

Exercice 4 co

(4*1.5 + 2+2) + (2 + 1.5 + 1.5+5) = 20 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude d'un graphe

On appelle \mathcal{G} le graphe donné dans le texte.

1. **a.** Dans le graphe \mathcal{G} , il y a des sommets, par exemple A et E, qui ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe \mathcal{G} n'est pas complet.
- b.** Deux sommets quelconques du graphe \mathcal{G} sont reliés par un chemin, donc le graphe \mathcal{G} est connexe.
2. **a.** Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes arrivant (ou partant) de ce sommet.
Le tableau ci-dessous donne les degrés de chaque sommet :

| | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sommet | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| Degré | 4 | 5 | 4 | 4 | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 |

- b.** Un cycle eulérien est un trajet qui part de n'importe quel sommet et qui revient au même sommet en étant passé une fois et une seule par chaque arête. Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est de degré pair ; ce n'est pas le cas du graphe \mathcal{G} , donc le graphe \mathcal{G} n'admet pas de cycle eulérien.
Une chaîne eulérienne est un trajet qui part d'un sommet et qui passe par toutes les arêtes une fois et une seule. Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède exactement deux sommets de degrés impairs. C'est le cas du graphe \mathcal{G} , donc le graphe \mathcal{G} admet une chaîne eulérienne. Cette chaîne part d'un des deux sommets de degré impair et arrive à l'autre.

Exemple de chaîne eulérienne : B – F – D – B – E – D – A – B – C – A – H – C – G – I – H – G

3. **a.** La matrice d'adjacence M associée au graphe est une matrice carrée d'ordre 9 (le nombre de sommets), ne contenant que des 0 et des 1. Si une arête relie le sommet numéro i (avec $1 \leq i \leq 9$) au sommet numéro j (avec $1 \leq j \leq 9$), on mettra un 1 à la ligne i et la colonne j de la matrice ; sinon on mettra un 0.

Donc la matrice d'adjacence du graphe \mathcal{G} est : $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. On donne : $M^2 =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$M^3 = M^2 \times M$ donc le coefficient situé à la 7^e ligne et 4^e colonne de la matrice M^3 s'obtient en faisant le produit de la 7^e ligne de la matrice M^2 par la 4^e colonne de la matrice M , c'est-à-dire :

$$(2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 3$$

Remarque : comme on peut écrire M^3 sous la forme $M \times M^2$, on aurait pu aussi calculer le coefficient cherché en faisant le produit de la 7^e ligne de la matrice M par la 4^e colonne de la matrice M^2 .

Partie B : Applications

On donne dans le texte le plan simplifié d'un lycée.

1. Le graphe \mathcal{G} donné en partie A modélise cette situation.

En utilisant les degrés de chaque sommet du graphe \mathcal{G} , on peut établir la correspondance entre ce graphe et le plan ; le degré de chaque sommet correspond au nombre de portes de chaque lieu du lycée.

| Sommet | Lieu correspondant dans le lycée |
|--------|----------------------------------|
| A | ADMINISTRATION |
| B | HALL 1 |
| C | HALL 2 |
| D | SALLE DES PROFESSEURS |
| E | C.D.I. |
| F | CANTINE |
| G | BÂTIMENT 1 |
| H | VIE SCOLAIRE ET INFIRMERIE |
| I | BÂTIMENT 2 |

2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.

Le lieu « BÂTIMENT 1 » correspond au sommet G (n° 7), et le lieu « salle des professeurs » correspond au sommet D (n° 4) ; il s'agit donc dans cette question de déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet G au sommet D. C'est le nombre que l'on trouvera dans la matrice M^3 à la 7^e ligne et 4^e colonne. D'après la question A.3.b. ce nombre vaut 3 ; il y a donc trois chemins de longueur 3 reliant le bâtiment 1 à la salle des professeurs.

Ce sont les chemins :

G – H – A – D : BÂTIMENT 1 VIE SCOLAIRE ADMINISTRATION SALLE DES PROFESSEURS
 G – C – A – D : BÂTIMENT 1 HALL 2 ADMINISTRATION SALLE DES PROFESSEURS
 G – C – B – D : BÂTIMENT 1 HALL 2 HALL 1 SALLE DES PROFESSEURS

3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.

a. Visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux, revient à parcourir le graphe \mathcal{G} en passant par chaque arête une fois et une seule.

On a vu dans la partie A que c'était possible : il faut simplement partir du HALL 1 (sommet B) et arriver au BÂTIMENT 1 (sommet G) ou le contraire.

b. Sur les arêtes du graphe \mathcal{G} , on a indiqué les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.

L'algorithme de Dijkstra donne tous les chemins minimaux partant du sommet G, donc le chemin minimal allant de G à D :

| G | A | B | C | D | E | F | H | I | On garde |
|---|---------------------------|----------|-------------------------|---------------------------|----------|----------|-------------------------|----------|----------|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | G |
| | ∞ | ∞ | 90 G | ∞ | ∞ | ∞ | 40 G | 20 G | I (G) |
| | ∞ | ∞ | 90 G | ∞ | ∞ | ∞ | 40 G 45 H | | H (G) |
| | 100 H | ∞ | 90 G 65 H | ∞ | ∞ | ∞ | | | C (H) |
| | 100 H 110 C | 95 C | | ∞ | ∞ | ∞ | | | B (C) |
| | 100 H 125 B | | | 175 B | 145 B | 130 B | | | A (H) |
| | | | | 175 B 170 A | 145 B | 130 B | | | F (B) |
| | | | | 170 A 165 F | 145 B | | | | E (B) |
| | | | | 165 F | | | | | D (F) |

Le trajet le plus rapide pour aller de G à D est : $G \xrightarrow{40} H \xrightarrow{25} C \xrightarrow{30} B \xrightarrow{35} F \xrightarrow{35} D$

Le temps minimal est de 165 secondes.