or le graphe est connexe et a exactement deux sommets de degré impair, E et B ; il admet donc une chaîne eulérienne reliant E et B.

b) Exemple d'une telle chaîne :

(E-D-C-A-E-C-B-A-D-F-B).

3. Dijkstra :

E	A	C	D	B	F	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	E
	0 + 30 30 (E)	0 + 40 40 (E)	0 + 10 10 (E)	∞	∞	D
	10 + 10 20 (D)	10 + 40 50 (E)		∞	10 + 70 80 (D)	A
		20 + 10 30 (A)		20 + 40 60 (A)	80 (D)	C
				30 + 20 50 (C)	80 (D)	B
					50 + 20 70 (B)	F

Le chemin minimisant la dépense est donc :

(E-D-A-C-B-F), de coût 70.

57 **1. a)** Tout chemin empruntant l'arête (A-B) ne peut pas être un plus court chemin, puisque le chemin obtenu en substituant la chaîne (A-C-B) ou (B-C-A) à l'arête (A-B) a un poids inférieur (de 7-6, c'est-à-dire 1).

L'arête (A-B) ne fait donc partie d'aucun plus court chemin : elle peut donc, lors de toute recherche d'un plus court chemin, être « supprimée ».

b) Plus généralement, si, dans un « triangle » inclus dans un graphe, le poids d'une arête est supérieur à la somme des poids des deux autres, alors cette arête ne fait partie d'aucun plus court chemin et peut donc, lors de toute recherche d'un plus court chemin, être « supprimée ».

N.B. : si, dans un « triangle » inclus dans un graphe, le poids d'une arête *v* est égal à la somme des poids des deux autres, alors, pour tout chemin empruntant *v*, le chemin obtenu en substituant à *v* la chaîne formée par les deux autres arêtes *a le même poids* ; lors de toute recherche d'un plus court chemin, on peut donc, dans ce cas également, supprimer l'arête *v*.

2. a)

1	2	3	4	5	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	1
	0 + 4 4 (1)	0 + 8 8 (1)	0 + 11 11 (1)	0 + 4 4 (1)	2
		4 + 3 7 (2)	4 + 10 11 (1)	4 + 2 4 (1)	5
		4 + 5 7 (2)	4 + 6 10 (5)		3
			7 + 2 9 (3)		4

Un plus court chemin de 1 à 4 est donc : (1-2-3-4), de poids 9.

b) On peut « supprimer », dans la recherche de plus courts chemins, les arêtes : (1-3) (triangle (1-3-2)), (1-4) (triangle (1-4-5)), (2-4) (triangle (2-4-3)), (3-5) (triangle (3-5-2), poids ((3-5)), poids ((2-3)) + poids ((2-5))).

c) Dans le graphe obtenu après la suppression de ces quatre arêtes, on peut effectuer une recherche directe d'un plus court chemin de 1 à 4 en énumérant les chemins de 1 à 4 ne passant pas deux fois par le même sommet : (1-5-4), de poids 10, (1-5-2-3-4), de poids 11, (1-2-5-4), de poids 12 et (1-2-3-4), de poids 9, que l'on retrouve bien comme un plus court chemin de 1 à 4.

58 **1.** En comparant les poids des différents chemins de 1 à 7 ne passant pas deux fois par le même sommet, on trouve comme plus court chemin le chemin (1-3-5-7), de poids 10.

2. Quand le poids de chaque arête est augmenté de deux unités, le poids d'un chemin quelconque augmente de deux fois le nombre de ses arêtes (« sa longueur »).

Le poids du chemin (1-3-5-7) passe donc à
$10 + (2 \times 3) = 16$, alors que le poids du chemin (1-4-7) devient égal à $11 + (2 \times 2) = 15$.

Le chemin (1-3-5-7) n'est donc plus un plus court chemin.

59 **1.** Si chaque arête a le même poids, k, alors le poids d'un chemin est égal à k fois le nombre de ses arêtes (« sa longueur »). La recherche d'un plus court chemin d'un sommet à un autre équivaut donc à la recherche d'un chemin, reliant ces deux sommets, dont le nombre d'arêtes est minimum.

2. Voici, pour chaque sommet i, un plus court chemin allant de 1 à i :

Chemin	(1-2)	(1-3)	(1-4)	(1-6)	(1-2-5)	(1-3-7)	(1-6-9)	(1-3-7-8)
Poids	3	3	3	3	6	6	6	9

60 Un chemin, allant d'un sommet a à un sommet b, passant deux fois par un même sommet s, ne peut pas être un plus court chemin de a à b.

En effet, si on supprime la partie du chemin comprise entre les deux passages par s, on obtient un chemin de a à b de poids strictement inférieur.

61 Directement : le plus court chemin de E à B est (E-C-B), de poids 8 (les deux autres chemins de E à B étant (E-B), de poids 10, et (E-A-B), de poids 11). On en déduit que le chemin (E-C-B-S) est un plus court chemin de E à S, car son poids (12) est inférieur à celui (13) du chemin (E-S).

62 Dijkstra :

1	2	3	4	5	6	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	1
	0 + 7 7 (1)	0 + 1 1 (1)	∞	∞	∞	3
	1 + 5 6 (3)		∞	1 + 2 3 (3)	1 + 8 9 (3)	5
	3 + 2 5 (5)		3 + 5 8 (5)		9 (3)	2
			5 + 4 8 (5)		5 + 2 7 (2)	6
			8 (5)			4

D'où, pour chaque sommet i, un plus court chemin allant de 1 à i :

Chemin	(1-3-5-2)	(1-3)	(1-3-5-4)	(1-3-5)	(1-3-5-2-6)
Poids	5	1	8	3	7

63 Dijkstra :

1	2	3	4	5	6	7	8	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1
	0 + 20 20 (1)	0 + 10 10 (1)	∞	0 + 25 25 (1)	∞	∞	∞	3
	20 (1)		10 + 12 22 (3)	10 + 16 25 (1)	∞	10 + 35 45 (3)	∞	2
			20 + 16 22 (3)	20 + 7 25 (1)	∞	20 + 26 45 (3)	20 + 30 50 (2)	4
				25 (1)	22 + 15 37 (4)	45 (3)	50 (2)	5
					25 + 16 37 (4)	25 + 14 39 (5)	50 (2)	6
						37 + 7 39 (5)	37 + 19 50 (2)	7
							39 + 9 48 (7)	8

Le parcours (1-5-7-8) minimise le kilométrage de la ville 1 à la ville 8 (48 km).

2. Tout chemin (1-…-i) « extrait » du plus court chemin (1-5-7-8) est un plus court chemin de 1 à i. (S'il existait en effet un chemin de 1 à i de poids inférieur, alors, en concaténant ce chemin avec le chemin (i-…-8) « extrait » du chemin (1-5-7-8), on obtiendrait un chemin de 1 à 8 de poids inférieur au chemin (1-5-7-8)).

Un plus court chemin pour aller de la ville 1 à la ville 5 est donc (1-5) et un plus court chemin pour aller de la ville 1 à la ville 7 est donc (1-5-7).

64 **1.** Dijkstra :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1
	0 + 14 14 (1)	0 + 12 12 (1)	0 + 13 13 (1)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3
	14 (1)		13 (1)	12 + 9 21 (3)	12 + 10 22 (3)	12 + 13 25 (3)	∞	∞	∞	∞	4
	14 (1)			21 (3)	13 + 7 20 (4)	13 + 11 24 (4)	∞	∞	∞	∞	2
				14 + 6 20 (2)	14 + 8 20 (4)	24 (4)	∞	∞	∞	∞	5
					20 (4)	24 (4)	20 + 11 31 (5)	20 + 6 26 (5)	∞	∞	6
						24 (4)	20 + 7 27 (6)	20 + 9 26 (5)	20 + 5 25 (6)	∞	7
							27 (6)	26 (5)	24 + 5 25 (6)	∞	10
							27 (6)	26 (5)		25 + 11 36 (10)	9
							27 (6)			26 + 9 35 (9)	8
										27 + 7 34 (8)	11

Le projet dont le coût total est minimum correspond au tracé (1-4-6-8-11).

2. Compte tenu de l'augmentation uniforme de 5 %, le coût de chaque tronçon est multiplié par 1,05, et donc le coût total correspondant à n'importe quel tracé allant de la ville 1 à la ville 11 est lui aussi multiplié par 1,05.

Le projet correspondant au tracé (1-4-6-8-11) reste donc le moins coûteux.

GRAPHES ÉTIQUETÉS

65 **a)** • Mot reconnu : « *bab* ».

• Liste des mots de quatre lettres reconnus : « *aaab* », « *abab* », « *baab* ».

• Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, ne comportant pas deux « *b* » consécutifs et se terminant par « *b* ».

b) • Mots reconnus : « *aba* », « *bba* », « *baba* » et « *bababa* ».

• Liste des mots de quatre lettres reconnus : « *abba* », « *baba* » et « *bbba* ».

• Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, ne comportant pas deux « *a* » consécutifs et se terminant par « *a* ».

c) • Mots reconnus : « *bba* » et « *baba* ».

• Liste des mots de quatre lettres reconnus : « *aaaa* », « *aaba* », « *abaa* », « *abba* », « *baaa* », « *baba* », « *bbaa* », « *bbba* ».

• Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, se terminant par « *a* ».

d) • Mots reconnus : « *bb* » et « *bba* ».

• Liste des mots de quatre lettres reconnus : « *aaba* », « *aabb* », « *bbaa* », « *bbab* », « *bbba* », « *bbbb* ».

• Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, commençant par « *bb* » ou par « *aab* ».

66 **a)** • Liste des mots de trois lettres reconnus : « *aaa* », « *aba* », « *baa* ».

• Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, ne comportant pas deux « *b* » consécutifs et se terminant par « *a* ».

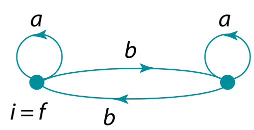
b) • Liste des mots de trois lettres reconnus : « *aab* », « *aba* », « *baa* », « *bbb* ».

• Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, comportant un nombre impair de « *b* ».

67 **a)** Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots sur $\{a, b\}$ comportant exactement deux « *b* ».

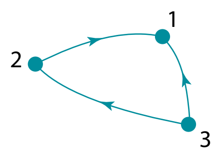
b) Ensemble des mots reconnus : ensemble des mots formés avec les lettres *a* et *b*, comportant un seul « *a* » et se terminant par un « *b* ».

68



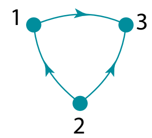
PUISSANCE N-IÈME DE LA MATRICE ASSOCIÉE À UN GRAPHE

69



Aucune chaîne orientée de longueur 3, donc $A^3 = (0)$.

70



Aucune chaîne orientée de longueur 3, donc $A^3 = (0)$.

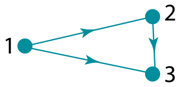
71 **1.** Deux chaînes orientées de longueur 2 allant du sommet 1 au sommet 3 : (1-2-3) et (1-4-3) ; une seule chaîne orientée de longueur 3 reliant ces deux sommets : (1-3-4-3).

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve les résultats du 1. puisque l'élément (1, 3) de M^2 est égal à 2 et que l'élément (1, 3) de M^3 est égal à 1.

72 **1.**



2. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: on en déduit qu'il existe dans le graphe une seule chaîne orientée de longueur 2, qui va du sommet 1 au sommet 3 (résultat que l'on peut facilement visualiser sur le graphe : c'est la chaîne (1-2-3)).

3. M^3 est la matrice nulle d'ordre 3 : on en déduit qu'il n'existe dans le graphe aucune chaîne orientée de longueur 3 (résultat visuellement évident sur le graphe).

73 **1.** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. a) On dénombre sept chaînes de longueur 3 reliant les sommets 1 et 5 : (1-2-1-5), (1-2-3-5), (1-2-4-5), (1-4-1-5), (1-5-1-5), (1-5-3-5), (1-5-4-5).

b) On peut calculer M^2, puis l'élément (1, 5) de M^3 ; plus astucieusement, on calcule seulement la première ligne de $M^2 = (3 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1)$, l'élément (1, 5) de M^3 s'obtenant en effectuant le produit matriciel de la première ligne de M^2 par la cinquième colonne de M :

$$(3 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (7)$$

On retrouve le résultat du **a)**.

74 **1.** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. a) Première ligne de $M^2 = (3 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0)$.

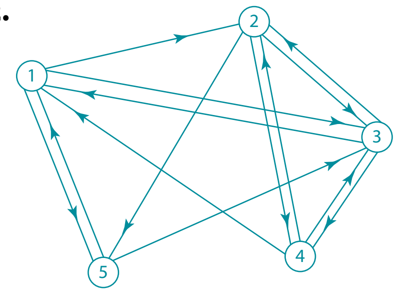
b) Le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A et arrivant en un autre sommet est égal à la somme des termes de la première ligne de M^2 autres que le premier, c'est-à-dire 5.

75 **1. a)** Les termes m_{45} et m_{54} de la matrice M sont nuls : il n'y a donc pas d'arête reliant les sommets 4 et 5 ; par conséquent G n'est pas complet.

b) Les sommets 4 et 5 sont les seuls qui ne sont pas reliés par une arête ; mais, puisque $(M^2)_{54} = 1$, il existe une chaîne orientée de longueur 2 allant du sommet 5 au sommet 4 ; le graphe G est donc connexe.

N.B. : la connexité de G peut être justifiée à partir de la seule matrice M^2. En effet, tous les termes de M^2 sauf $(M^2)_{25}$ sont non nuls : toute paire de sommets, sauf la paire 2-5, est donc reliée (dans les deux sens !), par au moins une chaîne orientée ; et les sommets 2 et 5 sont, puisque $(M^2)_{52} = 2$, reliés par deux chaînes orientées de 5 vers 2.

2.



3. $(M^2)_{52} = 2$, il y a donc deux chaînes orientées de longueur 2 de 5 vers 2 : (5-1-2) et (5-3-2).

4. a) On calcule le terme $(M^3)_{45}$ en effectuant le produit matriciel de la quatrième ligne de M^2 :

$(1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2)$ par la cinquième colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de M ;

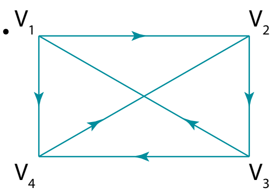
on trouve : $(M^3)_{45} = 3$.

Il y a donc trois chaînes orientées de longueur 3 du sommet 4 vers le sommet 5 : (4-3-1-5), (4-1-2-5) et (4-3-2-5).

b) De même :

$(M^3)_{13} = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$. Il y a donc six chaînes orientées du sommet 1 vers le sommet 3 : (1-3-1-3), (1-5-1-3), (1-3-2-3), (1-2-4-3), (1-3-4-3) et (1-2-5-3).

76 **1.**



2. L'existence d'un vol de V_i vers V_j comportant au plus deux escales équivaut à l'existence, dans le graphe précédent, d'une chaîne orientée de longueur $\leqslant 3$ allant de V_i à V_j. On vérifie qu'il existe de telles chaînes pour tout (i, j), $i \neq j$:

$(V_1 - V_2)$, $(V_1 - V_2 - V_3)$, $(V_1 - V_4)$;
$(V_2 - V_3 - V_1)$, $(V_2 - V_3)$, $(V_2 - V_3 - V_4)$;
$(V_3 - V_1)$, $(V_3 - V_1 - V_2)$, $(V_3 - V_4)$;
$(V_4 - V_2 - V_3 - V_1)$, $(V_4 - V_2)$, $(V_4 - V_2 - V_3)$.

3. a) On numérote V_1, V_2, V_3, V_4 respectivement 1, 2, 3, 4.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

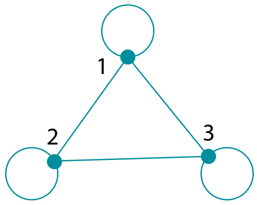
b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Notons $M = (a_{ij})$, $M^2 = (b_{ij})$, $M^3 = (c_{ij})$.

L'existence d'au moins un vol d'au plus deux escales de chaque ville V_i vers chaque ville V_j $(i \neq j)$ équivaut à : pour tout (i, j), $i \neq j$, l'un au moins des éléments a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} est un entier strictement positif. On vérifie facilement qu'il en est bien ainsi.

N.B. : compte tenu de la positivité de a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, cette condition équivaut également à « chaque élément non diagonal de $M + M^2 + M^3$ est strictement positif ».

77 **b)** Le graphe :



admet A pour matrice associée.

Dans ce graphe :

– i désignant l'un quelconque des trois sommets, j et k les deux autres sommets, il y a trois chaînes de longueur 2 d'origine et d'extrémité i : (i-i-i), (i-j-i) et (i-k-i) ;

– i et j désignant deux sommets différents quelconques et k le troisième sommet, il y a trois chaînes de longueur 2 d'origine i et d'extrémité j : (i-i-j), (i-j-j) et (i-k-j).

D'où $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

78 **1.** Par définition.

2. La plus longue chaîne orientée du graphe est la chaîne (1-2-3-4) de longueur 3 ; il n'existe donc pas de chaîne de longueur 4.

3. Par conséquent, tous les termes de la matrice A^4 sont nuls, et par suite $A^n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$.

79 Le graphe admettant la chaîne orientée (1-2-4-1-2) de longueur 4, le terme $(A^4)_{12}$ de la matrice A^4 est égal à 1. La matrice A^4 n'est donc pas nulle.

N.B. : il y a trois autres chaînes orientées de longueur 4 : (1-2-4-1-3), (2-4-1-2-4) et (4-1-2-4-1) et donc $(A^4)_{13} = (A^4)_{24} = (A^4)_{41} = 1$.

80 Le graphe 1  2 a pour matrice A.

Les chaînes de longueur 2 de ce graphe sont (1-2-1) et (2-1-2), d'où $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Les chaînes de longueur 3 du graphe sont (1-2-1-2) et (2-1-2-1), d'où $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Par suite $A^4 = A^3 \times A = A \times A = A^2$,

$A^5 = A^4 \times A = A^2 \times A = A^3 = A$.

De proche en proche $A^{2p} = I_2$, $A^{2p+1} = A$.

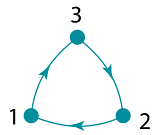
(Les chaînes de longueur $2p$ sont : (1-2-1- … 2-1) et (2-1-2- … 1-2) ; les chaînes de longueur $2p + 1$ sont : (1-2-1-2- … 1-2) et (2-1-2-1- … 2-1).)

81 Dans un graphe non orienté, pour tout entier $n \geqslant 1$: pour toute paire (i, j) de sommets distincts, l'existence d'une chaîne de longueur n reliant i à j équivaut à l'existence d'une chaîne de longueur n reliant j à i. Le nombre de chaînes reliant i à j est donc égal au nombre de chaînes reliant j à i. D'où la symétrie de A^n.

82 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n ayant un seul terme non nul : $a_{i_0 i_0} = 1$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$. Une telle matrice peut être considérée comme associée à un graphe de sommets 1, 2, …, n, ayant pour seule arête une boucle en le sommet i_0.

Pour tout $n \geqslant 1$: la seule chaîne de longueur n est donc la chaîne obtenue en parcourant n fois la boucle en le sommet i_0, et donc $A^n = A$.

83 Le graphe orienté



admet A pour matrice associée. Les chaînes orientées de longueur 2 sont :

(1-3-2), (2-1-3), (3-2-1), d'où $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

les chaînes orientées de longueur 3 sont : (1-3-2-1), (2-1-3-2),

(3-2-1-3), d'où $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$;

puis $A^4 = A$, …, $A^{3n} = I_3$, $A^{3n+1} = A$, $A^{3n+2} = A^2$.

84 **1.** G est d'ordre 7.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	3	3	2	4	3	2

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir est égal à la somme des termes de la première ligne de M^2 autres que le premier, c'est-à-dire 5.

POUR LA LOGIQUE

85 **1.** Faux (par exemple : deg A = 1, deg B = 3).

2. Vrai (N = M).

3. Faux (si M = A, alors, $\forall N \in \mathcal{S}$, $N \neq M$: deg N $\neq$ deg M).

86 **1.** Faux (la somme des degrés des sommets d'un graphe quelconque est égale au double du nombre de ses arêtes : c'est donc un entier pair).

2. Vrai (graphe ayant la configuration d'un triangle).

87 **1.** Vrai ($\forall x \in$]0 ; 0,5[, (A-D-C) est le plus court chemin de A à C).

2. Faux ($\forall x \in$]0,5 ; 0,6[, le plus court chemin de A à C est (A-C)).

Accompagnement personnalisé (page 327)

SOUTIEN

88

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	5	7	4	5	7	6	4	4

(Pour les degrés de A et E, la boucle « compte pour 2 »).
La somme des degrés des sommets vaut 42. Le nombre d'arêtes de G est donc égal à $\frac{42}{2} = 21$.

89 **1.** G_1 est connexe et tous ses sommets sont de degré pair : il existe donc, dans G_1, au moins une chaîne eulérienne fermée.
Exemples de telles chaînes : (A-B-C-A), (B-A-C-B).
2. a) G_2 est connexe et a exactement deux sommets de degré impair : B et D. Il existe donc, dans G_2, une chaîne eulérienne d'extrémités B et D.
Exemples de telles chaînes : (B-A-C-B-D), (D-B-C-A-B).
b) Toute chaîne fermée, d'origine l'un quelconque des quatre sommets, emprunte deux fois l'arête (B-D) (une fois dans chaque sens) : elle n'est donc pas eulérienne.

APPROFONDISSEMENT

90 ***Dans les graphes complets dont il est question, on suppose que deux sommets distincts quelconques sont reliés par une arête et une seule**; uniquement par souci de simplification, on suppose aussi que ces graphes sont sans boucle (même si la présence de boucles ne modifie pas les parités des degrés des sommets et, par conséquent, ne modifie pas les conclusions obtenues).*
On pourra, par ailleurs, s'intéresser à l'exercice 46, page 319, qui porte sur le même thème.
1. On remarque d'abord qu'un graphe complet est connexe.
a) $n = 2$: les deux sommets sont de degré impair (1), le graphe admet une chaîne eulérienne constituée par sa seule arête.
b) $n = 3$: les trois sommets sont de degré pair, le graphe admet donc une chaîne eulérienne fermée, constituée par ses trois arêtes.
c) $n = 4$: les quatre sommets sont de degré impair (3), le graphe n'admet donc pas de chaîne eulérienne.
d) $n = 5$: les cinq sommets sont de degré pair (4), le graphe admet donc une chaîne eulérienne fermée.
2. a) Le cas $n = 2$ mis à part, il semble qu'un graphe complet d'ordre n admette une chaîne eulérienne (fermée) si n est impair, et n'admette pas de chaîne eulérienne si n est pair.
b) • Dans un graphe complet (donc connexe) d'ordre n pair, chacun des n sommets est de degré $(n - 1)$, donc impair ; d'où :
– si $n = 2$, alors les deux sommets sont de degré impair (1), le graphe admet une chaîne eulérienne constituée par sa seule arête ;
– si $n \geqslant 4$, alors au moins quatre sommets sont de degré impair : le graphe n'admet donc pas de chaîne eulérienne.
• Dans un graphe complet (donc connexe) d'ordre $n \geqslant 3$ et impair, chaque sommet est de degré $(n - 1)$, donc pair ; le graphe admet donc une chaîne eulérienne fermée.

91 **1.** La somme S des degrés des sommets d'un graphe quelconque, égale au double du nombre d'arêtes, est un entier pair ; or $S = S_P + S_I$, où S_P (respectivement S_I) désigne la somme des degrés des sommets de degré pair (respectivement de degré impair) ; S_P est évidemment un entier pair ; par suite $S_I = S - S_P$ est un entier pair, et donc le nombre de sommets de degré impair est pair.
2. Considérons le graphe dont les sommets sont les personnes ayant assisté à la finale de la coupe du monde de football en 2010, deux sommets étant reliés par une arête si et seulement si les deux personnes représentées par ces sommets ont échangé une poignée de main.
Le nombre de personnes ayant échangé un nombre impair de poignées de main est égal au nombre de sommets du graphe dont le degré est impair. D'après le résultat démontré à la question **1.**, ce nombre est pair.

92 **1.** ***On suppose que les graphes cherchés sont sans boucle, et tels qu'entre deux sommets il existe au plus une arête.***
a) Dans un graphe d'ordre 5 dont les degrés des sommets sont tous distincts, ces degrés ont pour valeurs 4, 3, 2, 1, 0 ; or, il ne peut exister simultanément un sommet de degré 4, qui est adjacent aux quatre autres sommets, et un sommet de degré 0 qui n'est adjacent à aucun sommet.
Un tel graphe ne peut donc pas exister.
b) Plus généralement, dans un graphe d'ordre $n \geqslant 2$ dont les degrés des sommets sont tous distincts, ces degrés ont pour valeurs $n - 1$, $n - 2$, …, 2, 1, 0 ; or, il ne peut exister simultanément un sommet de degré $n - 1$, qui est adjacent aux $n - 1$ autres sommets, et un sommet de degré 0 qui n'est adjacent à aucun sommet.
Un tel graphe ne peut donc pas exister.
2. On déduit du résultat démontré en **1. b)** que, dans un graphe d'ordre $n \geqslant 2$, il y a au moins deux sommets de même degré. Ce corollaire s'applique, en particulier, au graphe, d'ordre $n \geqslant 2$, dont les sommets sont les personnes du groupe et dont les arêtes représentent les paires d'amis. D'où la conclusion demandée.

93 Dans chacun des cas, le graphe de la situation a six sommets, représentant les six personnes ; une arête relie deux sommets si et seulement si les deux personnes représentées par ces sommets ont discuté entre elles au cours de la réception. On note que ce graphe est sans boucle, et tel qu'entre deux sommets il existe au plus une arête.

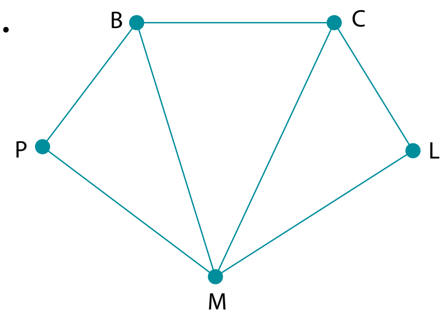
1. Il existe un graphe d'ordre 6, dont tous les sommets sont de degré 5, c'est un graphe complet. Il est donc possible d'obtenir les six réponses : 5, 5, 5, 5, 5, 5.

2. La somme des degrés des sommets d'un graphe quelconque, égale au double du nombre d'arêtes, est un entier pair ; or $5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 19$ est un entier impair. Il n'est donc pas possible d'obtenir les six réponses : 5, 4, 3, 3, 2, 2.

3. Dans un graphe d'ordre 6 sans boucle, et tel qu'entre deux sommets il existe au plus une arête, deux sommets de degré 5 sont reliés entre eux, et reliés tous les deux aux quatre autres sommets ; ces quatre autres sommets sont donc nécessairement de degré $\geqslant 2$. Il n'y a donc aucun sommet de degré 1.
Il n'est donc pas possible d'obtenir les six réponses : 5, 5, 4, 3, 2, 1.

EXERCICES Le jour du BAC (page 328)

95 **1.**



2. Il s'agit de prouver l'existence d'une chaîne eulérienne dans ce graphe.
Or, deux sommets quelconques de ce graphe sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (B-C-L-M-P) qui passe par tous les sommets : ce graphe est donc connexe. D'autre part, ce graphe a exactement deux sommets (B et C) de degré impair (3). D'après le théorème d'Euler, il admet donc une chaîne eulérienne d'extrémités B et C, par exemple la chaîne : (B-C-L-M-P-B-M-C).

3. Le problème posé est celui de l'existence d'une chaîne eulérienne fermée dans ce graphe. Tous les sommets n'étant pas de degré pair, il n'existe pas de telle chaîne.

2. Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0 + 300 300 (A)	0 + 500 500 (A)	∞	∞	∞	∞	∞	B
		300 + 400 500 (A)	300 + 400 700 (B)	∞	∞	∞	∞	C
			500 + 100 600 (C)	500 + 200 700 (C)	∞	∞	∞	D
				700 (C)	600 + 700 1 300 (D)	∞	600 + 700 1 300 (D)	E
					1 300 (D)	700 + 200 900 (E)	700 + 300 1 000 (E)	G
					1 300 (D)		900 + 200 1 000 (E)	H
					1 000 + 200 1 200 (H)			F

Le trajet le plus court pour aller de A à F est donc : (A-C-E-H-F), de longueur 1 200 kilomètres.

96 **1.** La question posée est celle de l'existence, dans le graphe Γ, d'une chaîne eulérienne (qui passe évidemment par chaque sommet !).
Or le graphe Γ est connexe, car deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (A-B-C-D-F-H-G-E) qui passe par tous les sommets. De plus, il a exactement deux sommets de degré impair B et E, tous deux de degré 3.
Le graphe Γ admet donc une chaîne eulérienne d'extrémités B et E, par exemple la chaîne (B-D-F-H-D-C-B-A-C-E-H-G-E) qui fournit donc un trajet solution du problème.

97 • Réponse exacte : **b)**.
En effet G est connexe car deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (D-B-C-A-E) qui passe par tous les sommets.
Par ailleurs, le degré d'un sommet peut être calculé à partir de la matrice : il est égal à la somme des termes de la ligne de la matrice qui correspond à ce sommet. En calculant ainsi les degrés de tous les sommets, on trouve que G a exactement deux sommets (B et C) de degré impair (3).
D'après le théorème d'Euler, G admet une chaîne eulérienne reliant B et C.

• La réponse **a)** est fausse, car il y a douze « 1 » dans la matrice, donc six arêtes, puisqu'une arête induit deux « 1 » dans la matrice.
• La réponse **c)** est fausse, car, par exemple, $m_{12} = m_{21} = 0$, il n'y a donc pas d'arête reliant A et B.

98 • Réponse exacte : **a)**. En effet H est connexe car deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne extraite de la chaîne (1-2-3-4-5) qui passe par tous les sommets.

D'autre part, H a exactement deux sommets de degré impair : 1 et 5.
D'après le théorème d'Euler, H admet une chaîne eulérienne d'extrémités les sommets 1 et 5.
• La réponse **b)** est fausse, car tous les sommets de H ne sont pas de degré pair.
• La réponse **c)** est fausse, car, par exemple, il n'y a pas d'arête reliant 1 et 3.