

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

(page 264)

Problème 1

1. Le terme m_{ij} de la matrice M indique l'avoir, en euros, de H_j , dans la banque B_i , au 1^{er} janvier 2012.

2. a) $M^* = \begin{pmatrix} 3090 & 1030 & 2575 \\ 824 & 1545 & 2060 \end{pmatrix}$.

b) Chaque somme m_{ij} sur le compte au 1^{er} janvier 2012 est génératrice de $m_{ij} \times 0,03$ d'intérêts; elle devient donc, au 1^{er} janvier 2013, $m_{ij} + m_{ij} \times 0,03$, c'est-à-dire : $1,03 \times m_{ij}$. Chaque terme de M^* est donc obtenu en multipliant le terme correspondant de M par 1,03.

3. a) $M + N = \begin{pmatrix} 7000 & 1500 & 5500 \\ 1800 & 3500 & 3500 \end{pmatrix}$.

b) Tableau représentant la situation des ménages le 1^{er} janvier 2013 :

$$\begin{pmatrix} 7210 & 1545 & 5665 \\ 1854 & 3605 & 3605 \end{pmatrix}$$

Problème 2

3. a) $N' = \begin{pmatrix} 15 & 17 & 16 \\ 16 & 16 & 14 \\ 17 & 16 & 14 \\ 15 & 14 & 15 \\ 18 & 14 & 13 \\ 17 & 15 & 19 \end{pmatrix}$, $C' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Numérotions les candidats comme suit :

Candidat	Estelle	Jérémy	Kader	Killian	Léa	Mahé
Numéro	1	2	3	4	5	6

$N' \times C'$ est la matrice à six éléments dont le i -ième élément est le total sur 140 du candidat n° i , calculé en faisant la somme des produits de chacune de ses trois notes par le coefficient correspondant :

$$N' \times C' = \begin{pmatrix} 15 \times 3 + 17 \times 2 + 16 \times 2 \\ 16 \times 3 + 16 \times 2 + 14 \times 2 \\ 17 \times 3 + 16 \times 2 + 14 \times 2 \\ 15 \times 3 + 14 \times 2 + 15 \times 2 \\ 18 \times 3 + 14 \times 2 + 13 \times 2 \\ 17 \times 3 + 15 \times 2 + 19 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 108 \\ 111 \\ 103 \\ 108 \\ 119 \end{pmatrix}$$

Problème 3

1. $N \times E = \begin{pmatrix} 100 \\ 96 \\ 95 \\ 104 \\ 108 \end{pmatrix}$ $N \times M = \begin{pmatrix} 100 \\ 103 \\ 96 \\ 94 \\ 115 \end{pmatrix}$.

3. a) et b) Dans chaque filière :

- la somme des coefficients est égale à 10;
- le score d'un candidat, c'est-à-dire son total de points, calculé en tenant compte des coefficients de la filière, est donc un total sur 200.

Numérotions les candidats comme suit :

Candidat	Anouk	Benjamin	Corinne	David	Émilie
Numéro	1	2	3	4	5

Le premier élément (respectivement le deuxième) de la i -ième ligne de la matrice $N \times C$ est le score du i -ième candidat dans la filière « équilibrée » (respectivement dans la filière « mathématiques »).

4. Le premier élément (respectivement le deuxième) de la i -ième ligne de la matrice $\frac{1}{10} N \times C$ est la moyenne sur 20 du i -ième candidat dans la filière « équilibrée » (respectivement dans la filière « mathématiques »).

Problème 4

1. $AV = \begin{pmatrix} 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix}$; donc (S) peut s'écrire $AV = W$.

3. De $AV = W$ on déduit que $A^{-1}(AV) = A^{-1}W$, c'est-à-dire $(A^{-1}A)V = A^{-1}W$, soit $I_2 V = A^{-1}W$, et donc $V = A^{-1}W$.

Inversement, si $V = A^{-1}W$, alors $AV = A(A^{-1}W) = (AA^{-1})W = I_2 W = W$.

D'où la solution du système (S) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Solution de (S) : } \{(-1; 1)\}.$$

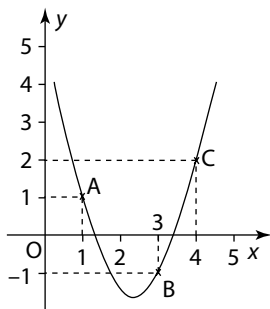
Problème 5

B 1. $F = C \times P = \begin{pmatrix} 1225 & 190 \\ 565 & 83 \end{pmatrix}$.

2. 1225 et 190 représentent respectivement les montants (en euros) de la commande et des frais d'envoi pour le premier client; 565 et 83 représentent ces montants pour le deuxième client.

Problème 6

A 1. et 2. a)



Compte tenu de la situation de B (abscisse comprise entre les abscisses de A et C, et B au-dessous du segment [AC]), il semble qu'il existe une parabole – ayant l'allure esquissée – passant par les points A, B et C.

2. b) L'allure de la parabole montre que a est positif (premier résultat rappelé au début de **A 2.**); par ailleurs, C qui est l'ordonnée du point de la parabole d'abscisse 0 est positif.

B 1. (P) équivaut à : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(3) = -1, \text{ c'est-à-dire à (Q).} \\ f(4) = 2 \end{cases}$

2. $M^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 7 & -15 & 8 \\ -12 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

3. a) $(a; b; c)$ est solution du système (S) :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = -1 \text{ équivaut à :} \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases}$$

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} [1];$$

d'où, en multipliant à gauche par M^{-1} , et compte tenu de l'associativité du produit de matrices et de $M^{-1}M = I_3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} [2]$$

inversement, en multipliant [2] à gauche par M, on obtient [1].

$$\mathbf{b) } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 7 & -15 & 8 \\ -12 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix}.$$

Donc $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{19}{3}x + 6$; résultat qui confirme la positivité de a et c établie au **A 2. b)**.

C 3. Il existe toujours une fonction f telle que \mathcal{C}_f passe par A, B et C. En général \mathcal{C}_f est une parabole, mais cette parabole dégénère en droite lorsque C se trouve sur la droite (AB).

Problème 7

1. Les productions x d'électricité et y de fioul consomment :
 • $0,1x + 0,2y$ d'électricité, non disponible sur le marché;
 • $0,55x + 0,05y$ de fioul, non disponible sur le marché.

La production d'électricité restant disponible pour le marché est donc :

$x - 0,1x - 0,2y$; et la production de fioul restant disponible pour le marché : $y - 0,55x - 0,05y$.

Les productions x d'électricité et y de fioul pour satisfaire une demande de 600 000 € d'électricité et 250 000 € de fioul doivent donc vérifier le système :

$$(S) \begin{cases} x - 0,1x - 0,2y = 600\,000 \\ y - 0,55x - 0,05y = 250\,000 \end{cases}$$

2. (S) s'écrit : $\begin{cases} 0,9x - 0,2y = 600\,000 \\ -0,55x + 0,95y = 250\,000 \end{cases}$, c'est-à-dire

$$\text{matriciellement : } \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,55 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600\,000 \\ 250\,000 \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire : } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600\,000 \\ 250\,000 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0,745} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,55 & 0,9 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 600\,000 \\ 250\,000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 832\,215 \\ 744\,966 \end{pmatrix}.$$

Solution (en arrondissant à l'euro le plus près) :
 $x \approx 832\,215$, $y \approx 744\,966$.

3. b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 900\,000 \\ 400\,000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1\,255\,034 \\ 1\,147\,651 \end{pmatrix}.$

Solution (en arrondissant à l'euro le plus près) :
 $x \approx 1\,255\,034$, $y \approx 1\,147\,651$.

4. De $A \begin{pmatrix} 832\,215 \\ 744\,966 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 600\,000 \\ 250\,000 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1\,255\,034 \\ 1\,147\,651 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 900\,000 \\ 400\,000 \end{pmatrix}$

on déduit :

$$A \begin{pmatrix} 832\,215 \\ 744\,966 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1\,255\,034 \\ 1\,147\,651 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 600\,000 \\ 250\,000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 900\,000 \\ 400\,000 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 650\,000 \end{pmatrix}, \text{ et donc : } A \begin{pmatrix} 832\,215 + 1\,255\,034 \\ 744\,966 + 1\,147\,651 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 650\,000 \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire : } A \begin{pmatrix} 2\,087\,249 \\ 1\,892\,617 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 650\,000 \end{pmatrix}.$$

Solution (à l'euro près) : $x \approx 2\,087\,249$, $y \approx 1\,892\,617$.

DE TÊTE

$$7 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$9 \quad A^{-1} = B.$$

$$10 \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$11 \quad kA - kB = kI_3 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATRICES

$$12 \quad S = \{-3; 3\}.$$

13 Non, car il n'existe pas de réel y tel que $y^2 = -1$.

$$14 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

$$15 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$16 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$17 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{7}{5} & -4 \\ \frac{1}{2} & 9,1 & 2 \\ \sqrt{3} & -2,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$18 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 & -0,5 \\ -\frac{7}{5} & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$19 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$20 \quad {}^tA = \begin{pmatrix} x & 4 & 3y \\ -3 & 2x & -x \\ y & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

21 Seule la matrice du 3 est telle que ${}^tA = A$, autrement dit symétrique.

22 ${}^tA = A$ équivaut à : $x = 2$, $y = -1$ et $z = 3$.

$$23 \quad {}^tA = A.$$

$$24 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$25 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$26 \quad x = -\frac{1}{2}; y = \frac{5}{2}; z = 0.$$

$$27 \quad x = 0; y = 1; z = -\frac{1}{3}; t = -\frac{2}{3}.$$

ADDITION, MULTIPLICATION
PAR UN RÉEL

$$28 \quad A + B = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \sqrt{2} \\ \frac{23}{12} & 0,5 \end{pmatrix}; A - B = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\sqrt{2} \\ -\frac{7}{12} & 0,1 \end{pmatrix}.$$

$$29 \quad A + B = \begin{pmatrix} 1,9 & 7,35 \\ 1,43 & 2 \\ 4,6 & 10 \end{pmatrix}; A - B = \begin{pmatrix} 9,3 & 3,35 \\ -3,83 & 3,38 \\ 2,56 & -0,8 \end{pmatrix}.$$

$$30 \quad 12A = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -24 \\ 12 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$31 \quad -\frac{2}{11}A = \begin{pmatrix} -22 & -0,6 & -208 \\ 10 & -8 & -1,2 \\ -4 & 68 & -4,8 \end{pmatrix}.$$

$$32 \quad C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$C = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$D = 1,5A - 1,5B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -7,5 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,5 & 3 \\ 7,5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -6 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$D = 1,5(A-B) = 1,5 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -6 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$33 \quad 2A - 3B = \begin{pmatrix} -10 & 2 & -12 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -15 & 0 & 15 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -16 & -7 & -9 \\ 19 & 0 & -11 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 & 2 & -3,5 \\ -1,5 & 0 & 3,5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{34 } 2A - 3B &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 & 0 & 3 \\ 0 & 30 & -9 \\ 6 & 15 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 2 & 1 \\ 2 & -30 & 17 \\ 0 & -21 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0,5 & 1,5 \\ 0,5 & 5 & 0,5 \\ 2,5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{35 } B = 1,8A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3,6 \\ 1,8 & 0,3 & -1,35 \end{pmatrix};$$

$$C = 5A = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} & 0 & -10 \\ 5 & \frac{5}{6} & -\frac{15}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\text{36 } x = 2; y = 4; z = -3; t = 1.$$

$$\text{37 } \mathbf{b)} (a \ b \ c) = a(1 \ 0 \ 0) + b(0 \ 1 \ 0) + c(0 \ 0 \ 1).$$

$$\text{38 } \mathbf{1. a)} S = \begin{pmatrix} 282 & 177 \\ 174 & 196 \\ 38 & 51 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b)} S = S_1 + S_2.$$

2. a) Les prix unitaires chez chaque fournisseur sont arrondis au centième.

$$P_2 \approx \begin{pmatrix} 281,19 & 526,59 & 2574,66 \\ 303,68 & 506,14 & 2479,56 \end{pmatrix}; P_2 \approx 1,0225 P_1.$$

$$\text{39 } M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{40 } M = \begin{pmatrix} -2 & 0,75 & -4,5 \\ 0,75 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{41 } \mathbf{1.} M_n = \begin{pmatrix} 2^n + 3(-1)^n & 2^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^n \\ 2^n + (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \\ 2^n + (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2. a)} M_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; M_3 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 7 & -1 & -1 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour tout entier naturel n :

- $2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n$; $(-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$;
 - d'où, pour $k = 1$ ou 3 , $2^n + k(-1)^n + 2^{n+1} + k(-1)^{n+1} = 3 \cdot 2^n$;
- on en déduit :

$$M_n + M_{n+1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n \\ 3 \cdot 2^n & 0 & 0 \\ 3 \cdot 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2^n A = 3u_n A.$$

Pour tout entier naturel n :

- $2(-1)^n - (-1)^{n+1} = 3(-1)^n$;
 - pour $k = 1$ ou 3 , $2(2^n + k(-1)^n) - (2^{n+1} + k(-1)^{n+1}) = 3k(-1)^n$;
- on en déduit :

$$2M_n - M_{n+1} = \begin{pmatrix} 9(-1)^n & 3(-1)^n & 3(-1)^n \\ 3(-1)^n & 3(-1)^n & 3(-1)^n \\ 3(-1)^n & 3(-1)^n & 3(-1)^n \end{pmatrix} = 3(-1)^n B = 3v_n B.$$

$$\text{42 } X = \begin{pmatrix} -2 & -0,6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{43 } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{44 } X = \begin{pmatrix} 2,25 & -0,25 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

45 L'opposé d'un réel est égal au produit de ce réel par (-1) ; on en déduit que : $-A = (-1)A$.

PRODUIT DE DEUX MATRICES

$$\text{46 } A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}; B \times A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{47 } A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{9}{25} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

le produit $B \times A$ n'est pas possible.

$$\text{48 } A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B \times A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{49 } A \times B = B \times A = I_4.$$

$$\text{50 } \mathbf{1.} A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B \times A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. • Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

• Le produit de deux matrices non nulles peut être une matrice nulle.

$$\text{51 } 2(AB) = (2A)B = A(2B) = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -4 & 32 \end{pmatrix}.$$

$$\text{52 } A = \begin{pmatrix} 0,75 & 1 & 2,75 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{53 } A \times B = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}; A \times C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A(B+C) = A \times B + A \times C = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{54 } A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A \times C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A(B+C) = A \times C.$$

$$\text{55 } \mathbf{1. a)} R^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. On déduit de $R^3 = I_2$ que : $R^4 = R^3 \times R = I_2 \times R = R$;
 $R^5 = R^3 \times R^2 = I_2 \times R^2 = R^2$; $R^6 = (R^3)^2 = I_2^2 = I_2$.

$$\text{56 } \mathbf{1. a)} R^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -5 \\ -4 & 7 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. On déduit de $R^3 = I_2$ que : $R^4 = R$; $R^5 = R^2$; $R^6 = I_2$.

57 $NAN = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b+c+d & a+b+c+d \end{pmatrix}$
 $= (a+b+c+d) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (a+b+c+d)N.$

58 1. $A^2 = -I_2; A^3 = -A; A^4 = I_2; A^5 = A.$

2. Pour tout n de $\mathbb{N} : A^{4n+1} = A; A^{4n+2} = -I_2; A^{4n+3} = -A; A^{4n+4} = I_2.$

59 b) Pour $a = 1 : A = N$, l'égalité $NA = 2A$ devient $N^2 = 2N$; d'où l'on déduit que $N^3 = 2N^2 = 2^2N$.

c) $N^4 = N^3 \times N = 2^2N^2 = 2^3N$; $N^5 = N^4 \times N = 2^3N^2 = 2^4N$; $N^6 = N^5 \times N = 2^4N^2 = 2^5N.$

On conjecture que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $N^n = 2^{n-1}N.$

60 Pour tout n de $\mathbb{N} : \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qu_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$

61 Pour tout n de $\mathbb{N} : \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$

62 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $B = A + I_3.$

3. a) $B^2 = A^2 + AI_3 + I_3A + I_3^2 = A^2 + 2A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$B^3 = B^2B = (A^2 + 2A + I_3)(A + I_3)$

$= A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

N.B. : les matrices A et I_3 commutent, on aurait pu appliquer directement les « identités remarquables ».

b) On retrouve ces résultats en calculant B^2 par $B \times B$, puis B^3 par $B^2 \times B.$

63 1. $P \times B = \begin{pmatrix} 145 & 270 \end{pmatrix}$ est la matrice des prix de revient d'un téléviseur premier prix (145 €) et d'un téléviseur haute technologie (270 €).

2. $B \times C = \begin{pmatrix} 150 \\ 195 \\ 450 \end{pmatrix}$ est la matrice indiquant les nombres

d'unités de bureau d'étude (150), de main-d'œuvre (195) et de composants électroniques (450), nécessaires pour la fabrication des téléviseurs commandés.

3. La matrice $P \times B \times C$ est la matrice à un seul élément calculable de deux façons :

• $(P \times B) \times C$, c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 145 & 270 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 150 \end{pmatrix};$
il est clair que 21 150 est le prix de revient (en euros) de la commande.

• $P \times (B \times C)$, c'est-à-dire :

$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 150 \\ 195 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 150 \end{pmatrix};$ on retrouve le prix de revient de la commande, calculé d'une autre façon.

64 ${}^t(A \times B) = {}^t \begin{pmatrix} 19 & -25 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -5 \\ -25 & 3 \end{pmatrix};$

${}^tB \times {}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -5 \\ -25 & 3 \end{pmatrix}.$

65 1. a) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' & 0 \\ 0 & 0 & cc' \end{pmatrix}.$

2. Conjecture : pour tout n de \mathbb{N}^* , le produit de deux matrices diagonales d'ordre n est une matrice diagonale.

66 $\lambda A = \lambda(I_3A) = (\lambda I_3)A$; donc la matrice

$M = \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ convient.

67 **N.B.** : pour tout n de \mathbb{N}^* , $p_n + q_n = 1.$

1. $p_1 = 0; q_1 = 1.$

2. a) Éventualités pour une suite de deux lancers ($n = 2$) : PP, PF, FP, FF.

D'où $p_2 = \frac{1}{2}; q_2 = \frac{1}{2}.$

b) Éventualités pour une suite de trois lancers ($n = 3$) : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF.

D'où $p_3 = \frac{3}{4}; q_3 = \frac{1}{4}.$

c) $(p_1 \quad q_1)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (p_2 \quad q_2);$

$(p_2 \quad q_2)A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (p_3 \quad q_3).$

INVERSE D'UNE MATRICE

68 $AB = I_2$, donc B est l'inverse de $A.$

69 $AB = I_3$, donc B est l'inverse de $A.$

70 Le terme $(AB)_{11}$ de la matrice AB étant égal à 0, $AB \neq I_3$, donc B n'est pas l'inverse de $A.$
(En fait, A n'est pas inversible.)

Dans les exercices 71 à 75, on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; l'égalité

$AA^{-1} = I_2$ équivaut alors à la résolution de deux systèmes de deux équations à deux inconnues : a et b pour l'un, c et d pour l'autre.

71 $\begin{cases} \frac{1}{2}b = 1 \\ -a + \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}d = 0 \\ -c + \frac{1}{2}d = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

72 $\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c - d = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

73 $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c + d = 0 \\ -c + d = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

$$\mathbf{74} \quad \begin{cases} 2a + 4b = 1 \\ \frac{1}{2}a + 3b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c + 4d = 0 \\ \frac{1}{2}c + 3d = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{75} \quad \begin{cases} 2a = 1 \\ -3b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c = 0 \\ -3d = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

76 Dans le produit de A par une matrice carrée d'ordre 2 quelconque B, le terme $(AB)_{11}$ est nul, d'où $AB \neq I_3$, donc A n'admet pas d'inverse.

$$\mathbf{77} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{78} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{79} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{58}{195} & -\frac{14}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{13} & \frac{7}{195} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{80} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -1 & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{20}{9} & 3 & -\frac{13}{9} & -\frac{19}{9} \\ -\frac{5}{9} & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{7}{9} & -1 & \frac{5}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{81} \quad \mathbf{1.} \quad A \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -3c \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.} \quad \text{D'où : } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{82} \quad A \times A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = I_2. \text{ Donc } A^{-1} = A.$$

$$\mathbf{84} \quad \mathbf{1.} \quad A^2 = -I_2; A^3 = -A.$$

$$\mathbf{2.} \quad A^4 = A^3 \times A = -A \times A = -A^2 = I_2;$$

de $A \times A^3 = I_2$ on déduit que $A^{-1} = A^3 = -A$.

$$\mathbf{3.} \quad B \times B = A^4 = I_2, \text{ d'où : } B^{-1} = B.$$

$$\mathbf{85} \quad \mathbf{1.} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -5 \\ -6 & 8 & -5 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. On vérifie que $A^4 = A^3 \times A = I_3$, d'où l'on déduit que $A^{-1} = A^3$.

$$\mathbf{3.} \quad B \times B = A^4 = I_3, \text{ d'où : } B^{-1} = B.$$

$$\mathbf{86} \quad \mathbf{1.} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = I_3.$$

$$\mathbf{2.} \quad A \times A^2 = I_3, \text{ d'où : } A^{-1} = A^2.$$

$$\mathbf{87} \quad \mathbf{1.} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 \text{ est la matrice nulle d'ordre 3.}$$

$$\mathbf{2.} \quad (I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3^3 - A^3 = I_3.$$

$$\mathbf{3.} \quad \text{Or } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 - A;$$

on déduit alors du résultat de la question **2.** que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

88 **1.** Si $AB = AC$, alors $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$, d'où $(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$, c'est-à-dire $I_2B = I_2C$, et donc $B = C$.

2. Si $BA = CA$, alors $(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$, d'où $B(AA^{-1}) = C(AA^{-1})$, c'est-à-dire $BI_2 = CI_2$, et donc $B = C$.

$$\mathbf{89} \quad \mathbf{1.} \quad A^2 = 2A.$$

$$\mathbf{2. a)} \quad B \times A = (I_2 + A) \times A = A + A^2 = A + 2A = 3A.$$

$$\mathbf{b)} \quad B \times \left(I_2 - \frac{1}{3}A\right) = B - \frac{1}{3}B \times A = I_2 + A - \frac{1}{3}3A = I_2.$$

$$\mathbf{c)} \quad \text{D'où : } B \text{ est inversible et } B^{-1} = I_2 - \frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

$$\mathbf{90} \quad \mathbf{b)} \quad (S) \text{ s'écrit matriciellement : } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{c)} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \end{pmatrix}. \text{ Solution : } x = 10; y = -7.$$

$$\mathbf{91} \quad (S) \text{ s'écrit matriciellement : } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -18 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Solution : $x = 2; y = -18; z = 13$.

$$\mathbf{92} \quad \mathbf{1.} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2. a)} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Solution : } x = 2; y = 3.$$

$$\mathbf{b)} \quad x = 4; y = -1.$$

$$\mathbf{c)} \quad x = -2; y = -5.$$

$$\mathbf{93} \quad x = \frac{30}{7}; y = \frac{24}{7}.$$

$$\mathbf{94} \quad x = \frac{13}{2}; y = \frac{17}{2}; z = \frac{9}{2}.$$

$$\mathbf{95} \quad x = \frac{113}{73}; y = \frac{48}{73}; z = -\frac{268}{73}.$$

96 $x = \frac{14}{3}; y = \frac{10}{3}; z = \frac{-4}{3}; t = -\frac{5}{3}$.

97 1. Mise en équation : $\begin{cases} x + y = 150 \\ 30x + 60y = 7260 \end{cases}$
d'où la traduction sous forme matricielle.

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{30} \\ -1 & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$.

3. $x = 58; y = 92$.

98 3. $D = 200; F = 200; S = 400; B = 250$.

99 1. $R_1 = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 8 + \frac{1}{3} \times 22;$

$R_2 = \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{3} \times 15 + \frac{1}{3} \times 25.$

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 22 \\ 5 & 15 & 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A_0 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. $R_1 = 11; R_2 = 15; P_2$ est donc le pays le plus pauvre.

2. 1. a) Au bout d'un an, les six revenus moyens ont été multipliés par 1,03; donc $A_1 = 1,03 A_0$.

b) $A_2 = 1,03 A_1 = (1,03)^2 A_0$.

2. $A_{10} \approx \begin{pmatrix} 4,0 & 10,8 & 29,6 \\ 6,7 & 20,2 & 33,6 \end{pmatrix}; A_{30} \approx \begin{pmatrix} 7,3 & 19,4 & 53,4 \\ 12,1 & 36,4 & 60,7 \end{pmatrix}$.

$A_{50} \approx \begin{pmatrix} 13,2 & 35,1 & 96,4 \\ 21,9 & 65,8 & 109,6 \end{pmatrix}$.

3. 1. $B_0 = \begin{pmatrix} -5 & -14 & 19 \\ -10 & -10 & 20 \end{pmatrix}; B_1 = \begin{pmatrix} -4,91 & -13,76 & 19,66 \\ -9,85 & -9,55 & 20,75 \end{pmatrix};$

$B_2 \approx \begin{pmatrix} -4,82 & -13,51 & 20,34 \\ -9,70 & -9,09 & 21,52 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout n , la première colonne de A_n est : $\begin{pmatrix} 3 \times (1,03)^n \\ 5 \times (1,03)^n \end{pmatrix};$

donc la première colonne de B_n est : $\begin{pmatrix} 3 \times (1,03)^n - 8 \\ 5 \times (1,03)^n - 15 \end{pmatrix}$.

3. L'élément $3 \times (1,03)^n - 8$ mesure la différence, dans le pays P_1 , entre le revenu moyen, au bout de n années, du tiers « pauvre », et le revenu moyen initial du tiers « intermédiaire »;

l'élément $5 \times (1,03)^n - 15$ a la même signification, dans le pays P_2 .

La suite $u_n = 3 \times (1,03)^n - 8$ se comporte comme la suite géométrique $3 \times (1,03)^n$: elle est croissante et a pour limite $+\infty$, avec $u_0 = -5$.

De même, la suite $v_n = 5 \times (1,03)^n - 15$ est croissante et a pour limite $+\infty$, avec $v_0 = -10$.

La solution du problème (P) est la plus petite valeur n_0 de n pour laquelle $u_n > 0$ et $v_n > 0$, c'est-à-dire $(1,03)^n > 3$. On trouve $n_0 = 38$.

POUR LA LOGIQUE

100 1. Faux (contre-exemple : $b = -a$).

2. Faux (contre-exemple : $a = b = 0$).

101 Faux (contre-exemple : $a = 0$ et $b = 1$).

102 Vrai : $a = 0$.

103 Vrai. En effet $\begin{pmatrix} ab & ab^2 \\ a^2b & a^2b^2 \end{pmatrix} = I_2$ implique $ab = 1$, $ab^2 = 0$ et $a^2b = 0$; or ce système équivaut au système : $ab = 1$, $b = 0$ et $a = 0$, qui est impossible.

104 Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, mais $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

105 1. $B = -A$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors, $\forall B \in M$, la deuxième ligne de AB est $(0 \ 0)$, elle est donc différente de la deuxième ligne $(0 \ 1)$ de I_2 , et donc $AB \neq I_2$.

EXERCICES

Accompagnement personnalisé (page 289)

SOUTIEN

106 2. $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 17 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Non, car B a deux colonnes et A trois lignes.

107 $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

108 $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

109 $A \times B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

APPROFONDISSEMENT

110 2. a) Si M est de la forme $M = \alpha M_0 + \beta I_2$, alors, compte tenu de $AM_0 = M_0A$:

$A \times M = A \times (\alpha M_0 + \beta I_2) = \alpha AM_0 + \beta AI_2 = \alpha M_0A + \beta I_2A = (\alpha M_0 + \beta I_2) \times A = M \times A$.

b) Supposons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = MA$.

$AM = MA$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ -a - 2c & -b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b & 5a - 2b \\ 3c - d & 5c - 2d \end{pmatrix}, \text{ ce qui équivaut à :}$$

$b = -5c$, $a = b + d$ et $a = -5c + d$, ce qui équivaut à : $b = -5c$ et $a = -5c + d$.

M est donc de la forme : $M = \begin{pmatrix} -5c + d & -5c \\ c & d \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} -5c & -5c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = cM_0 + dI_2.$$

111 1. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; ${}^tA = A$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } c = b.$$

Les matrices A carrées d'ordre 2 telles que ${}^tA = A$ sont donc

les matrices de la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$2. \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

112 1. Chacun des trois éléments de la deuxième ligne de $A \times B$ est de la forme $0 \times a + 0 \times b + 0 \times c$, donc nul : la deuxième ligne de $A \times B$ est donc nulle.

2. La deuxième ligne de $A \times B$ est donc différente de la deuxième ligne de I_2 qui est $(0 \ 1 \ 0)$. Donc, quelle que soit la matrice B carrée d'ordre 3, $A \times B \neq I_3$; la matrice A n'admet pas d'inverse.

113 1. Solution de $AX = 2B$: $X = 2X_0$.

En effet : $A(2X_0) = 2(AX_0) = 2B$.

2. Solution de $AX = -B$: $X = -X_0$.

En effet : $A(-X_0) = A(-1)X_0 = (-1)(AX_0) = (-1)B = -B$.

EXERCICES

Le jour du BAC (page 290)

114 2. **b)** $x = 14$; $y = 15$; $z = 7$.

115 1. **a)** Faux.

b) Faux.

c) Faux.

2. **a)** Vrai.

b) Vrai.

c) Vrai.

3. **a)** Faux.

b) Vrai.

c) Vrai.

4. **a)** Vrai.

b) Vrai.

c) Vrai.

5. **a)** Vrai.

b) Faux.

c) Vrai.

116 1. Vrai.

2. Faux (contre-exemple : si $A = I_2$, alors $A \times B = B \times A$).

3. Faux. L'écriture matricielle correcte est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Faux. Les deux éléments de la diagonale doivent être non nuls.

117 2. **b)** $x = 1$; $y = 3$; $z = 2$.

118 1. Mise en équation :
$$\begin{cases} n + p + v = 32 \\ -n + p = 8,8 \\ -2p + v = 0 \end{cases}$$

d'où la traduction sous forme matricielle demandée.

$$3. A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; n = 1,4; p = 10,2; v = 20,4.$$