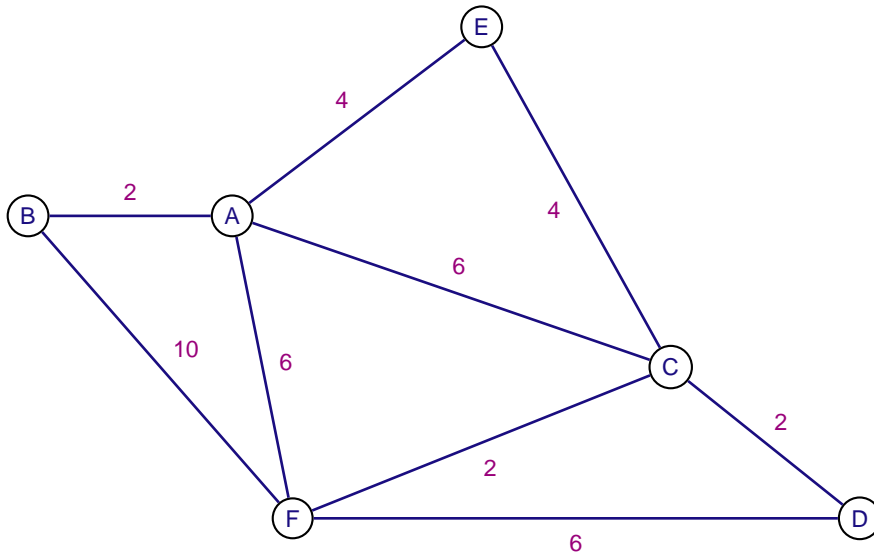


EXERCICE 1

10 points

Une association organise un rallye sportif en VTT : six zones de regroupement sont reliées par des chemins. Ce parcours est modélisé par le graphe ci-dessous, où les sommets de A à F représentent les zones de regroupement, et les arêtes les chemins. Les arêtes sont pondérées par les distances, exprimées en kilomètres, nécessaires pour parcourir ces chemins. Les candidats partent la zone A et doivent, après avoir parcouru tous les chemins, revenir à la zone initiale. Chaque fois qu'un candidat emprunte pour la première fois un chemin il doit déposer, à un endroit précis, un jeton personnalisé, attestant son passage.



1. Quel nombre minimal de jetons est-il nécessaire de donner à chaque candidat ?
2. Un candidat souhaite faire le parcours, en empruntant tous les chemins une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse. Quels sont les sommets possibles pour le départ, pour l'arrivée ?
3. Soit M la matrice associée au graphe G (on ordonne les sommets dans l'ordre alphabétique).

a. Écrire la matrice M .

b. On donne les matrices $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 9 & 4 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Un candidat est actuellement au point de rendez-vous D mais il a oublié son dossard au point B.

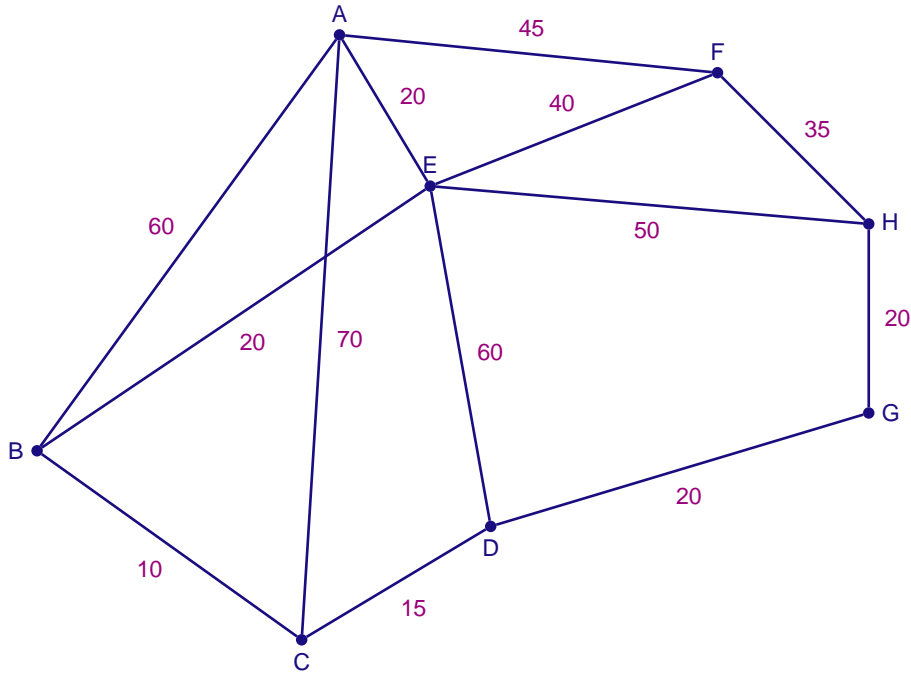
Combien a-t-il de possibilités pour le récupérer, s'il souhaite emprunter au maximum trois chemins ?

c. Déterminer le trajet le plus court lui permettant d'aller récupérer son dossard.

Jonathan est un sportif adepte du semi-marathon (course à pied de 21,1 km). Depuis le 1^{er} janvier 2012, il a décidé de courir un semi-marathon par mois. Afin d'améliorer sa préparation, il décide d'enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

PARTIE A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F, H organisant des courses de 10 km et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit. Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Jonathan vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon. Déterminer à l'aide d'un algorithme le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G et donner la durée de ce parcours en minutes.

PARTIE B

Grâce à son entraînement et à son expérience, Jonathan sait que :

- S'il a terminé le dernier semi-marathon, il terminera le prochain semi-marathon avec une probabilité de 0,62 ;
- S'il a abandonné lors du dernier semi-marathon, il terminera le prochain avec une probabilité de 0,8.

Jonathan a terminé son semi-marathon de janvier 2012. Pour tout entier naturel n , on note P_n la matrice ligne $(r_n \quad t_n)$ traduisant l'état probabiliste du n -ième mois écoulé depuis janvier 2012, où r_n désigne la probabilité que Jonathan abandonne au semi-marathon du n -ième mois et t_n la probabilité que Jonathan termine le semi-marathon du n -ième mois.

L'état probabiliste initial, correspondant à janvier 2012, est donc donné par : $P_0 = (0 \quad 1)$.

1. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets sont notés R et T (R lorsque Jonathan abandonne, T lorsqu'il termine le semi-marathon).
2. En déduire la matrice de transition en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2 . En déduire la probabilité que Jonathan ait abandonné lors du semi-marathon couru en mars 2012.
4. Soit P la matrice ligne $(x \quad y)$ donnant l'état stable.
 - a. Calculer les valeurs de x et de y arrondies à 10^{-3} près.
 - b. Interpréter les résultats obtenus.

1.

1.1. 1 jeton par chemin donc **9 jetons**.

1.2. Ce graphe admet une chaîne eulérienne car il est connexe et tous les sommets sont de degré pair. Ils peuvent tous être à la fois départ et arrivée.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. a.

b. Aucun chemin direct mais :

$m^2_{4;2} = 1$ donc 1 chemin en 2 arêtes

$m^3_{4;2} = 3$ donc 3 chemins en 3 arêtes :

il y a donc en tout **4 chemins de D à B** comportant au plus 3 arêtes.

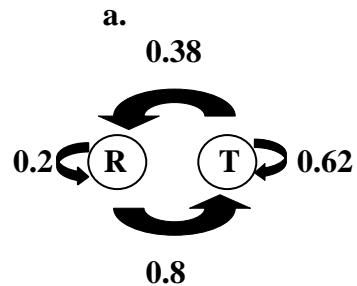
c. L'algorithme de Dijkstra donne le plus court chemin : **DCAB = 10km**

A	B	C	D	E	F	
∞	∞	2D	∥	∞	6D	C
8C	∞	∥	∥	6C	4C	F
10F	14F	∥	∥	∥	∥	E
10E	14F	∥	∥	∥	∥	A
∥	10A	∥	∥	∥	∥	

2.

PARTIE A. L'algo de Dijkstra donne le plus court chemin **AEB CDG=85**

A	B	C	D	E	F	G	H	
∥	60A	70A	∞	20A	45A	∞	∞	E
∥	40E	70A	80E	∥	60E	∞	70E	B
∥	∥	50B	80E	∥	45A	∞	70E	F
∥	∥	50B	80E	∥	∥	∞	80F	C
∥	∥	∥	65C	∥	∥	∞	70E	D
∥	∥	∥	∥	∥	∥	85D	70E	H
∥	∥	∥	∥	∥	∥	90H	∥	



PARTIE B.

b. $M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.38 & 0.62 \end{pmatrix}$

c. $P_1 = (0.38 \ 0.62)$;
 $P_2 = (0.3116 \ 0.6884)$; $p = 0.3116$.

d. $(x \ y) = (x \ y) M \Leftrightarrow 80x = 38y$ et $x + y = 1 \Leftrightarrow x \approx 0.322$; $y \approx 0.678$.

Au bout d'un certain temps, il abandonnera avec une proba d'environ 0.322