Corrigé de l'épreuve de mathématiques BTS industriels Groupement C – Juin 2008

Exercice 1 *(9 points)*

Partie A

On considère l'équation différentielle sur $[0\,;+\infty[$: (E) : $y'+2y=50$ (y est une fonction de t)

1. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle $y'+2y=0$.

   On sait qu'une équation différentielle de type $y'+ay=0$ où $a \in \mathbb{R}$, a pour solution générale $y = C\mathrm{e}^{-at}$

   Donc, ici, la solution générale est : $\boxed{y = C\mathrm{e}^{-2t}}$ où C est une constante réelle quelconque.

2. Déterminer une solution constante de l'équation (E) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   Posons $y_0 = k$. où k est une constante réelle.
   Si y_0 est solution de (E) alors : $y_0'+2y_0=50$
   Donc $2y_0=50$
   Donc : $2k=50$
   Donc : $k=25$
   La fonction constante définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\boxed{y_0(t)=25}$ est donc solution de (E).

3. En déduire la solution générale de (E) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   Nous savons que la solution générale de l'équation (E) s'obtient en prenant la solution générale de l'équation sans second membre associée et en lui ajoutant une solution particulière de (E) .
   Donc la solution générale de (E) est : $\boxed{y = C\mathrm{e}^{-2t}+25}$.

4. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale

   On doit avoir : $y(0)=0$
   Donc : $C\mathrm{e}^{0}+25=0$
   Donc : $C=-25$
   La vitesse y peut donc s'écrire : $y=-25\mathrm{e}^{-2t}+25$ ou encore : $\boxed{y=25\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=25\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)$

1. *a)* Par lecture graphique, déterminer à 10^{-1} près, l'instant t_0 où la vitesse dépasse 20 $m.s^{-1}$.
   Le point d'intersection de la courbe Γ avec la droite d'équation $y=20$ est situé à environ 48 mm de l'axe des ordonnées.
   L'axe d'équation $t=1$ est situé à environ 59 mm de l'axe des ordonnées.
   On en déduit : $\boxed{t_0 = \dfrac{48}{59} = 0{,}8 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$.

   b) Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$.
   Cette inéquation est équivalente successivement à :

   $25\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right) > 20$

   $1-\mathrm{e}^{-2t} > \dfrac{4}{5}$

   $\mathrm{e}^{-2t} < \dfrac{1}{5}$

   $-2t < \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

   $-2t < -\ln 5$

   $t > \dfrac{\ln 5}{2}$

   $t > \ln\sqrt{5}$. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$ et $\boxed{t_0=\ln\sqrt{5}}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

On en déduit que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25}$.

La droite d'équation $y = 25$ est donc asymptote à la courbe Γ.

3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

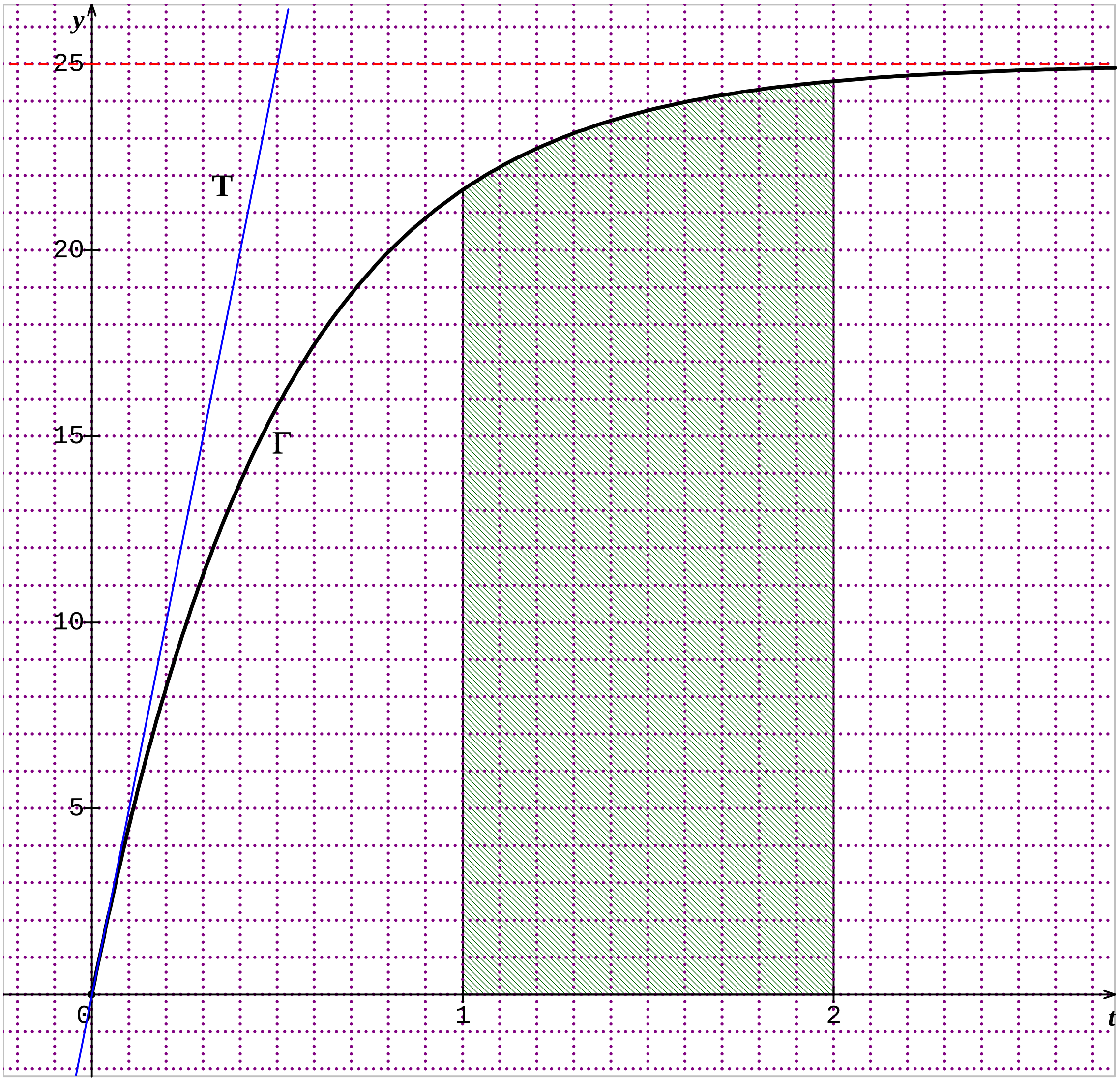
On a, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$: $f(t) = 25 - 25\mathrm{e}^{-2t}$
Donc, la dérivée de f est donnée par : $f'(t) = -25 \times -2\mathrm{e}^{-2t}$
Donc : $f'(t) = 50\mathrm{e}^{-2t}$

On en déduit que pour f' est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point O.

On a : $f'(0) = 50$

Donc la tangente T à Γ au point O a pour équation : $\boxed{y = 50t}$.



5. Estimer graphiquement l'aire de la partie hachurée.

D'après le graphique, la fonction f varie de $f(1) \approx 21{,}5$ à $f(2) \approx 24{,}5$ sur l'intervalle $[1\,;2]$.
On peut donc estimer la valeur moyenne de la fonction f sur cet intervalle à $m = 23$.
$\boxed{\text{Donc l'aire de la partie hachurée est à peu près égale à 23}}$.

6. *a)* Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On a : $f(t) = 25 - 25\mathrm{e}^{-2t}$

Donc une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est : $F(t) = 25t - \dfrac{25}{-2} \times \mathrm{e}^{-2t}$

Soit : $F(t) = 25t + 12{,}5\mathrm{e}^{-2t}$

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a : $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(1)$

Donc : $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \left(50 + 12{,}5\mathrm{e}^{-4}\right) - \left(25 + 12{,}5\mathrm{e}^{-2}\right)$

Donc : $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 25 + 12{,}5\left(\frac{1}{\mathrm{e}^4} - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$

Finalement : $\boxed{\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 25 - \frac{12{,}5\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)}{\mathrm{e}^4} \approx 23{,}5}$.

Ce résultat correspond à l'aire, exprimée en unités d'aires, de la partie hachurée du dessin page précédente.

Exercice 2 *(11 points)*

Partie A

La variable aléatoire X qui donne la longueur en cm des barres métalliques, suit une loi normale $N(m\,;\sigma)$ avec $m = 92{,}50$. On sait qu'une barre est mise au rebut si sa longueur est inférieure à 92,20 cm ou supérieure à 92,80 cm.

1. On suppose que $\sigma = 0{,}20$

a) Calculer la probabilité qu'une barre extraite au hasard soit mise au rebut.

Cette probabilité est donnée par : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80)$

Posons $T = \dfrac{X - m}{\sigma} = \dfrac{X - 92{,}50}{0{,}20}$: T suit donc la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

On a alors : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 1 - p\left(\dfrac{92{,}20 - 92{,}50}{0{,}20} < \dfrac{X - 92{,}50}{0{,}20} < \dfrac{92{,}80 - 92{,}50}{0{,}20}\right)$

ou encore : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 1 - p(-1{,}5 < T < 1{,}5)$

donc : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 1 - (2p(T < 1{,}5) - 1)$

donc : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 2 - 2p(T < 1{,}5)$

donc : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 2 - 2\Pi(1{,}5)$

donc : $1 - p(92{,}20 < X < 92{,}80) \approx 2 - 2\times 0{,}9332 \approx 0{,}1336$ par lecture de la table de la loi $N(0\,;1)$

$\boxed{\text{Donc la probabilité qu'une barre soit mise au rebut est 0,13 à } 10^{-2} \text{ près}}$.

b) Déterminer le réel a tel que $p(92{,}5 - a < X < 92{,}5 + a) = 0{,}95$

On a : $p(92{,}5 - a < X < 92{,}5 + a) = 0{,}95 \Leftrightarrow p\left(-\dfrac{a}{0{,}20} < T < \dfrac{a}{0{,}20}\right) = 0{,}95$

$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\dfrac{a}{0{,}20}\right) - 1 = 0{,}95$

$\Leftrightarrow \Pi\left(\dfrac{a}{0{,}20}\right) = 0{,}975$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{0{,}20} \approx 1{,}96$ par lecture inverse de la table de Π.

$\Leftrightarrow a \approx 0{,}392$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 0{,}39 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

On peut donc dire que l'intervalle confiance à 95% de niveau de confiance est [92,11 ; 92,89]

2. Quelle valeur faut-il donner à σ pour que la probabilité de mise au rebut d'une barre soit égale à 0,08 ?

Posons cette fois $T = \dfrac{X - 92{,}50}{\sigma}$, sans préciser la valeur de l'écart type σ. T suit la loi $N(0\,;1)$.

La probabilité que la pièce choisie au hasard soit mise au rebut doit être égale à 0,08.

Donc : $1-p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 0{,}08$
Donc : $p(92{,}20 < X < 92{,}80) = 0{,}92$
Donc : $p\left(-\frac{0{,}30}{\sigma} < T < \frac{0{,}30}{\sigma}\right) = 0{,}92$

Donc : $2\Pi\left(\frac{0{,}30}{\sigma}\right)-1 = 0{,}92$

Donc : $\Pi\left(\frac{0{,}30}{\sigma}\right) = 0{,}96$

Donc : $\frac{0{,}30}{\sigma} \approx 1{,}75$, par lecture inverse de la table de Π.

Donc : $\sigma \approx \frac{0{,}30}{1{,}75}$

Donc : $\boxed{\sigma = 0{,}17 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

Partie B

On appelle N la variable aléatoire qui à chaque lot de 30 barres prélevées associe le nombre de barres qui sont mises au rebut.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par N et donner ses paramètres.
   D'après l'énoncé, ce prélèvement de 30 barres est assimilables à un tirage avec remise.
   Nous avons donc 30 tirages indépendants avec, pour chaque tirage, 2 issues possibles :
   - la barre est mise au rebut (probabilité 0,08)
   - la barre est conforme (probabilité donc, 0,92)

   On sait que dans ce cas, la variable N qui compte le nombre de barres mises au rebut suit la loi binomiale $\boxed{B(0{,}08\ ;\ 30)}$.

2. Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.
   On a : $p(N=0) = 0{,}92^{30}$
   Donc : $p(N=0) \approx 0{,}0819$
   $\boxed{\text{Donc la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut est, à } 10^{-2} \text{ près, de } 0{,}08}$.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel lot, au moins 90 % des barres soient conformes.
   Cela revient à calculer la probabilité qu'au maximum, 10 % des barres (soit 3 barres) soient mises au rebut.

   On a : $p(N \le 3) = p(N=0)+p(N=1)+p(N=2)+p(N=3)$
   Donc : $p(N \le 3) = 0{,}92^{30} + C_{30}^{1}0{,}08\times 0{,}92^{29} + C_{30}^{2}0{,}08^{2}\times 0{,}92^{28} + C_{30}^{3}0{,}08^{3}\times 0{,}92^{27}$
   Donc : $p(N \le 3) \approx 0{,}784$
   $\boxed{\text{Donc, à } 10^{-2} \text{ près, la probabilité que, dans un lot de 30 barres, au moins 90\% soient conformes, est égale à } 0{,}78}$.

Partie C

On construit un test bilatéral en utilisant la variable aléatoire $\bar{X}$, qui à chaque échantillon de 30 barres, associe la moyenne m des longueurs des barres. On suppose que $\bar{X}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 0,03.
On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 92{,}50$ »

1. Donner l'hypothèse alternative H_1.
   L'hypothèse alternative est, naturellement H_1 : « $m \neq 92{,}50$ »

2. Calcul du réel h tel que : $p\left(92{,}5-h < \bar{X} < 92{,}5+h\right) = 0{,}95$
   Sous l'hypothèse H_0, $\bar{X}$ suit la loi $N(92{,}5\ ;\ 0{,}03)$.

   Dans ces conditions, si on pose $\bar{T} = \frac{\bar{X}-92{,}5}{0{,}03}$, alors $\bar{T}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$.

   On a alors les équivalences : $p\left(92{,}5-h < \bar{X} < 92{,}5+h\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow p\left(-\frac{h}{0{,}03} < \bar{T} < \frac{h}{0{,}03}\right) = 0{,}95$

   $\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}03}\right)-1 = 0{,}95$

   $\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}03}\right) = 0{,}975$

ñ $\dfrac{h}{0{,}03}$ ó 1,96

ñ h ó 0,0588

Donc, à 10^{-2} près, $\boxed{h = 0{,}06}$.

3. Énoncer la règle de décision du test.

   D'après ce qui précède, l'intervalle d'acceptabilité de la moyenne d'un échantillon, au seuil de 95 % est $[92{,}5 - 0{,}06 \,;\, 92{,}5 + 0{,}06]$ soit [92,44 ; 92,56].

   Donc, si on prélève un échantillon de taille 30 dans la production alors :
   - si la moyenne de l'échantillon est dans l'intervalle [92,44 ; 92,56] alors on accepte l'hypothèse H_0,
   - si la moyenne est dans la zone critique, alors on rejette H_0 et la machine doit être reréglée.

4. Utilisation du test.

   Les résultats du test conduisent à une moyenne de 92,45.
   Ce résultat appartient à l'intervalle d'acceptabilité (n'est pas dans la zone critique).
   Donc, au seuil de risque de 5 %, au vu des résultats de cet échantillon,
   $\boxed{\text{on peut dire que la moyenne } m \text{ des longueurs des barres est bien de 92,50 cm}}$.

.