

# 1. MATRICES

## 1. Notion de Matrice

**D1.** C'est un tableau rectangulaire de nombres réels.

**D2.** Matrices nulle, ligne, colonne, carrée, diagonale, unité  $I_n$ , symétrique, transposée  ${}^tA$ ,

Notation :  $A(n ; p)$  ou  $A_{n;p}$  ou  $(a_{ij})$ ,  $i \in [0;n]$ ,  $j \in [0;p]$  : n lignes, p colonnes.

**D3. Egalité** :  $A_{np} = B_{np} \Leftrightarrow \forall i \in [0;n], \forall j \in [0;p], a_{ij} = b_{ij}$

## 2. Opérations linéaires

**D4. Addition** terme à terme :  $A_{np} + B_{np} = (a_{ij} + b_{ij})$ ,  $\forall i \in [0;n], \forall j \in [0;p]$ .

**D5. Opposée** :  $[A + (-A) = (0)]$  et **Soustraction** :  $A - B = A + (-B)$

**D6. Multiplic par un réel** : on multiplie chaque terme :  $k.A_{np} = (k.a_{ij})$

**T1. Propriétés** :

- $A + B = B + A$  (commutativité)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$  (associativité 1)
- $k.(k'.A) = (k.k').A$  (associativité 2)
- $k.(A + B) = k.A + k.B$  (distributivité 1)
- $(k + k').A = k.A + k'.A$  (distributivité 2)

## 3. Méthodes et pratiques

Equation matricielle : soit  $A_{np}$  et  $B_{np}$  deux matrices données. Trouver M tq :  
 $2M + 3A - B = 3B - 2A - 3M \Leftrightarrow 5M = 4B - 5A \Leftrightarrow M = 0.8B - A$ .

## 4. Multiplication des Matrices

**D7.** Le produit d'une matrice  $A(n ; p)$  par une matrice colonne  $C(p ; 1)$  est une Matrice colonne  $P(n ; 1)$

Ses n termes sont obtenus en additionnant les p produits terme à terme de chaque ligne de A avec la colonne C.

**Rq** : le nb de colonnes de A doit être égal au nb de lignes de C.

**D8.** Le produit d'une matrice  $A(n ; p)$  par une matrice colonne  $B(p ; q)$  est une Matrice  $P(p ; q)$

On obtient les colonnes de P en procédant à chaque fois comme en **D7**.

**T2. Propriétés** :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$  (associativité 1)
- $A \times (k.C) = (k.A) \times C = k.(A \times C)$  (associativité 2)
- $A \times (C + D) = A \times C + A \times D$  (distributivité)

## 5. Méthodes et pratiques.

Disposition :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 28 & 50 \\ 28 & 77 & 118 \end{pmatrix}$$

Attention : pas de commutativité !

$$A \times B \neq B \times A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 32 & 27 \\ 32 & 29 & 26 \\ 27 & 26 & 25 \end{pmatrix}$$

Attention : le produit de deux matrices non nulles

peut être égal à la matrice nulle !

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

## Homework

1. p 280 ex 13-16-22-24-26-29-31-34
2. p 282 ex 38-40-41-43-44
3. p 282 ex 46-48-50-52-55-58
4. p 283 ex 60-61-62-63-64

## 6. Inverse d'une matrice carrée

**D7.** Deux Matrices carrées  $A_n$  et  $B_n$  sont inverses l'une de l'autre signifie qu'elles vérifient  $A_n \times B_n = I_n$ .

On écrit alors  $B = A^{-1}$  ou  $A = B^{-1}$

**Rq :** Attention : toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles !!

**T3.**  $A_n \times B_n = I_n \Leftrightarrow B_n \times A_n = I_n$ . Ici il y a commutativité.

## 7. Méthodes et pratiques

Application à la résolution d'équations matricielle :

si  $A$  est inversible alors l'équation  $A \times M = B$  équivaut à  $M = A^{-1} \times B$

Application à la résolution des systèmes linéaires :

$$\begin{cases} -2x + 3y = 21 \\ 7x - 4y = 11 \end{cases} \text{ soit } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

le système s'écrit :  $A \times M = B$ , il équivaut à  $M = A^{-1} \times B$ .

$$\text{on trouve } A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}; \text{ en effet : } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Problème : trouver l'équation  $y = ax^2 + bx + c$  d'une parabole passant par les points  $A(-1 ; 5)$ ,  $B(2 ; 2)$ ,  $C(4 ; 6)$ .

On obtient le système :

$$\begin{cases} a - b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 16a + 4b + c = 6 \end{cases} \text{ soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

le système s'écrit :  $A \times M = B$ , il équivaut à  $M = A^{-1} \times B$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -12 & 15 & -3 \\ 16 & 20 & -6 \end{pmatrix} \text{ d'où } M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -12 & 15 & -3 \\ 16 & 20 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -1.6 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

## Homework

5. p 284 ex 68-72-77-82-85-87

6. p 278 ex réso A + ex 1-2 et p 285 ex 88-89-91-92-96

7. p 286 ex 97-98-99-101-105